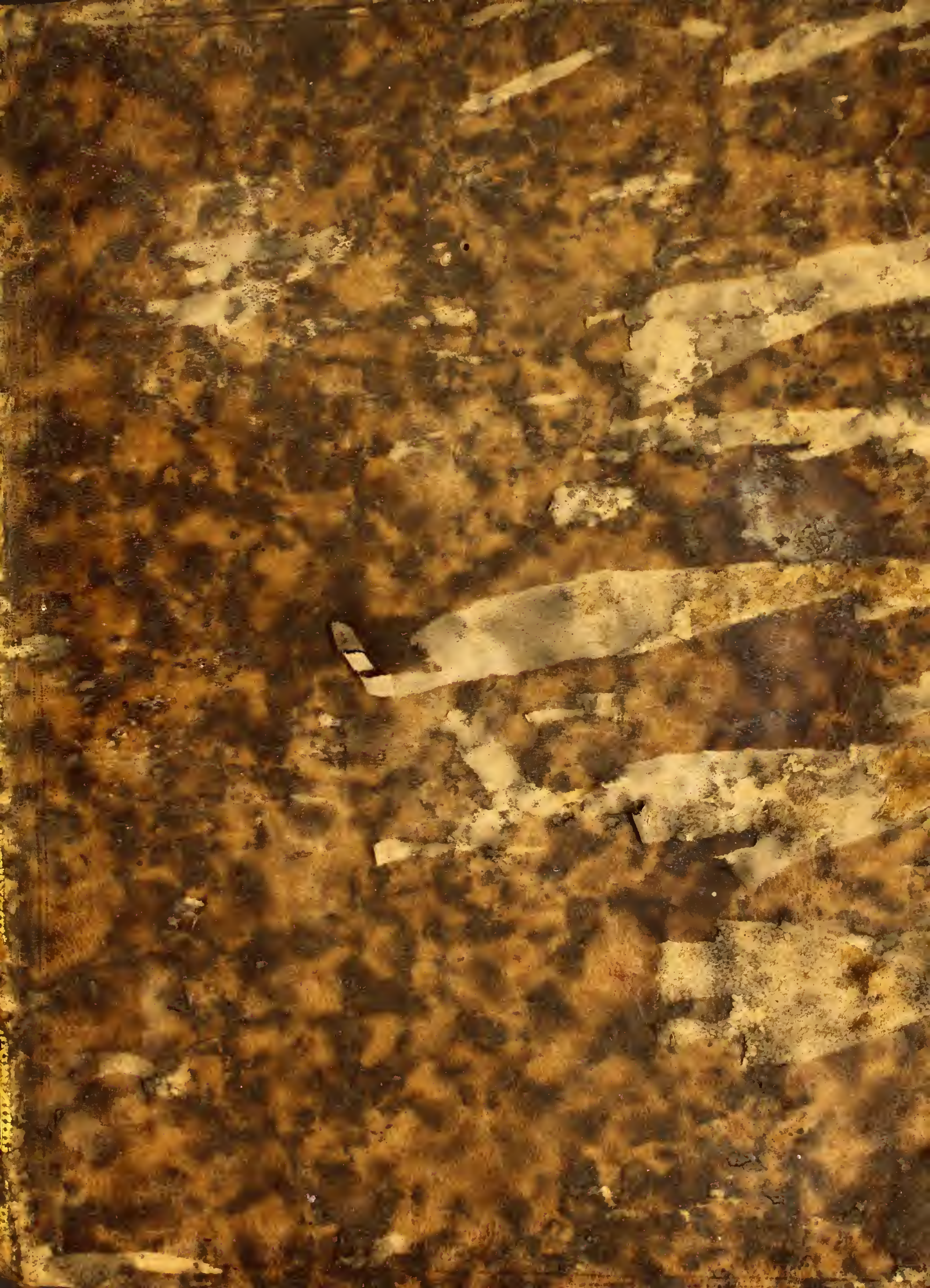






NEWTONI

PRINCIPIA PHILOSOPHIÆ,

CUM COMMENTARIO PERPETUO.

PHILOSOPHIÆ NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA.

AUCTORE

ISAACO NEWTONO, Eq. AURATO.

Perpetuis Commentariis illuſtrata, communi ſtudio

PP. THOMÆ LE SEUR & FRANCISCI JACQUIER

Ex Gallicanâ Minimorum Familiâ, Matheſeos Profeſſorum.

TOMUS SECUNDUS.



GENEVÆ,

Typis BARRILLOT & FILII Bibliop. & Typogr.

MDCCXL.

ILLUSTRISSIMÆ

SOCIETATI REGALI

A

SERENISSIMO REGE

CAROLO II.

AD PHILOSOPHIAM PROMOVENDAM

FUNDATÆ,

ET

AUSPICIIS

SERENISSIMI REGIS

GEORGII II.

FLORENTI,

COMMENTARIUM PERPETUUM IN HUNC CELEBERR. IS. NEWTONI TRACTATUM

D. D. D.

Thomas LE SEUR & *Franciscus* JACQUIER

MONITUM.

ALtera tandem PRINCIPIORUM MATHEMATICORUM Pars in lucem prodit. De motibus corporum in medio resistente agitur potissimùm in hoc secundo NEWTONI Libro, rem difficultatis plenam norunt omnes; ita tamen nostra studuimus accommodare commentaria ut iis qui in primi Libri lectione eâ quâ par est diligentiâ & attentione fuerint versati, facilia planaque omnia futura esse speremus. Nec satis nobis fuit præclara Clariss. Autoris inventa explicare, nos ipsi quoque usu didicimus nonnulla interdùm invenire quæ hùc & illùc in nostris commentariis inserere ausi sumus. Sed quod maximum est hujusce operis decus & ornamentum, nova quamplurima doctissimi EULERI problemata quæ in egregio Mechanices Opere leguntur, addidimus Nostros etiam abundè locupletant commentarios pretiosa monumenta quibus *Acta Eruditorum* Lipsiensia exornarunt Clariss. Viri JOANNES & DANIEL BERNOULLIUS. Silentio tandem prætermittendus non est Illustriss. doctissimusque POLENUS cujus elegans de Logarithmicæ constructione epistola, nonnullaque de motu aquarum experimenta nobis plurimùm

pro-

profuêre. Sed longè majora ſunt quam verbis exprimi poſſint, de hoc univerſo opere Clariſſ. Viri JOAN. LUDOVICI CALANDRINI merita qui eâdem quam primi Libri initio laudavimus diligentiâ indefeſsâque curâ huic ſecundæ parti invigilavit.

Reprehendendum multis fortaſſe videbitur quod oblatam frequenter occaſionem quaſi è manibus dimittentes, Celeberrimas Philoſophorum controverſias vel omninò omittamus vel leviter duntaxat perſtringamus; Verùm ſciant eum fuiſſe NEWTONI ſcopum à quo ne latum unguem maximè vellemus diſcedere, ut ingenioſa quoque Syſtematum commenta è phyſicâ eliminaret atque profligaret; Nos itaque à Philoſophicis litibus maximè averſi, altercationes ſummo ſtudio declinavimus. Tot inſuper nova his de rebus ſcripta quotidiè circumferuntur ut juſti operis molem excederet hic ſecundus Liber, ſi recentiora explicare aggrederemur Philoſophorum placita.

Hanc ſecundam laboris noſtri partem benignè excipiant mathematicarum diſciplinarum Candidati, tertiamque tandem & ultimam anno proximè futuro expectent.

Romæ in Regio Conventu SS. Trinitatis.
Anno 1740.

D. E.



D E

DE MOTU CORPORUM LIBER SECUNDUS.

SECTIO I.

(*) *De motu corporum quibus resistitur in ratione velocitatis.*

(*) LEMMA

generales resistentiæ notiones exponens.

1. Non potest corpus in medio fluido moveri atque in illud agere, quin ex fluidi reactione vim seu resistentiam aliquam patiatur. Vis illa resistentiæ, proportionalis est decremento motûs quod dato tempore generat, & illius directio directioni mobilis semper opposita est (per 1.
mot. Leg. 2. & 3.) Quapropter datâ corporis massâ, resistentia est ut velocitatis decrementum quod dato tempore producit; datâ enim mobilis massâ, motûs decrementum est ut decrementum velocitatis (6. Lib. 1.).

2. Vis resistentiæ quam momento quolibet temporis experitur corpus est ut motûs decrementum directè & temporis mo-

De Motu Corporum.

mentum inversè. Nam resistentia dato temporis momento est ut motûs decrementum directè (1) & dato motûs decremento est inversè ut momentum temporis quo motûs decrementum generatur. Si enim subduplo vel subtriplo temporis momento, idem motûs incrementum vel decrementum generetur, vis generans dupla aut tripla est.

3. Hinc datâ corporis massâ, resistentia est ut velocitatis decrementum directè & momentum temporis inversè.

4. Quoniam directio vis resistentiæ, directioni mobilis contraria est (1), corpus solâ vi insitâ in medio resistente motum, per rectam lineam continuò fertur, quod etiam evenire debere manifestum est, si corpus vi quâlibet acceleratrice vel retardatrice, secundum vel contrà directionem motûs insiti urgeatur.

5. Resistentia considerari potest tanquam vis retardans & cum vi gravitatis quâ corporum ascendentium motus perpetuò minuitur conferri. Vis enim resistentiæ sicut vis gravitatis infinitè parva est, si conferatur cum vi illâ quâ corpus motu finito cietur, seu quâ spatium finitum finito tempore describit. Nam si resistentiæ quam omni temporis momento patitur corpus, vis esset finita, sive ejusdem generis cum vi finitâ corporis motu finito acti, infinita multitudo resistentiarum momentanearum finito quovis tempore producta, totum corporis motum finito quolibet exiguo tempore extingueret, quod est contrà hyp., quâ supponimus corporis motum tempore aliquo finito in medio resistente perseverare.

6. Hinc corporis in medio resistente moti velocitas finita per spatium infinitè parvum, atque etiam tempore infinitè parvo æquabilis censeri potest, neglecto nimirum infinitè parvo velocitatis decremento.

7. JAM verò resistentia corporum in fluidis, cæteris paribus, oritur partim ex tenacitate, partim ex frictione, & partim ex reactione partium medii, tresque sunt celebriores circà hujus resistentiæ legem hypotheses, quarum Mathematicas consequentias Newtonus hoc libro exponit. 1ª. Hypothesis resistentiam ponit velocitati corporis dati proportionalem, secunda velocitatis quadrato, & tertia partim velocitati, & partim velocitatis quadrato. Præterea cùm experimentis sit cognitum partem quamdam resistentiæ fluidorum uniformem esse, considerandæ sunt quatuor aliæ hypotheses, in quarum primâ resistentia fingatur uniformis; in secundâ partim uniformis & partim velocitati proportionalis; in tertiâ partim uniformis & partim ut quadratum velocitatis, & in quartâ denique partim uniformis, partim ut velocitas, & partim ut velocitatis quadratum. Prima ex his quatuor hypothesibus nihil habet difficultatis, cum uniformis resistentia considerari possit tanquam gravitas constans cùm motum ascendentis corporis retardat; quâ de re satis actum est lib. 1. tres verò quæ sequuntur hypotheses non ægrè referri plerumque possunt ad determinationes motuum quas aliæ priores hypotheses (de quibus ab initio actum est.) suppeditant, quod deinceps ostendemus.

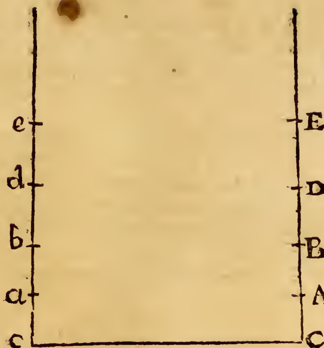
8. Si medium in quo corpus movetur perfectè fluidum sit, hoc est, partibus constet optimè lævigatis nullâque tenacitate cohærentibus, quæ proindè vi cuicumque illatæ cedant, & cedendo facillimè moveantur inter se, sola ea consideranda est resistentia quæ ex medii reactione ortum ducit, estque illa ut densitas medii & quadratum velocitatis mobilis dati conjunctim. Hæc enim resistentia (per motûs leg. 2. & 3. lib. 1.) est ut quantitas motûs dato tempusculo communicati; sed datâ mobilis velocitate, quantitas motûs communicati est ut quantitas fluidi tempusculo dato movenda, hoc est, ut densitas medii; datâ autem medii densitate, quantitas motûs communicati est ut quantitas fluidi dato tempusculo dimovenda, & ut velocitas quâ quantitas illa fluidi movetur conjunctim, & quantitas fluidi dato tempusculo dimovenda velocitati mobilis proportionalis est, corpus enim duplo velocius altero, duplo majus spatium in fluido percurret, sicque duplo pluribus particulis occurret. Quare datâ densitate medii, resistentia est ut quadratum celeritatis mobilis, atque adeò si neque fluidi densitas, neque mobilis celeritas data sit, erit resistentia ut medii densitas & quadratum velocitatis conjunctim, atque hæc est resistentia quæ ortum ducit ab inertiâ particularum fluidi quas corpus motum è loco dimovet & quæ in velocioribus motibus sola ferè observatur.

9. Altera resistentia quæ ex tenacitate

par-

...formis nascitur, constans
partium fluidi ... quod idem est, temporis momen-
est ... proportionalis, eamque in tardissimis motibus sensibilem faciunt experimenta. Si enim partium fluidi cohæsio sit ubique eadem, vi quâdam determinatâ opus est ut partes illæ separentur, corporique transitum præbeant, quâcumque demum velocitate illud feratur, & ideò vis illa resistentiæ cum vi gravitatis uniformi, quæ corporis ascendentis motum retardat, conferri potest. Nam corpora duo similia & æqualia cum pari velocitate è locis C & c per lineas CE, ce, ad rectam Cc normales projiciantur, & in locis æquè altis A & a, B & b, D & d &c. æqualem patiantur resistentiam; corpus quidem C resistentiam experiatur à vi gravitatis constante (quæ in locis A, B, D, E, &c. tantùm agat) oriundam, corpus verò c resistentiam ex tenacitate datâ, vi illi gravitatis æquali, in locis tantùm a, b, d, &c. reagente ortam; in spatiis verò intermediis AB & ab, BD & bd, &c. nullum sit motibus obstaculum; dum corpora perveniunt in A & a, æqualem habent velocitatem, & deindè victis æqualibus in A & a obstaculis, pari adhuc velocitate per spatia minimè resistentia AB & ab, feruntur; & simili modo, ob æquales resistentias in locis B & b per spatia BD & bd simul moventur, & ità deinceps eandem semper velocitatem in locis æquè altis habent. Minuantur jam æqualia illa spatia AB & ab, BD & bd, &c. & eorum numerus augeatur in infinitum, ut vis gravitatis & resistentiæ. actio vel reactio continua reddatur, & corpora duo eandem ubique resistentiam patientur, & in locis æquè altis eandem velocitatem habebunt. Quarè resistentia quæ ex fluidi tenacitate ortum ducit, potest cum vi gravitatis uniformis comparari, licet medii tenacitas in corpus quiescens (quod quidem vi gravitatis semper urgeretur) agere nullo modo possit.

10. In fluidis igitur tenacitate aliquâ præditis, resistentia est partim uniformis, partim velocitatis quadrato proportionalis (8. 9.).



11. LEMMA. In quâcunque resistentiæ hypothesi, corporis tam in medio resistente quam in vacuo moti velocitas finita in singulis locis est ut elementum spatii descripti directè & momentum temporis quo describitur inversè. Velocitas enim uniformis est ut spatium quodcunque descriptum directè & tempus quo id spatium describitur inversè. In medio autem sive resistente sive vacuo velocitas per spatium infinitè parvum æquabilis est (6.). 11

12. Coroll. 1. Hinc temporis momentum est ut momentum seu elementum spatii directè & velocitas inverse; momentum verò spatii ut velocitas & momentum temporis conjunctim.

13. Coroll. 2. Si igitur velocitas dicatur v, spatium descriptum s, tempus quo descriptum est t erit $v = \frac{ds}{dt}$, $v\,dt = ds$ & $dt = \frac{ds}{v}$, sumptisque fluentibus S. $v\,dt = s$, & $t = \text{S.}\,\frac{ds}{v}$.

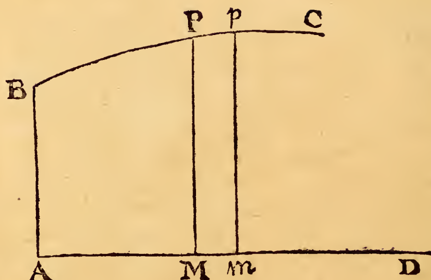
DE MOTU CORPORUM.

14. Coroll. 3. Si ità descripta fuerit curva B P C ut ejus applicatæ M P, m p, axi A D, normales, exponant velocitatem v, & abscissæ à puncto fixo A sumptæ A M, A m tempus t, erectumque sit perpendiculum A B curvæ occurrens in B, area A B P M exponit spatium tempore t descriptum. Sit enim applicata p m, priori P M infinitè propinqua, & erit $Mm = dt$, adeóque areæ A B P M elementum $MPpm = v\,dt = ds$ (11) & proinde area $ABPM = S.\,v\,dt = s$. Recta A D dicatur linea temporum & curva B P C linea celeritatum. Eodem modo si abscissa A M exponeret spatium descriptum s & applicata M P velocitatem inversam, ità ut esset $AM = s$, & $MP = \frac{1}{v}$, area A B P M exponeret tempus quo spatium A M descriptum est; esset enim $MPpm = \frac{ds}{v} = dt$, & hinc area $ABPM = S.\,\frac{ds}{v} = t$.

15. LEMMA. Si corpus datæ massæ solâ vi insitâ in medio resistente moveatur, *decrementum velocitatis*, erit ut *resistentia* & *momentum temporis* conjunctim. *Incrementum* verò *spatii* erit ut *velocitas & velocitatis decrementum* directè & *resistentia* inversè. Datâ enim corporis massâ, resistentia est ut velocitatis decrementum directè & momentum temporis inversè (2) ideóque decrementum velocitatis est ut resistentia & momentum temporis conjunctim. Quod erat 1um. Sed incrementum spatii est ut velocitas & momentum temporis conjunctim (12) momentum verò temporis est ut decrementum velocitatis directè & resistentia inversè (2); Quarè incrementum spatii est ut velocitas & illius decrementum directè & resistentia inversè. Quod erat 2um.

16. Coroll. 1. Hinc resistentia est ut velocitas & illius decrementum directè ac spatii incrementum inversè, & velocitas in suum decrementum ducta, est ut resistentia & incrementum spatii conjunctim.

17. Coroll. 2. Quare si spatium dicatur s, tempus t, velocitas v, resistentia r, erit $r\,dt = -dv$, & $r\,ds = -v\,dv$.



18. LEMMA. Si corpus datæ massæ in medio resistente urgeatur vi centripetâ in directione motûs corporis agente; corpore ascendente, erit *velocitatis decrementum* ut *momentum temporis* & *summa vis centripetæ & resistentiæ conjunctim*. Et *velocitas* in *suum decrementum* ducta erit ut *incrementum spatii* & *summa vis centripetæ & resistentiæ* conjunctim.

At corpore descendente, *velocitatis incrementum* erit ut *momentum temporis*, & *differentia inter vim centripetam & vim resistentiæ* conjunctim. Et *velocitas* in *suum incrementum* ducta, erit ut *incrementum* sive elementum *spatii* & *differentia inter vim centripetam ac resistentiam* conjunctim.

Resistentia enim considerari potest tanquam vis continuò retardans (5) & vis centripeta corporis ascendentis motum etiam retardat, ideóque vis tota retardatrix est summa ipsa vis centripetæ & resistentiæ, dum corpus ascendit; sed vis retardatrix in temporis momentum ducta est ut decrementum velocitatis quod producit (2); ergò corpore ascendente, decrementum velocitatis est ut temporis momentum & summa vis centripetæ ac resistentiæ conjunctim. Quod erat 1um.

Sed momentum temporis est ut incrementum sive elementum spatii directè & velocitas inversè (12). Quarè si corpus ascendat decrementum velocitatis est ut elementum spatii & summa vis centripetæ ac resistentiæ directè, & velocitas inversè, adeóque velocitas in suum decrementum ducta est ut elementum spatii & summa vis centripetæ ac resistentiæ conjunctim. Quod erat 2um.

Descendente corpore vis centripeta motum

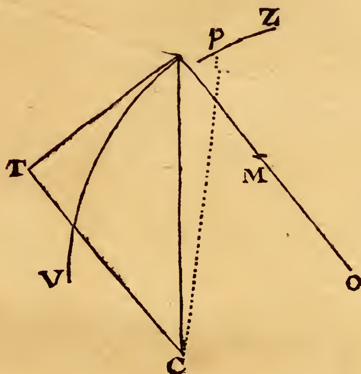
tum corporis accelerat dum resistentia retardat, & ideò si vis centripeta major sit vi resistentiæ, excessus vis centripetæ suprà resistentiam est vis tota accelerans; Si vis centripeta minor est vi resistentiæ, vis tota retardans erit excessus resistentiæ suprà vim centripetam. Quarè differentia temporis ntiam & vim centripetam in casu ut incrementum ducta erit in primo cundo casu, ut illius decrementis, & in se erat 3um. Sed momentum temporis quod elementum spatii directè & velocitas inversè (12), quare velocitas in suum elementum (sive incrementum sit sive decrementum) ducta, est ut elementum spatii, & differentia inter vim centripetam ac resistentiam conjunctim. Quod erat 4um.

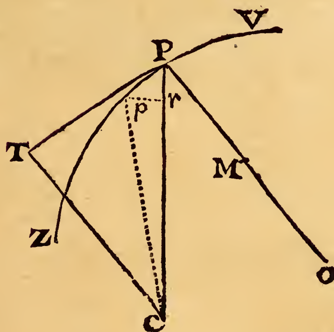
19. Coroll. 1. Undè si vis centripeta dicatur g, resistentia r, spatium s, tempus t, velocitas v erit pro corporis ascensu $gdt + rdt = -dv$, & $gds + rds = -vdv$; & pro corporis descensu, si vis centripeta vi resistentiæ sit major $gdt - rdt = dv$, & $gds - rds = vdv$; at si vis centripeta vi resistentiæ sit minor $rdt - gdt = -dv$, & $rds - gds = -vdv$.

20. Coroll. 2. Si in his formulis ponatur $r = 0$, mutabuntur illæ in formulas, quibus motus corporis in medio non resistente determinantur. Quâ ratione motus corporis in medio resistente conferri possunt cum ejusdem motibus in medio non resistente.

21. Coroll. 3. Si corpore descendente, resistentia vi centripetæ æqualis fuerit, corporis celeritas æquabilis manet; nam in formulis $gdt - rdt = dv$, & $rdt - gdt = -dv$, positâ $g = r$, fit $dv = 0$, hoc est, velocitatis incrementum vel decrementum nullum.

22. Coroll. 4. Si corpus in lineâ rectâ AC vi centripetâ urgeatur ad punctum datum C, & de loco dato A sursum vel deorsum projiciatur cum velocitate datâ in medio resistente, & spatium AP quod ascendendo vel descendendo describit tempore t dicatur s, data AC dicatur b, & tam in ascensu quam in descensu scribatur $CP = x$, adeoque in ascensu $x - b = s$, & $dx = ds$, in descensu $b - x = s$, & $-dx = ds$; si loco ds substituatur ipsius valor in formulis coroll. 1. (19) erunt illæ pro ascensu $gdx + rdx = -vdv$, & pro descensu $gdx - rdx = -vdv$, quarum una in alteram abit, mutato signo $\pm$ vel $-$, quantitati r præfixo. 22.





23. LEMMA. Si corpus vi quâlibet centripetâ sollicitatum curvam VPZ in medio resistente aut etiam in vacuo describat, visque centripeta in loco quovis P dividatur in vires duas, quarum altera directionem habeat PO tangenti PT per P ductæ normalem, altera directionem cum tangente congruentem, quadratum velocitatis corporis

De Motu Corporum.

poris in loco P, exponi poterit per factum ex vi normali ductæ in radium circuli curvam V P Z osculantis in P.

Sit PC, totius vis centripetæ directio, PO radius osculi, P p arcus curvæ infinitè parvus qui usurpari potest pro arcu circuli centro O & radio O P descripti. Velocitas corporis in P dicatur v, quæ per arcum P p tam in medio resistente quam in vacuo æquabilis est, (6) & totius vis centripetæ pars illa quæ secundum directionem P O agit, seu vis normalis dicatur N & quia vis resistentiæ ut pote semper nor- traria directioni mobili P T, illa N quâ malem N non afficit ..metur in medio recorpus in arcu vi centripetæ quâ corpus sisten cum eâdem velocitate æquabili v, in medio non resistente circulum describeret cujus centrum O, & radius O P. Corpus autem vi constante N, sollicitatum in vacuo de loco P cadat per radii partem P M ita ut eo lapsu acquirat celeritatem v quâ in medio non resistente circulum describeret cujus centrum est O & radius est O P; sitque P M $= s$, velocitas eo lapsu acquisita in M erit ergo $= v$, & erit (20. 19.) $N ds = v dv$, sumptisque fluentibus $Ns = \frac{1}{2} vv$, & $2 Ns = vv$. Sed altitudo ex quâ corpus vi constante N sollicitatum in vacuo cadere debet ut velocitatem acquirat æqualem illi cum quâ circulum ipsum describit, est æqualis dimidio radii P O, (119. lib. 1.) ergo $2 s =$ P O & $2 Ns = vv = N \times$ PO. Q. E. D.

24. Coroll. 1. Iisdem positis, totius vis centripetæ juxtà directionem P C urgentis ea pars quæ secundum directionem tangentis P T agit, seu vis tangentialis in P dicatur T resistentia ibidem r, arcus V P s, ideoque P p $= ds$, & si corpus descendit, erit $T ds - r ds = v dv$ (18. 19.) quia vis tangentialis motum accelerat & vis resistentiæ eundem retardat, vis autem normalis nec accelerat nec retardat. Sed si corpus ascendit, erit $T ds + r ds = - v dv$ (18. 19.) vi tangentiali & resistentiâ motum corporis simul retardantibus.

25. Coroll. 2. Sit C virium centrum, vis tota centripeta in directione P C urgens $= g$, C P $= y$, C T tangenti perpendicularis $= p$, ideoque P T $= \sqrt{yy - pp}$. Ex puncto p, alteri P infinitè propinquo demissum sit ad C P perpendiculum p r, ut sit p r $= dy$, & triangulum P r p, simile triangulo P T C, & erit P p (ds) : p r (dy) $=$ P C : P T $= g : T = \frac{g\,dy}{ds}$, ubi observandum est dy, esse affirmativam, quando crescente arcu V P sive s, crescit etiam recta C P, seu y, id est, quando corpus ascendit, & contrà dy esse negativam, dum corpus descendit, adeóque in hoc casu fieri $T = - \frac{g\,dy}{ds}$. Hi valores vis tangentialis T, substituantur in formulis corollarii 1. & ambæ in hanc mutabuntur, $g dy + r ds = - v dv$.

26. Coroll. 3. Quia P p (ds) : p r $(\pm dy) =$ P C (y) : P T $(\sqrt{yy - pp})$ erit $ds = \pm \frac{y\,dv}{\sqrt{yy - pp}}$, (signo superiori pro ascensu & inferiori pro descensu usurpato)

pato). Quarè fiet $g dy + r ds = g dy \pm \frac{r y dy}{\sqrt{yy - pp}} = - v dv$.

27. Coroll. 4. Si radius osculi PO dicatur R, est (23) $R \times N = v^2$, & quia $y : p = g : N$, adeòque $\frac{pg}{y} = N$, fiet $\frac{Rpg}{y} = v^2$; sed radius osculi $R = \frac{y dy}{dp}$ (214. lib. 1.) quarè erit $\frac{gp dy}{dp} = v^2$, & $g = \frac{v^2 dp}{p dy}$. Substituatur hic valor in formula corollarii 2[i]. & fiet $g dy + r ds = \frac{v^2 dp}{p} + r ds = - v dv$, & ideò $v dv + \frac{v^2 dp}{p} = - r ds$.

28. Coroll. 5. Vis centripetæ directio PC, sibi semper parallela maneat, ut hic assumitur vis gravitatis, & per punctum V, in curvâ VPZ datum, ducatur recta VC directioni gravitatis PC perpendicularis, dicanturque ut suprà $VP = s$, $Pp = ds$, $CP = y$, $pr = dy$, vis tota gravitatis in P $= g$, resistentia r, velocitas corporis ibidem $= v$, & erit ut in corollariio 2°. $g dy + r ds = - v dv$.

29. Coroll. 6. Si in Hypothesi corollarii 5[i]. dicantur radius osculi in $P = R$, vis normalis $= N$, abscissa $VC = x$, & Cc seu $Pr = dx$, erit ob triangulorum Ppr, CPT similitudinem, $Pp : Pr = PC : TC = g : N$, sive $ds : dx = g : N = \frac{g dx}{ds}$; sed (23) $N = \frac{v^2}{R}$, ergò $\frac{g dx}{ds} = \frac{v^2}{R}$, & hinc $v^2 = \frac{R g dx}{ds}$.

30. Coroll. 7. Est autem (216. Lib. 1.) $R = \frac{ds^2 dy}{ds ddx - dx dds} = - \frac{ds^2 dy}{dx dds}$, si ponatur dx, constans, & ideò $ddx = 0$; Et quia $ds^2 = dy^2 + dx^2$, sumptisque fluxionibus, factâ dx, constante $ds dds = dy ddy$, & $dds = \frac{dy ddy}{ds}$, fiet $R = - \frac{ds^3}{a x ddy}$; quarè (29) $v^2 = \frac{R g dx}{ds} = - \frac{g ds^2}{ddy}$, ideoque $g = - \frac{v^2 ddy}{ds^2}$, & hinc (28) $g dy + r ds = - \frac{v^2 dy ddy}{ds^2} + r ds = - v dv$, hoc est, ob $dy ddy = ds dds$, $v dv = \frac{v^2 dds}{ds} - r ds$.

31. Scholion. In superioribus quinque lemmatis ipsorumque corollariis, fere complexi sumus principia omnia, quibus & ad inventionem & ad demonstrationem motuum in mediis resistentibus usi sunt Clariss. viri Newt. in hoc Libro; Varignonius in monumentis Academiæ Regiæ an. 1707. 1708. 1709. 1710. 1711. Joannes Bernoulli ibidem an. 1711. & in actis eruditorum Lips. an. 1713. & 1719. Hermannus Lib. 2. Phoronomiæ & in commentariis Academiæ Petropolitanæ, ac Eulerus in opere exquisito quod de Mechanicâ scripsit analyricè. Nunc alia nonnulla de Logarithmicæ proprietatibus, & de methodo maximorum & minimorum quæ ad doctrinam motuum in mediis resistentibus explicandam spectant, subjungenda sunt.

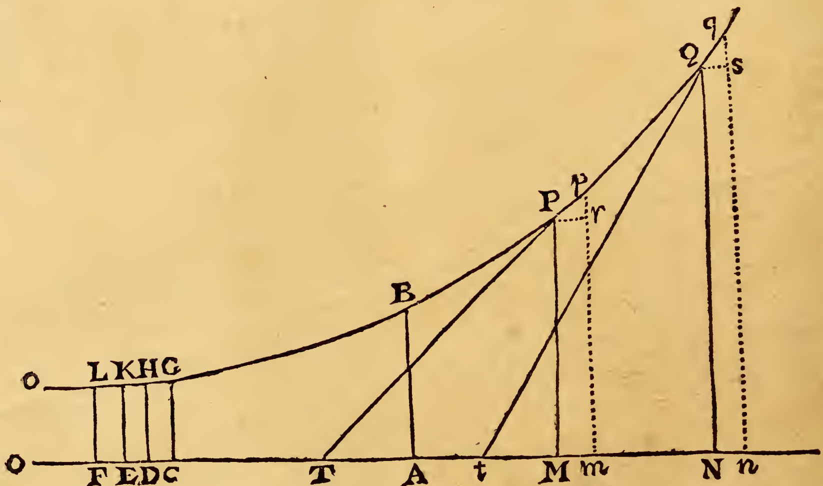
LEMMA

præcipuas Logarithmicæ proprietates exponens.

III. Hugenius de hac ipsâ Newtoniani operis parte loquens, in quâ agitur de corporibus in mediis resistentibus motis, (quam summâ cum voluptate se vidisse testatur) ait se notasse lineam curvam quam Logarithmicam aut Logisticam nuncupat, summæ utilitatis esse in hoc negotio, & quædam de eâ Theoremata indicat quorum demonstrationem Guido Grandus postea evulgavit; Hujus ergo curvæ proprietates ab initio explicare à scopo nostro alienum non duximus.

32. De-

De Motu Corporum.



32. Defin. Sit linea recta NAO secundum quam feratur perpendicularis MP motu uniformi & sibi parallelo, dum in ea perpendiculari MP mobile P velocitate variabili movetur secundum hanc Legem, ut ejus velocitas sit semper proportionalis distantiæ ejus à rectâ NAO, curva ab illo puncto P descripta dicetur *Logarithmica* vel *Logistica*.

Linea N A O secundum quam perpendicularis PM motu uniformi & sibi parallelo fertur, dicitur *Axis Logarithmicæ*, & lineæ PM, QN perpendiculares in Axem sunt ejus ordinatæ.

Si quædam ex ordinatis Logarithmicæ, ut AB, sit æqualis unitati, punctum axeos A cui insistit censetur abscissarum origo, & abscissæ à parte AM sumptæ, sunt positivæ, à parte AO negativæ & abscissa pertinens ad ordinatam AB sive ad unitatem est ipsum o.

Coroll. 1. *Differentiæ quamminimæ ordinatarum Logarithmicæ æqualibus tempusculis genitæ, sunt ut illæ ordinatæ.*

In quovis enim puncto Logarithmicæ velocitas axi perpendicularis quâ ordinatæ crescunt vel decrescunt, est ordinatæ proportionalis (ex Def.), sed durante tempusculo infinitè parvo illa velocitas uniformis est censenda, & æqualibus tempusculis incrementa vel decrementa linearum sunt ut velocitates uniformes quibus generantur, ergo incrementa vel decrementa ordinatarum h. e. earum differentiæ æqualibus tempusculis genitæ sunt ut illæ ordinatæ.

Coroll. 2. *Sint ordinatæ quævis PM, QN, ducantur duæ aliæ ordinatæ pm, qn ipsis quamproximæ & ab iis æqualiter distantes, pm & qn erunt prioribus ordinatis proportionales:* Velocitas enim quâ ordinata motu sibi parallelo fertur est uniformis, ideoque eodem tempore ordinata PM ad pm perveniet ac QN ad qn ob æquales distantias, ergo, per Cor. I. differentiæ ordinatarum PM & QN dum per uniunt ad pm & qn erunt iis ipsis ordinatis proportionales, sed adjectis vel detractis iis differentiis à lineis PM & QN fiunt ordinatæ pm, qn, & adjectis vel detractis ex terminis rationis cujusvis, correspondentibus terminis rationis ipsi æqualis non mutatur prio ratio, ergo ordinatæ pm & qn erunt inter se ut PM ad QN, & etiam alternando PM : pm = QN : qn.

Coroll. 3. *Si sumantur in axe puncta C, D, E, F ad distantias æquales & quamminimas, in iisque punctis erigantur ordinatæ, illæ ordine constituent Progressionem Geometricam.* Nam quia ex Hyp. ordinatæ GC & HD, HD & KE sunt quamproximæ & æqualiter distantes, est per Corollarium præcedens GC : HD = HD : KE, eadem ratione est HD : KE = KE : LF, sicque deinceps, unde liquet ordi-

ordinatas GC : HD : KE : LF &c. esse in progressione Geometricâ.

33. *Theor. I. Sumantur in axe Logarithmicæ quatuor puncta, ita ut duo priora æque à se mutuò distent ac duo posteriora, ordinatæ in iis punctis erectæ erunt in proportione Geometricâ.*

Et si sumantur in axe quotlibet puncta æque distantia ordine continuo, ordinatæ iis insistentes erunt in progressione Geometricâ.

Sumantur in axe duo puncta quævis A & E, & alia duo H & K talia ut sit AE=HK, eriganturque in illa puncta ordinatæ AL, EP, HS, KT; dico illas ordinatas fore in proportione Geometricâ.

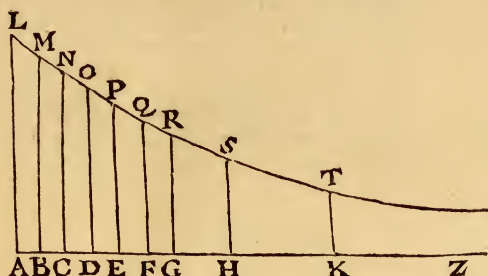
Dividatur tam AE quam HK, in partes infinitè parvas æquales inter se, totidem erunt divisiones in utroque intervallo, erigantur in illa puncta ordinatæ, fient duæ progressiones Geometricæ, in quibus totidem erunt termini & rationes terminorum successivorum æquales erunt, quia ordinatæ in utrâque progressione æqualiter distant; Ergo ex æquo, primus terminus AL prioris progressionis erit ad EP ultimum terminum ejus progressionis, ut HS primus terminus alterius progressionis ad ejus ultimum terminum KT. Q. E. D.

Et si sumantur in axe plura puncta æquè distantia ordine continuo sibi succedentia, ordinatæ in iis punctis erectæ erunt in progressione geometricâ: Probatur ut in Cor. 3. defin.

Coroll. *E converso, si in lineâ quâvis sumantur plura puncta, æquè distantia ordine continuo, & in iis erigantur perpendiculares quæ sint in progressione Geometricâ, Logarithmica aliqua per earum perpendicularium extremitates transibit.*

Sint enim A, D, G &c. ea puncta æquè distantia dividanturque eorum intervalla in partes æquales quamminimas, totidem erunt in quovis intervallo, assumantur mediæ proportionales inter perpendiculares AL & DO, DO & GR, &c. tot quot sunt divisionum puncta, & in singulis punctis erigantur perpendiculares iis mediis proportionalibus ordine sumptis æquales; Denique curva tangat tam perpendiculares datas AL, DO, GR quam hasce medias, dico eam curvam esse Logarithmicam.

Facile enim liquet ex naturâ progressionum, quod cum sit AL:DO=DO:GR &c. & totidem mediæ proportionales assumantur inter AL & DO, quot assumuntur inter DO & GR, sicque deinceps, formari progressionem continuam constantem ex omnibus illis perpendicularibus tam datis quam inventis, ideo quamlibet ex illis, ut 33.



AL, esse ad sibi proximam BM, ut alia quævis DO, est ad proximam PE, unde dividendo, est AL ad suam differentiam à proximâ, ut est etiam DO ad suam differentiam à proximâ, ideóque perpendicularium proximarum differentiæ erunt ubique eis perpendicularibus proportionales; Evanescentibus ergo punctorum in axe sumptorum intervallis, & perpendicularibus ad vicinas æquali ubique celeritate latis & æquali tempusculo (ob æqualitatem intervallorum), velocitates quibus crescunt vel decrescunt perpendiculares erunt iis ipsis perpendicularibus proportionales; Ergo (ex definitione Logarithmicæ) ea curva quæ tanget eas perpendiculares erit Logarithmica.

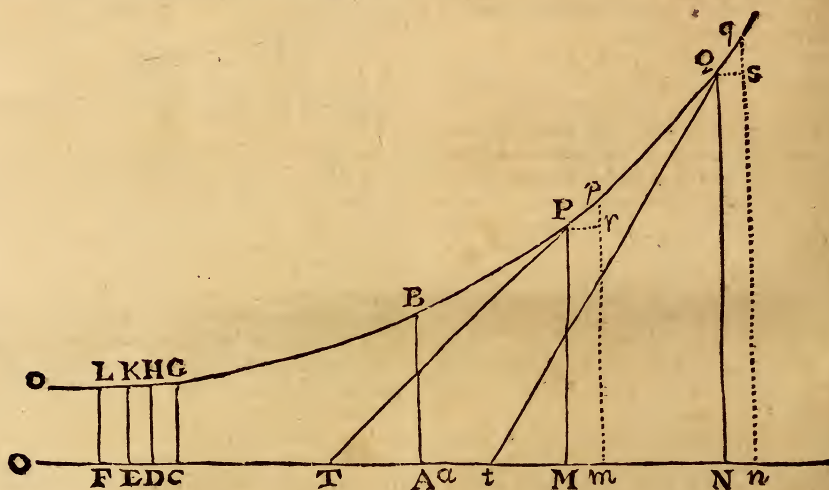
34. Theor. II. *Abscissæ axis Logarithmicæ, sunt Logarithmi ordinatarum in earum extremo insistentium.* Ferantur hinc inde ab origine axis partes æquales quamminimæ, in extremo singularum erigantur ordinatæ, illæ omnes ordinatæ constituent progressionem Geometricam inter cujus terminos occurrit unitas, earum verò abscissæ erunt in progressione Arithmeticâ propter partium in axe sumptarum æqualitatem, & abscissa quæ unitati respondet est o; Jam autem cum termini progressionis Arithmeticæ inter quos est o ita aptantur terminis progressionis Geometricæ ut o respondeat unitati & reliqui termini sibi respondeant, tum termini progressionis Arithmeticæ sunt Logarithmi terminorum correspondentium pro-

DE MOTU CORPORUM.

progreſſionis Geometricæ; Ergo abſciſſæ Logarithmicæ, ſunt Logarithmi ordinatarum correſpondentium.

Corol. 2. *Portio axis quæ intercipitur inter duas Ordinatas eſt Logarithmus rationis quæ intercedit inter illas Ordinatas.* Quotiens enim duarum quantitatum exprimit rationem quæ inter illas intercedit, & differentia Logarithmorum earum quantitum, eſt logarithmus quotientis earum, ſed abſciſſæ ſunt Logarithmi ordinatarum, & portio axis quæ intercipitur inter duas ordinatas eſt differentia abſciſſarum ſive Logarithmorum ad eas ordinatas pertinentium, ergo illa portio eſt Logarithmus quantitatis quæ exprimit rationem quæ inter Ordinatas intercedit.

Coroll. 2. *Si dentur duarum aut plurium quantitatum Logarithmi, & à puncto dato rectæ alicujus ſumantur longitudines eis Logarithmis æquales, & in earum extremo erigantur perpendiculares quantitatibus quarum ſumuntur Logarithmi æquales, Logarithmica aliqua per earum perpendicularium extremitates tranſibit.*



In recta O A N ſumatur punctum A in quod erigatur perpendicularis A B unitati æqualis, ſitque A M logarithmus quantitatis cui æqualis eſt perpendicularis M P, ſit A a differentia progreſſionis Arithmeticæ ex quâ deſumuntur logarithmi, quæ ideò accuratè continebitur in intervallo AM toties quot ſunt termini in progreſſione Geometrica ex qua deſumuntur quantitates quarum habentur Logarithmi, quærantur tot mediæ proportionales inter A B & M P quot ſunt diviſionum puncta inter A & M, & in illa puncta erigantur perpendiculares illis mediis proportionalibus ordine æquales, fiet progreſſio Geometrica, quæ eſt ipſa progreſſio quantitatum quarum abſciſſæ lineæ O A N quantitate A a ſucceſſivè auctæ ſunt Logarithmi, ſiquidem in utrâque progreſſione occurrunt termini A B & M P eodem intervallo in utraque diſſiti, ſed ſi in punctis æquidiſtantibus lineæ cujuſvis erigantur perpendiculares in progreſſione Geometricâ, Logarithmica aliqua earum vertices tanget (Cor. Theor. I.) Ergo ſi dentur numeri cum ſuis Logarithmis concipi ſemper poterit Logarithmica cujus abſciſſæ ſint illi Logarithmi & cujus ordinatæ ſint quantitates quibus reſpondent.

35. Theor. III. *Axis logarithmicæ eſt ejus Aſymptotus ad quam ab unâ parte accedit propius datâ quâvis quantitate numquam tamen eam attingit, & à quâ ab alterâ parte longius recedit datâ quâvis quantitate.*

Sint duæ ordinatæ A B, M P quarum una ſit alterius dupla vel pluſquam dupla, feratur portio axis A M hinc inde ſecundum axem ſine fine, ordinatæ in ea puncta erecta creſcent ab unâ parte & ab alterâ decreſcent in ratione duplâ vel pluſquam

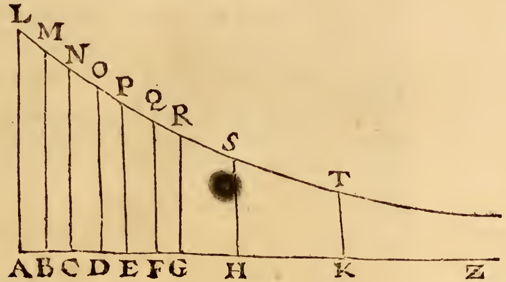
quam duplâ (per Cor. Theor. I.) sed ex Principiis Archimedeis quantitas crescens in progressione duplâ vel plusquam duplâ omnem quantitatem datam tandem excedet, & ex Principiis Euclideis quantitas quævis decrescens in ratione duplâ vel plusquam dupla minor fit quâvis quantitate datâ; Ergo Logarithmicâ longius ab axe recedit, aut propius ad eum accedit quâvis quantitate datâ, numquam tamen eum attinget, attingat enim eum si fieri potest in quodam puncto X, ferendo distantiam AM secundum axem, fiet tandem ut cadat proximè citra X, putà in Y, tum proximè ultra, ut in Z; in puncto Y nondum attinget axem ex Hypothesi, & aliquo intervallo YV ab eo distabit, sed quia YZ = AM debebit esse AB : MP = YV ad ordinatem in Z, qua ideò dabitur, ac per consequens Logarithmica nondum attinget axem in Z, nedum eum attigerit in X. Q. E. D.

36. Theor. IV. *Subtangens Logarithmicæ est constans.* Capiantur enim ubivis in axe particulæ æquales quamminimæ Mm, Nn, erectisque ordinatis MP, mp, & NQ, nq, per puncta P & Q concipiantur tangentes PT, Qt axi occurrentes in T, t; ducantur etiam rectæ Pr, Qs, ordinatis mp, nq perpendiculares. Evanescentibus ordinatarum distantiis Mm, Nn, triangulum Ppr fit simile triangulo TPM, & Triangulum Qqs simile triangulo tQN, ideoque est pr : PM = Pr (sive Mm) : MT, & qs : QN = Nn (sive Mm) : Nt, sed ob distantias Mm, Nn æquales est pm : PM = qn : QN & dividendo est pr : PM = qs : QN, quare Pr (sive Mm) : MT = Nn (sive Mm) : Nt, adeoque MT = Nt. Q. E. D.

Cor. *Hinc cum ordinata sit ad subtangentem constantem ut fluxio ordinatæ ad fluxionem abscissæ, obtinetur Logarithmicæ æquatio fluxionalis.* Abscissa AM dicatur x, ordinata MP y, subtangens MT, s, fluxio Mm erit dx, $pr = dy$, cumque sit $y : s = dy : dx$, est $y\,dx = s\,dy$ æquatio ad logarithmicam.

37. 37. PROBL. I. *Datâ subtangente & duabus ordinatis Logarithmicæ, invenire portionem axis inter eas ordinatas interceptam.*

1us. Casus major ex illis ordinatis non sit plusquam dupla alterius; major illa ordinata sit LA quæ dicatur y, minor sit GR, differentia earum LA − RG sit b. Portio axis AG inter eas intercepta sit x, divisaque concipiatur in partes æquales infinite parvas $AB = dx$, earum numerus (qui infinitus censendus est) dicatur n, erit ergo $n\,dx = x$; subtangens data sit s, eritque per Corollarium præcedens $y : s = (dy : dx = n\,dy : n\,dx =)\ n\,dy : x$; hoc autem modo determinatur valor $n\,dy$. Concipiantur erectæ omnes ordinatæ in puncta divisionum portionis axis AG, erunt in progressione Geometricâ (per cor. 3. def. n. 32.) & cum earum differentiæ sint ut illæ ordinatæ (per. cor. 1. def. n. 32.) differentiæ successivæ earum ordinatarum erunt in progressione Geometricâ, cujus omnes termini simul sumpti differentiam LA − RG sive b efficient; numerus autem terminorum ejus progressionis erit n, primus terminus dy, secundus invenitur per hanc proportionem $LA : MB = dy : \frac{MB}{LA}\,dy$ sive (quia $MB = y - dy$ & $LA = y$) secundus ille terminus erit $\frac{y-dy}{y}\,dy$, unde juxta Methodum summandi progressiones Geometricas est $b = dy \times \dfrac{\dfrac{\overline{y-dy}^{\,n}}{y^n} - 1}{\dfrac{y-dy}{y} - 1}$ $= -\frac{1}{y^{n-1}} \times \overline{y-dy}^{\,n} - y^n =$ (valore $\overline{y-dy}^{\,n}$ in seriem reducto) $-\frac{1}{y^{n-1}} \times y^n - ny^{n-1}\,dy + n \times \frac{n-1}{2} y^{n-2}\,dy^2$ &c. $- y^n$; sive deletis terminis y^n & $-y^n$, totâque serie per $-y^{n-1}$ divisa est $b = +n\,dy$



$-\frac{nn-n}{2}y^{-1}dy^2+\frac{n^3-3n^2-2}{2\times 3}y^{-2}dy^3$ &c. ſed quoniam n eſt numerus infinitus, in ſingulis coefficientibus altiſſima ejus dignitas ſola aſſumi debet, reliquis terminis neglectis, unde ſeries ad hanc reducitur $b=+ndy-\frac{n^2y^{-1}dy^2}{2}+\frac{n^3y^{-2}dy^3}{2\times 3}$ &c. qui quidem termini finiti ſunt, compenſatâ dignitate numeri infiniti n per infiniti parvi dy ſimilem dignitatem.

Ex eâ autem ſerie, per ſerierum reverſionem obtinebitur valor ipſius ndy, ſit enim $ndy=Ab+Bb^2+Cb^3+Db^4$ &c.

erit $+ndy=+Ab+Bb^2+Cb^3$ &c.

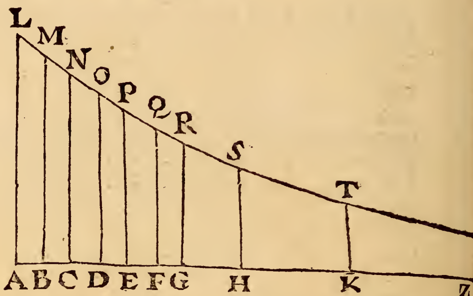
$$-\frac{nndy^2}{2y}=\quad-\frac{A^2b^2}{2y}-\frac{2ABb^3}{2y}$$

$$+\frac{n^3dy^3}{2\times3y^2}=\quad+\frac{A^3b^3}{2\times3y^2}$$

Cum ergo hi omnes termini debeant efficere b, fiat primus terminus $Ab=b$ erit $A=1$, & reliqui omnes termini debebunt eſſe æquales 0, ſuppeditabuntque totidem æquationes ad determinandos coefficientes B, C, D &c. v. gr. eſt $+Bb^2-\frac{A^2b^2}{2y}=0$, unde invenitur $B=\frac{1}{2y}$; eſt $Cb^2-\frac{2ABb^3}{2y}+\frac{A^3b^3}{2\times3y^2}=0$, ſubſtitutoque valore A & B diviſoque per b^3, eſt $C=\frac{1}{3y^2}$, ſicque de cæteris, unde reperietur $ndy=b+\frac{b^2}{2y}+\frac{b^3}{3y^2}+\frac{b^4}{4y^3}$ &c.

Cum itaque ſit $y:s=ndy:x$, erit $x=s\times\frac{b}{y}+\frac{b^2}{2y^2}+\frac{b^3}{3y^3}+\frac{b^4}{4y^4}$ &c. Q. E. I.

2us. Caſ. Quod ſi ordinata LA ſit pluſquam dupla ordinatæ TK, quæratur media proportionalis inter LA & TK, cujus ſi LA non ſit pluſquam dupla, invenietur intervallum abſciſſum inter eam & LA, ut prius, eritque dimidia pars intervalli quæſiti AK, erit enim LA ad eam mediam, ut ea media ad TK, unde portio axis inter LA & eam mediam, erit æqualis portioni axis inter eam mediam & TK; ſi LA ejus



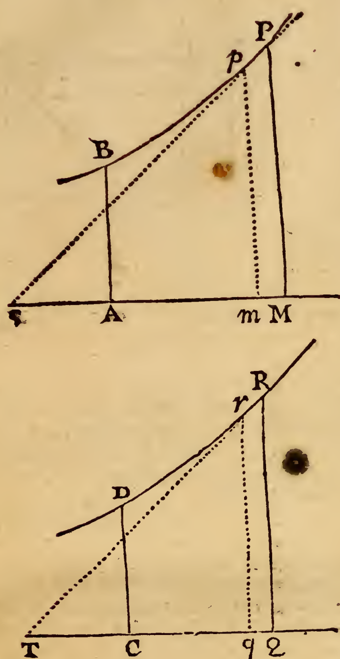
mediæ ſit pluſquam dupla, quæratur nova media inter LA & priorem mediam, intervallum inter hanc & LA erit quarta pars portionis quæſitæ AK. Quod ſi LA ſit adhuc pluſquam dupla iſtius mediæ repetatur operatio donec media inveniatur cujus LA non ſit pluſquam dupla, ex cujus intervallo, intervalli AK valorem aſſignare licebit, eo quo prius uſi ſumus ratiocinio.

Cor. 1. *Si una ex ordinatis ſit unitas, portio axis quæſita* x *erit alterius ordinatæ abſciſſa, ideoque ejus erit Logarithmus,* poſitivus quidem ſi ea ordinata ſit unitate major, negativus verò ſi unitate ſit minor.

Cor. 2. Si ordinata GR ſit unitas, & ordinata LA ejus dupla, & ſi ſubtangens Logarithmicæ ſit æqualis unitati, ſeries abſciſſam exhibens in hanc mutatur $x=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times4}+\frac{1}{3\times8}+\frac{1}{4\times16}$ &c. quorum terminorum calculus eſt facillimus, qui ſi inſtituatur, abſciſſa quæſita invenietur $x=.6931472$.

38. Theor. V. *Sint duæ diverſæ Logarithmicæ in utrâque ſumantur ordinatæ æquales, abſciſſæ illis ordinatis correſpondentes in utrâque Logarithmicâ erunt ut earum Logarithmicarum ſubtangentes, adeoque in conſtanti ratione,*

Sint duæ Logarithmicæ PB, RD prioris ſubtangens ſit $MS=s$, ſubtangens alterius ſit $QT=t$; Ordinatæ PM, RQ in utrâque ſumptæ ſint æquales dicanturque y; ſint ordinatæ BA & DC æquales unitati; abſciſſa AM dicatur x, & CQ, z; dico fore $s:t=x:z$. Dividatur AM in partes infinitè parvas dx, quarum numerus (infinitus) dicatur n. In totidem partes dz dividatur CQ, & concipiantur ordinatæ in omnes diviſiones erectæ, illæ ordinatæ erunt in progreſſione Geometri-



eâ in utroque intervallo, sitque p m secundus terminus primæ progressionis, & q r secundus terminus progressionis alterius, erit in primâ $PM:BA=PM^{n-1}:pm^{n-1}$, in secunda $RQ:DC=RQ^{n-1}:rq^{n-1}$, ex natura progressionis Geometricæ, & quia tres priores termini harum proportionum ex hypothesi sunt æquales; æquales etiam erunt pm^{n-1} & rq^{n-1}, ideóque $pm=rq$, & $PM-pm=RQ-rq$, differentiæ ergo proximarum ordinatarum sunt æquales, dicanturque dy. Est autem in prima Logarithmica (per Probl. 1. n. 37.) $y:s=ndy:ndx$ sive x, & alternando $y:ndy=s:x$; in secunda $y:t=ndy:ndz$ sive z, & alt. $y:ndy=t:z$, est ergo $s:x=t:z$ sive $s:t=x:z$. Q. E. D.

Cor. 1. Hinc liquet quod (manente unitate) logarithmicæ quarum eædem erunt Subtangentes, in omnibus erunt æquales, quippe si sumantur in iis æquales ordinatæ abscissæ etiam æquales erunt.

Cor. 2. Logarithmicæ vero diversæ speciei dicentur, quarum subtangentes erunt diversæ; & Logarithmi diversæ speciei dicentur, ubi eisdem quantitatibus Logarithmi diversi respondebunt, unde etiam Logarithmicæ ad quas pertinent diversæ illæ Logarithmorum species, habebunt diversas subtangentes (per hoc Theor.) ideoque erunt diversæ speciei.

38. v. gr. cum

Cor. 3. *Datis Logarithmis cujusvis speciei, Logarithmi alius speciei eisdem numeris respondentes inveniri possunt, si dentur subtangentes utriusque speciei;* Hinc si dentur Logarithmi quorum subtangens est unitas (qui Hyperbolici dicuntur), sitque data subtangens alius speciei .4342944 multiplicentur Logarithmi dati per hunc numerum, habebunturque eorumdem numerorum Logarithmi in hac alterâ specie, ut liquet ex hoc Theor. Ideoque in posterum per hanc expressionem L. x, Intelligemus Logarithmum Hyperbolicum quantitatis x, qui si multiplicetur per quantitatem quamlibet ut a, a L. x exprimet Logarithmum x ex eâ specie depromptum quæ habet a pro subtangente, est enim $1:a=$ L. x ad eum Logarithmum qui ergo erit a L. x.

39. *Probl. II. Data ordinatâ Logarithmicæ & ejus abscissâ, invenire ejus subtangentem, dummodo alterius cujuslibet Logarithmicæ subtangens sit data.*

Datâ sit subtangens Logarithmicæ P B, Logarithmicæ verò R D datâ sit abscissa C Q & ordinata Q R, quæritur hujus Logarithmicæ subtangens: Quæratur primum abscissa quæ in Logarithmica P B responderet ordinatæ æquali Q R, per Probl. I. sitque ea A M, fiatque ut A M ad C Q ita subtangens data ad quæsitam.

Exemp. In tabulis Logarithmorum, Logarithmus numeri 2. est .3010300. si ergo concipiatur Logarithmica cujus abscissæ sint Logarithmis tabularum æquales, & cujus ordinatæ sint æquales numeris eis Logarithmis correspondentibus, quæraturque ejus Logarithmicæ subtangens; inveniatur in altera Logarithmica cujus subtangens est unitas abscissa respondens ordinatæ quæ sit unitatis dupla (per Cor. 2. Prob. I.) quæ est .6931472. fiatque ut .6931472. ad .3010300. Ita unitas ad subtangentem Logarithmicæ tabularum quæ invenietur .4342944.

Coroll. Hinc dato Logarithmo alicujus numeri desumpto ex Logarithmica cujus subtangens data est, habebitur ejus numeri

meri Logarithmus in tabulas, dicendo ut subtangens data ad .4342944. ita Logarithmus datus ad ejusdem numeri Logarithmum in Tabulis.

40. Probl. III. *Sit quantitas variabilis, cujus Logarithmus etiam variabilis est, ex ejus quantitatis variabilis fluxione, fluxionem ejus Logarithmi determinare.* Concipiatur Logarithmica ad quam pertinet species Logarithmi quæ assumitur; sit a ejus subtangens, sitque y variabilis proposita, quæ consideretur ut ejus Logarithmicæ ordinata, sitque x ejusdem Logarithmicæ abscissa ei ordinatæ y respondens, erit per naturam Logarithmicæ (n. 36) $y\,dx = a\,dy$ & $dx = \frac{a\,dy}{y}$, sed x est Logarithmus ordinatæ y, ergo dx est ejus differentia, ergo $d\,L.y = \frac{a\,dy}{y}$ hoc est, differentia Logarithmi est differentia variabilis propositæ divisa per ipsam variabilem, & ducta in constantem quæ sit subtangens Logarithmicæ ad quam pertinet species Logarithmi assumpti.

Et è converso, si habeatur hæc fluxio $\frac{a\,dy}{y}$, ejus fluens est Logarithmus ipsius quantitatis y ex eâ Logarithmicâ desumptus cujus subtangens est a.

41. Theor. V. *Spatium Logarithmicum ABPM duabus ordinatis AB, PM arcu BP & abscissâ AM comprehensum, æquale est rectangulo subtangentis & differentiæ ordinatarum.*

Ductâ enim per punctum P tangente PT, compleatur rectangulum TFPM, agatur per B recta EQ, parallela TM, secans TF in E & MP in Q; per m ordinata m p alteri MP infinite propinqua, & per p recta f r parallela TM, occurrens TF in f & MP in r; His positis (ob triangula P r p, PMT similia) erit P r : p r = PM : MT, seu PF, ideóque rectangulum M m p r æquale erit rectangulo PF f r. Quarè si area logarithmica ABPM divisa intelligatur in rectangula innumera ut M p, rectangulum EFPQ divisum erit in totidem rectangula ut F r correspondentibus M p, æqualia, & proindè area logarithmica ABPM æqualis est rectangulo EFPQ. Q. E. D.

Hinc *spatium Logarithmicum ABPM est ut ordinatarum AB, PM differentia* PQ, ob datam subtangentem TM (36).

Trilineum verò logarithmicum BPQ = PQ × MT − AM × BA; & producta AB ut rectæ FP occurrat in C, erit trilineum logarithmicum BPC = AC × CP − CB × MT.

42. Coroll. 1. *Hinc spatium logarithmicum infinitè protensum OOPM, quâ parte logarithmica ad asymptotum MO continuò accedit, duplum est trianguli PTM.* Nam ob distantiam infinitam MO evanescit ordinata AB, fitque spatium OoPM, æquale rectangulo TFPM, sub ordinatâ PM & subtangente MT contento.

43. Cor. 2. *Tangens PT (producta si opus est) secet ordinatam AB in I, & spatium logarithmicum BPC erit ut BI inter logarithmicam & tangentem intercepta.* Nam ob triangulorum TFP, ICP, similitudinem, est TF ad FP, (seu AC ad MT) ut CI ad CP, & ideò AC × CP = MT × CI. Quarè (41) trilineum BPC = AC × CP − MT × CB = MT × CI − MT × CB = MT × BI. Est igitur, ob datam MT, trilineum BPC ut BI.

44. Theor. VI. *Asymptotis orthogonalibus CH, CD descripta sit hyperbola QqG, & per punctum D in asymptoto CD datum, logarithmica DpP axem habens CH productum; per punctum D agatur ad hyperbolam ordinata DG, & per punctum alterum quodvis N ordinata NQ quæ producta logarithmicæ occurrat in P; erit area hyperbolica NQGD, ad dignitatem hyperbolæ seu ad rectangulum CD × DG, in ratione rectæ NP ad subtangentem logarithmicæ.*

Agatur enim altera q p ipsi QP infinitè

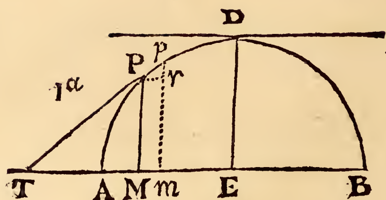
44.

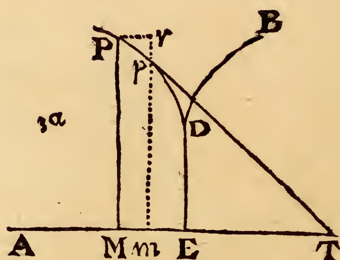
tè propinqua, ex punctis p, P demittantur ad axem CT perpendiculum pm secans QP in r & perpendiculum PM; PT tangat logarithmicam in P; erit ob triangula prP, PMT similia, pr (seu Nn): Pr = PM (seu CN): MT, & (ex naturâ hyperbolæ per theor. 4. de hyp. lib. 1.) NQ : DG = CD : CN; ideóque per compositionem rationum & ex æquo NQ × Nn : Pr × DG = CD : MT; Quarè ob datas CD & MT, summa omnium rectangulorum NQ × Nn, in quæ dividi potest area NQGD, hoc est, hæc area ipsa est ad rectangulum sub datâ GD, & summâ omnium Pr, seu totâ rectâ NP, ut CD ad MT, proindéque NQGD × MT = NP × GD × CD, & hinc NQGD : GD × CD = NP : MT. Q. E. D.

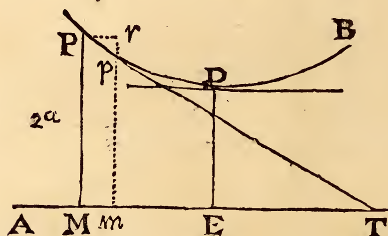
45. Coroll. *Hinc* (ob datas MT, GD, CD) *area hyperbolica NQGD & proindè sector CGQ ipsi æqualis* (377. lib. 1.) *est ut recta NP productio ordinatæ QN, inter asymptotum hyperbolæ CD & logarithmicam intercepta.*

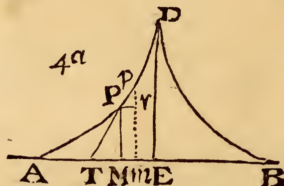
46. Scholium. Cum Ill. Marchio Polenus in Epistolâ ad Hermannum Patavii an. 1729. editâ, ità facilem & expeditam logarithmicæ descriptionem organicam, pro ingenii sui sagacitate invenerit, ut curva illa sectionibus conicis haud difficilius construatur, cumque logarithmica per lineas rectas id præstet quod hyperbola per sectores vel quadrilatera sua, in problematum constructionibus quæ per areas hyperbolicas absolvuntur, loco hyperbolæ non malè usurparetur logarithmica; quamvis si problema ad merum calculum reducatur, æquè benè possint usurpari spatia hyperbolica, quam abscissæ logarithmicæ. Quomodo autem constructiones quæ per spatia hyperbolica fiunt, ad logarithmicam transferantur, pluribus exemplis ostendemus deinceps.

DE MOTU CORPORUM.









De Maximis & Minimis.

47. Theor. *Si quantitas variabilis,* (quam exponat recta PM curvæ PDB ordinata) *ad certum usque terminum D continuò crescat & posteà decrescat, vel contrà decrescat primùm & deindè crescat.* Actaque sit altera ordinata pm priori PM infinitè propinqua, & per punctum P recta Pr abscissæ AP parallela secans pm in r, *ratio incrementi vel decrementi evanescentis pr ordinatæ PM, ad incrementum evanescens Mm abscissæ AM in puncto D ubi ordinata MP omnium maxima vel minima evadit, infinita est vel nulla.*

Per punctum P ducatur PT tangens curvam in P, & abscissæ occurrens in T, & propter similitudinem triangulorum prP PMT, erit pr ad Pr, seu Mm ut PM ad MT. Sed si coincidente puncto P cum D, tangens PT evadat abscissæ AE parallela & proindè MP fiat maxima vel minima ordinata ED ut in figurâ 1ª. & 2ª. punctum T in infinitum abit, & ideò ratio PM ad MT seu ratio pr ad Mm nulla est. Contrà verò si coincidente P cum D, tangens PT cum ordinatâ maximâ vel minima DE conveniat, ut in figurâ 3. & 4. evanescit subtangens MT & ratio PM ad MT, sive pr ad Mm infinita evadit.

48. Coroll. 1. Ut ex datâ æquatione inter abscissam AM & ordinatam MP, inveniatur valor abscissæ AE cui maxima vel minima applicata ED ordinatur, sumenda est æquationis fluxio, & ratio fluxionis ordinatæ ad fluxionem abscissæ, seu ratio pr ad Mm, eaque vel infinito vel nihilo æquanda est, aut quod idem est, factâ Mm constante, fluxio ordinatæ vel infinito vel nihilo æqualis supponenda.

49. Corol. 2. Si quantitas variabilis cujus maximum vel minimum quæritur non sit ordinata curvæ, potest illa supponi æqualis ordinatæ curvæ alicujus in datam quantitatem ductæ, uti si proposita esset quantitas variabilis $ax^2 - x^3$ in quâ a data est, x indeterminata, ponetur $ax^2 - x^3 = bby$, quæ est æquatio ad curvam cujus abscissa est x, & ordinata y, & hinc, sumptis fluxionibus, foret $2axdx - 3x^2dx = bbdy$, & $2ax - 3x^2 = \frac{bbdy}{dx} = 0$ adeóque $2ax - 3xx = 0$ & $x = \frac{2}{3}a$. Si itaque loco x substituatur $\frac{2}{3}a$ in quantitate propositâ, obtinebitur maximum ejus $\frac{4}{9}a^3 - \frac{8}{27}a^3 = \frac{4}{27}a^3$. Idem inventum fuisset brevius, si nullâ factâ suppositione, fluxio variabilis propositæ videlicet $2axdx = 3x^2dx$, nihilo fuisset æquata.

PRO-

PROPOSITIO I. THEOREMA I.

Corporis, cui resistitur in ratione velocitatis, motus ex resistentiâ amissus est ut spatium movendo confectum.

NAM cum motus singulis temporis particulis æqualibus amissus sit ut velocitas, hoc ([a]) est, ut itineris confecti particula, erit, componendo, motus toto tempore amissus ut iter totum. *Q. E. D.*

Corol. Quare si corpus, gravitate omni destitutum, in ([b]) spatiis liberis sola vi insitâ moveatur; ac detur tum motus totus sub initio, tum etiam motus reliquus post spatium aliquod confectum: ([c]) dabitur spatium totum quod corpus infinito tempore describere potest. Erit enim spatium illud ad spatium jam descriptum, ut motus totus sub initio ad motus illius partem amissam.

LEMMA I.

Quantitates differentiis suis proportionales sunt continuè proportionales.

Sit A ad A−B ut B ad B−C & C ad C−D, &c. & convertendo fiet A ad B ut B ad C & C ad D, &c. *Q. E. D.*

PRO-

(a) * *Hoc est, ut itineris confecti particula* (12) ob datum temporis momentum (ex hyp.).

(b) * *In spatiis liberis*, id est, in quibus nullum aliud est obstaculum præter medii resistentiam velocitati proportionalem.

(c) * *Dabitur spatium totum quod corpus infinito tempore describere potest*, hoc est, usque ad motus exstinctionem. (Ostendetur autem infra, in nota f, infinitum tempus requiri ut motus omnis extinguatur, quando resistitur motui in ratione velocitatis). Cum ergo motus ad exstinctionem usque amissus, sit ipse motus totus, & motus amissi sint ut spatia movendo confecta (per Theor.) erit motus totus ad motus partem amissam post datum spatium descriptum, ut spatium ad exstinctionem usque motus descriptum ad illud datum spatium. Unde liquet spatium quod corpus ad motus usque exstinctionem describit finitum esse, cum datam habeat rationem ad spatium finitum.

De Motu Corporum.

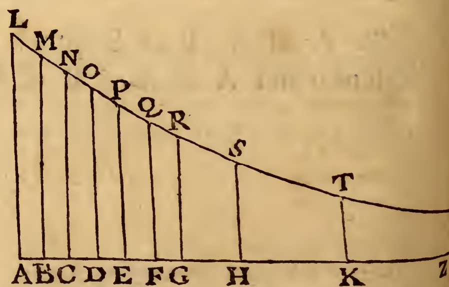
PROPOSITIO II. THEOREMA II.

Si corpori resistitur in ratione velocitatis, & idem solâ vi insitâ per medium similare moveatur, sumantur autem tempora æqualia: velocitates in principiis singulorum temporum sunt in progressione geometricâ, & spatia singulis temporibus descripta sunt ut velocitates.

Cas. 1. Dividatur tempus in particulas æquales; & si ipsis particularum initiis agat vis resistentiæ impulsu unico, quæ sit ut velocitas: (d) erit decrementum velocitatis singulis temporis particulis ut eadem velocitas. Sunt ergo velocitates differentiis suis proportionales, & propterea (per lem. 1. lib. II.) continuè proportionales. (e) Proinde si ex æquali particularum numero componantur tempora quælibet æqualia, erunt velocitates ipsis temporum initiis, ut termini in progressione continuâ, qui per saltum capiuntur omisso passim æquali termino-

(d) * *Erit decrementum velocitatis.* (15) ut resistentia ob datum temporis momentum, ideoque (per hyp.) ut velocitas.

(e) 50. *Proinde si ex æquali* &c. Linea recta AZ in particulas æquales AB, BC, CD &c. divisa, exponat tempus, & perpendicula AL, BM, CN &c. exponant velocitates ipsis singulorum temporum AB, BC, CD &c. initiis; erunt (ex Dem.) velocitates illæ in continuâ progressione geometricâ decrescente. Proinde si ex æquali particularum numero componantur tempora quælibet æqualia, ut AE, EH, HK &c. erunt velocitates AL, EP, HS &c., ipsis temporum initiis ut termini qui è progressione geometricâ per saltum capiuntur, omisso passim æquali terminorum intermediorum BM, CN &c. & FQ, GR &c. numero. Componuntur autem horum terminorum AL, EP, HS &c., rationes ex æqualibus rationibus terminorum intermediorum æqualiter repetitis; nimirum ratio AL ad EP, componitur ex rationibus AL ad BM, BM ad CN &c., quæ tum magnitudine, tum nu-

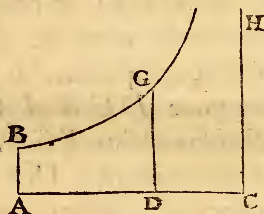


mero æquales sunt rationibus EP ad FQ, FQ ad GR &c. ex quibus componitur ratio EP ad SH, & ità porrò. Quarè ratio AL ad EP æqualis est rationi EP ad HS, & hæc æqualis rationi HS ad KT. Manifestum autem est (33) curvam LMNST, ad quam terminantur perpendicula omnia AL, BM, CN &c., esse Logarithmicam.

* Nam.

norum intermediorum numero. Componuntur autem horum terminorum rationes ex rationibus inter ſe iiſdem terminorum intermediorum æqualiter repetitis, & propterea eæ quoque rationes compoſitæ inter ſe eædem ſunt. Igitur velocitates, his terminis proportionales, ſunt in progreſſione geometricâ. Minuantur jam æquales illæ temporum particulæ; & augeatur earum numerus in infinitum, eò ut reſiſtentiæ impulſus reddatur continuus; & velocitates in principiis æqualium temporum, ſemper continuè proportionales, erunt in hoc etiam caſu continuè proportionales. *Q. E. D.*

Caſ. 2. Et diviſim velocitatum differentiæ, hoc eſt, earum partes ſingulis temporibus amiſſæ, ſunt ut totæ: ſpatia autem ſingulis temporibus deſcripta ſunt ut velocitatum partes amiſſæ (per prop. I. lib. II.) & propterea etiam ut totæ. *Q. E. D.*



Corol. Hinc ſi aſymptotis rectangulis *AC*, *CH* deſcribatur hyperbola *BG*, ſintque *AB*, *DG* ad aſymptoton *AC* perpendiculares, & exponatur tum corporis velocitas tum reſiſtentia medii, ipſo motus initio, per lineam quamvis datam *AC*, elapſo autem tempore aliquo per lineam indefinitam *DC*: exponi poteſt tempus per aream *ABGD*, & ſpatium eo tempore deſcriptum per lineam *AD*. (f) Nam ſi area illa per motum puncti *D* augeatur uniformiter ad modum temporis, decreſcet recta *DC* in ratione geometricâ ad modum velocitatis, & (g) partes rectæ *AC* æqualibus temporibus deſcriptæ decreſcent in eâdem ratione.

PRO-

(f) * *Nam ſi area illa per motum puncti D* ſive ordinatæ DG *augeatur uniformiter ad motum temporis*, exhibeatque proindè tempus, *decreſcet recta DC, in ratione geometricâ* (380. lib. I.) *ad modum velocitatis*, & ideò velocitatem poterit exponere (per caſ. I. Dem.) & quia recta AC exponit velocitatem ipſo motûs initio, & DC, velocitatem reſiduam elapſo tempore ABGD erit AD ut velocitas amiſſa, atque ideò ut ſpatium deſcriptum (per prop. I. hujus). Quia verò coincidentibus punctis D & C, area ABGD infinita evadit, manifeſtum eſt tempore infinito finitum ſpatium AC deſcribi. 50.

(g) * *Et partes rectæ AC æqualibus*

De Motu Corporum.

PROPOSITIO III. PROBLEMA I.

Corporis, cui, dum in medio similari rectà ascendit vel descendit, resistitur in ratione velocitatis, quodque ab uniformi gravitate urgetur, definire motum.

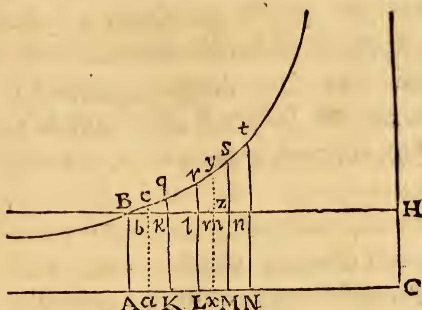
Corpore ascendente, exponatur gravitas per datum quodvis rectangulum *BACH*, & resistentia medii initio ascensus per rectangulum *BADE* sumptum ad contrarias partes rectæ *AB*. Asymptotis rectangulis *AC*, *CH*, per punctum *B* describatur hyperbola secans perpendicula *DE*, *de* in *G*, *g*; & corpus ascendendo tempore *DGgd* describet spatium *EGge*, tempore *DGBA* spatium ascensus totius *EGB*; tempore *ABKI* spatium descensus *BFK*, atque tempore *IKki* spatium descensus *KFfk*; & velocitates corporis (resistentiæ medii proportionales) in horum temporum periodis erunt *ABED*, *ABed*, nulla, *ABFI*, *ABfi* respectivè; atque maxima velocitas, quam corpus descendendo potest acquirere, erit *BACH*.

Re-

temporibus descriptæ decrescent in eâdem ratione &c. Nam si area ABGD ductis ordinatis FE, LK in partes æquales ABFE, EFLK, KLGD divisa fit, erunt lineæ CA, CE, CK, CD in progressione geometricâ decrescente (380. lib. 1.) hoc est CA : CE = CE : CK = CK : CD, & dividendo AE : EK = EK : KD = CA : CE. Decrescunt ergo partes rectæ AC in ratione velocitatis. Exponent igitur rectæ AE, EK, KD &c., spatia temporibus ABFE, EFLK, KLGD, descripta, & tota recta AD spatium toto tempore ABGD descriptum.

* Re-

LIBER SECUND. SECTIO I. PROP. III. PROBL. I.



(h) Resolvatur enim rectangulum *BACH* in rectangula innumera *Ak*, *Kl*, *Lm*, *Mn*, &c. quæ sint ut incrementa velocitatum æqualibus totidem temporibus facta; & erunt nihil, *Ak*, *Al*, *Am*, *An*, &c. ut velocitates totæ, atque ideo (per hypothesin) ut resistentiæ medii principio singulorum temporum æqualium. (i) Fiat *AC* ad *AK* vel *ABHC* ad *ABkK* ut vis gravitatis ad resistentiam in principio temporis secundi, deque vi gravitatis subducantur resistentiæ, & manebunt *ABHC*, *KkHC*, *LlHC*, *MmHC*, &c. ut vires absolutæ quibus corpus in principio singulorum temporum urgetur, atque ideo (per motus legem II.) ut incrementa velocitatum, id est, ut rectangula *Ak*, *Kl*, *Lm*, *Mn*, &c. & (k) propterea (per lem. I. lib. II.) in progressione geometricâ. Quare si rectæ *Kk*, *Ll*, *Mm*, *Nn*, &c. productæ occurrant hyperbolæ in *q*, *r*, *s*, *t*, &c. erunt areæ *ABqK*, *KqrL*, *LrsM*, *MstN*, &c. (l) æquales, ideoque tum temporibus tum viribus gravitatis semper æqualibus analogæ. (m) Est autem area *ABqK* (per corol. 3. lem. VII. & lem VIII. lib. I.) ad aream *Bkq* ut *Kq* ad $\frac{1}{2}$ *kq* seu *AC* ad $\frac{1}{2}$ *AK*, hoc

(h) * *Resolvatur enim &c.* Demonstratio quæ sequitur est pro corporis descensu.

(i) * *Fiat AC ad AK &c.* Cum enim sit A K k B, proportionalis resistentiæ principio temporis secundi, si fiat A K k B ad A B H C seu A K ad A C, ut resistentia illa ad gravitatem, rectangulum A H exponet vim gravitatis datam; & simili modo, cum sit A l, ad A k, ut resistentia initio temporis tertii ad resistentiam initio temporis secundi, erit, ex æquo perturbate A l ad A H, seu A L ad A C, ut resistentia in principio temporis tertii ad gravitatem & ita deinceps. Quoniam verò gravitas motum corporis cadentis accelerat quem resistentia retardat, de vi gravitatis auferenda est vis resistentiæ ut habeatur vis absoluta quâ corpus deorsum urgetur. 50.

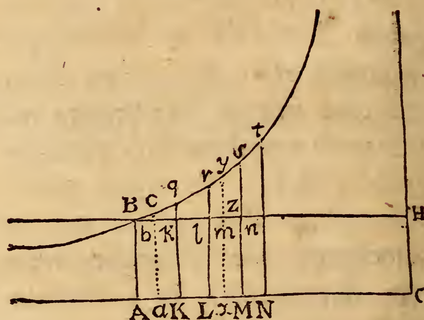
(k) * *Et propterea.* Rectangula ABHC, KkHC, LlHC &c. differentiis suis A k, K l &c., proportionalia, erunt in progressione geometricâ (per Lem. I. lib. 2.)

(l) * *Æquales.* (380) lib. I.)

(m) *Est autem area ABqK (per cor. 3. Lem. VII. & lem. VIII lib. I.) ad aream Bkq ut Kq ad $\frac{1}{2}$ kq seu ut AC ad $\frac{1}{2}$ AK.* Etenim per ea Lemmata has areas pro re-

De Motu Corporum.

hoc eſt, ut vis gravitatis ad reſiſtentiam in medio temporis primi. Et (n) ſimili argumento areæ *qKLr*, *rLMs*, *sMNt*, &c. ſunt ad areas *qklr*, *rlms*, *smnt*, &c. ut vires gravitatis ad reſiſtentias in medio temporis ſecundi, tertii, quarti, &c. Proinde cum areæ æquales *BAKq*, *qKLr*, *rLMs*, *sMNt*, &c.



ctilineis ſumi poſſe conſtat, erigatur in medio partis A K perpendicularis a c ad Hyperbolam uſque, facile conſtabit ex Elementis trapezium A B q K fore ad Triangulum B k q ut tota ea perpendicularis a c (pro quâ K q ſumi poterit) ad portionem ejus b c intrà Triangulum comprehenſam, quæ erit (ex conſt. & 2â. 6ti. Elem.) $= \frac{1}{2}$ k q, eſt verò ex natura Hyperboles ea perpendicularis a c ad A B, ut A C ad C a ſive A C $- \frac{1}{2}$ A K & dividendo, eſt ea perpendicularis a c ad a c $-$ a b ſive b c quæ eſt $\frac{1}{2}$ k q ut A C ad A C $-$ A C $+ \frac{1}{2}$ A K ſive $\frac{1}{2}$ A K; Ergo area A B q K eſt ad aream B q k ut A C ad $\frac{1}{2}$ A K, ſive ut Rectangulum A B C H ad Rect. $\frac{1}{2}$ A B k K, ſeu *ut vis gravitatis* quam exponit Rectang. A H ad *reſiſtentiam in medio temporis primi* quam exponit rectang. A k, cum enim ſit A k ut velocitas toto primo tempore acquiſita, erit $\frac{1}{2}$ A k ut velocitas in medio temporis primi acquiſita, reſiſtentiæ autem ſunt velocitatibus analogæ.

(n) *Et ſimili argumento areæ.* Sumptis enim iſtis areis pro Trapeziis rectilineis: ducantur perpendiculares x z y in medio partium A K, K L, L M, M N ad Hyperbolam uſque, & (ex elementis) facile conſtabit quod area tota ſinguli trapezii (v. gr. r L M s) eſt ad ejus areæ portionem ſupra B H poſitam (nempe r l m s) ut linea tota x y per medium trapezii ducta ad ejus partem z y ſupra B H, ſed ex naturâ Hyperbolæ eſt ea perpendicularis x y ad A B ſive x z, ut A C ad abciſſam C x illi perpendiculari reſpondentem (quæ eſt C L $- \frac{1}{2}$ L M), & dividendo, eſt ea perpendicularis x y ad ejus partem z y ſupra B H, ut A C ad A x portionem abſciſſæ inter A & eam perpendicularem (hoc eſt, in exemplo aſſumpto, ut A C ad A L $+ \frac{1}{2}$ L M). Ergo area tota ſinguli trapezii ad ejus areæ portionem ſupra BH, ut AC ad A x portionem abſciſſæ inter A & medium partis cujuſvis aſſumptæ, ſive (aſſumpta communi altitudine AB) ut Rectangulum AH, ad Rectangulum ſub A B & lineâ inter A & medium partis aſſumptæ comprehenſa; ſed illud eſt ut vis gravitatis, hoc ut velocitas ac proinde ut reſiſtentia in medio temporis cui reſpondet pars aſſumpta, ergo alternando, area ſinguli trapezii eſt ad vim gravitatis ut portio trapezii ſupra B H ad reſiſtentiam ſive ad velocitatem in medio temporis cui reſpondet trapezium, ſed areæ totæ trapeziorum ſunt ubique æquales & vis gravitatis ſemper eadem, conſtans ergo eſt eorum ratio, ergo, portiones trapeziorum ſuper B H. ut r l m s ſunt ſicut reſiſtentiæ ſive ut velocitates, adeoque ut ſpatia ſingulis tempuſculis quibus reſpondent deſcripta.

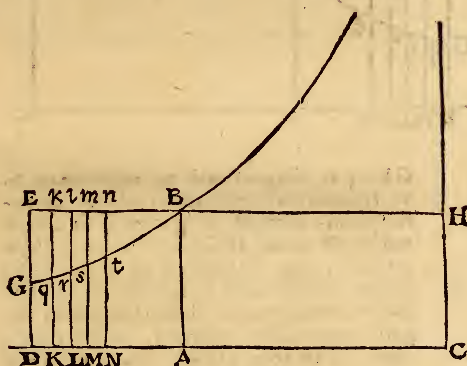
* Ar-

&c. ſint viribus gravitatis analogæ, erunt areæ *Bkq*, *qklr*, *rlms*, *smnt*, &c. reſiſtentiis in mediis ſingulorum temporum, hoc eſt (per hypotheſin) velocitatibus, atque (o) ideo deſcriptis ſpatiis analogæ. Sumantur analogarum ſummæ, & erunt areæ *Bkq*, *Blr*, *Bms*, *Bnt*, &c. ſpatiis totis deſcriptis analogæ; necnon areæ *ABqK*, *ABrL*, *ABsM*, *ABtN*, &c. temporibus. Corpus igitur inter deſcendendum, tempore quovis *ABrL*, deſcribit ſpatium *Blr*, & tempore *LrtN* ſpatium *rlnt*. *Q. E. D.* Et (p) ſimilis eſt demonſtratio motus expoſiti in aſcenſu. *Q. E. D.*

Co-

(o) * *Atque ideò deſcriptis ſpatiis analogæ.* Spatia enim ſingulis temporibus deſcripta ſunt ut velocitates per Prop. II. hujuſce libri.

(p) *Et ſimilis eſt demonſtratio.* Reſolvatur enim rectangulum D B in rectangula innumera DK, Kl, Lm, Mn &c. quæ ſint ut decrementa velocitatum æqualibus totidem temporibus facta, & erunt, nihil Dk, Dl, Dm, Dn &c., ut velocitates totæ amiſſæ in principio ſingulorum temporum æqualium. Quia igitur totum rectangulum D B, exponit (per hyp.) velocitatem corporis & reſiſtentiam medii velocitati proportionalem initio aſcenſus, rectangula AE, Ak, Al, Am, An &c., exponent velocitates reſiduas, reſiſtentiaſque medii initio ſingulorum temporum æqualium. Fiat AC, ad Ak, ſive Rectang. AH ad Rectang. Ak, ut vis gravitatis ad reſiſtentiam principio temporis ſecundi, & vi gravitatis addatur reſiſtentia (quod gravitas & reſiſtentia corporis aſcendentis motum retardent) & erunt DEHC, KkHC, LlHC, MmHC &c., ut vires abſolutæ quibus corpus in principio ſingulorum temporum retardatur, atque ideò (per mot. leg. 2.) vel per not. 18.) ut decrementa velocitatum, id eſt, ut rectangula Dk, Kl, Lm, Mn &c., & propterea (per Lem. 1. Lib. 2.) in progreſſione geometricâ. Quare ſi rectæ Kk, Ll, Mm, Nn &c., occurrant hyperbolæ in q, r, s, t, &c. erunt areæ DGqk, kqrL, LrsM, MstN &c. æquales, ideoque tum temporibus, tum viribus gravitatis ſemper æqualibus analogæ.



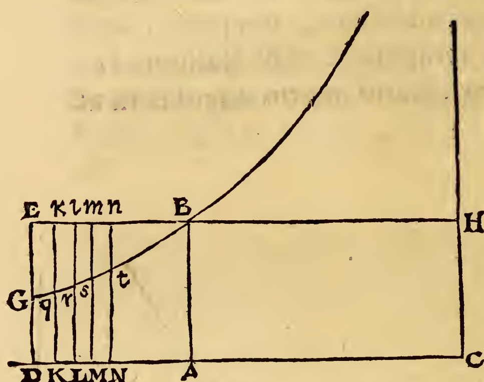
Erigatur in medio partis DK perpendicularis uſque ad EB, erit area DGqK ad aream GEkq ut pars ejus perpendicularis ad Hyperbolam ordinata ad ejus partem reliquam uſque ad EB, ſed (per Theor. 4. de Hyperbola), ea ordinata ad Hyperbolam eſt ad AB ſive ad totam perpendicularem, ut AC ad ejus ordinatæ abſciſſam, ideoque dividendo, eſt ea ordinata ad perpendicularis partem reliquam uſque ad lineam EB, ſive eſt area DGqK ad aream GEKq ut AC ad portionem abſciſſæ inter A & perpendicularem, & aſſumptâ communi altitudine AB, ut Rectangulum AH ad Rectangulum ſub AB & portione abſciſſæ inter A & perpendicularem, ideoque area DGqK ad aream 50.

GEkq

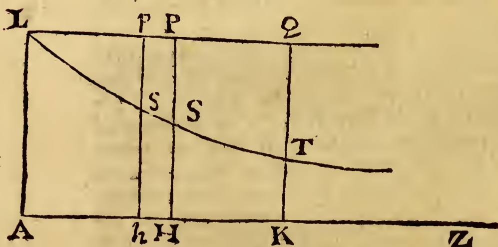
DE MOTU CORPORUM.

Corol. 1. Igitur velocitas maxima, quam corpus cadendo poteſt acquirere, eſt ad velocitatem dato quovis tempore acquiſitam, ut vis data gravitatis, quâ corpus illud perpetuò urgetur, ad vim reſiſtentiæ, quâ (q) in fine temporis illius impeditur.

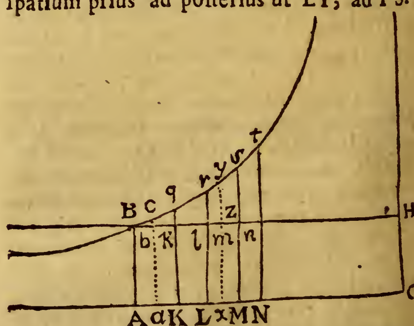
Co-



G E k q ut vis gravitatis ad reſiſtentiam ſive velocitatem reſiduam in medio temporis primi, cumque vis gravitatis ſit ubique eadem & areæ D G q K, q K L r, ubique æquales, areæ G E k q, k q r l, &c. erunt ſemper ut reſiſtentiæ in ſingulis temporibus ſive ut velocitates, ideoque ut ſpatia ſingulis tempuſculis deſcripta, ac per conſequens areæ totæ G E n t, erunt ut ſpatia toto tempore G D N t deſcripta, dum areæ A B N n erunt ut velocitates in fine eorum temporum reſiduæ.



51. Si aſymptoto A Z deſcripta ſit Logarithmica quævis L S T, ad aſymptotum verſus Z accedens, & ordinata A L exponat velocitatem corporis initio motûs, abſciſſæque A H, A K, exponant tempora; erunt (50) ordinatæ H S, K T, ut velocitates reſiduæ elapſis temporibus A H, A K, & ideò ductâ per punctum L rectâ L Q, aſymptoto A Z parallelâ, & ordinatas productas H S, K T ſecante in P, Q, erunt P S, Q T ut velocitates amiſſæ, atquè etiam ut ſpatia deſcripta, temporibus A H, A K, vel L P, L Q. Ductâ ordinatâ, h s, alteri H S, infinite propinquâ, ſpatium velocitate uniformi A L, tempuſculo h H deſcriptum in vacuo, erit ad ſpatium eodem tempore cum velocitate H S, confectum in medio reſiſtente, ut rectangulum H P × H h, ad rectangulum S H × H h, ſeu aream H S s h (12) & ideò ſi totum tempus A H in particulas innumeras ut h H diviſum ſit, erit ſpatium cum velocitate A L, in vacuo deſcriptum toto tempore A H, ad ſpatium eodem tempore percurſum in medio reſiſtente ut rectangulum A P ad aream Logarithmicam A L S H; ſed area A L S H, æqualis eſt rectangulo ſubtangentis Logarithmicæ in P S, (39) & ideò ſi aſſumpta ſit A L ſubtangenti æqualis, eſt area A L S H, æqualis rectangulo A L × P S; Quare in hâc hypotheſi, erit ſpatium prius ad poſterius ut L P, ad P S.



(q) * *In fine temporis illius impeditur.* Eſt enim velocitas dato tempore, A B t L acquiſita, ad velocitatem alio quovis tempore A B t N acquiſitam, ut rectangulum A l ad re-

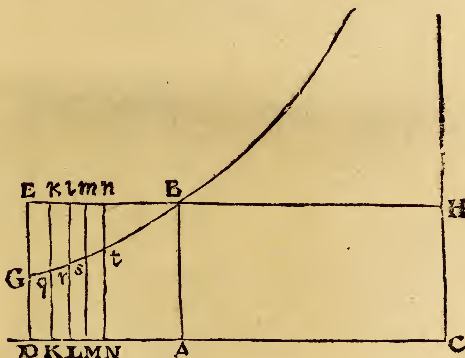
Corol. 2. Tempore autem aucto in progressione arithmeticâ, summa velocitatis illius maximæ ac velocitatis in ascensu, atque etiam earundem differentia in descensu (r) decrescit in progressione geometricâ.

Corol. 3. (s) Sed & differentiæ spatiorum, quæ in æqualibus

rectangulum A n, sive ut linea data AL, ad lineam A N, (ex dem.), & ideò velocitas corporis cadentis cum areâ A B t N, seu cum tempore continuò crescit. Sed coincidentibus puncto N cum puncto C & ordinatâ N t cum asymptoto C H, area A B t N infinita evadit, hoc est, tempus fit infinitum & velocitas maxima; Quare velocitas maxima quæ etiam *terminalis* dicitur, est ad velocitatem dato quovis tempore A B r L, acquisitam ut A C ad A L, seu ut rectangulum A H, ad rectangulum A l, hoc est, (ex dem.) ut vis gravitatis ad vim resistentiæ in fine temporis A B r L.

(r) * *Decrescit in progressione geometricâ.* In ascensu corporis temporibus D G q k, D G r l, D G s M &c. in arithmeticâ progressione crescentibus, abscissæ C D, C K, C L, &c. in progressione geometricâ decrescunt (380. lib. 1.) sed singulæ abscissæ illæ sunt (ex dem.) ut summa velocitatis maximæ quam exponit linea C A, & velocitatis residuæ quam exponit linea A K vel A L, vel A M &c., in fine temporis D G q k, vel D G r L, vel D G s M &c. Quare tempore aucto in progressione arithmeticâ, summa velocitatis maximæ ac velocitatis in ascensu residuæ decrescit in progressione geometricâ. Simili modo in descensu corporis patet quod crescentibus temporibus (vid fig. notæ super.) A B q k, A B r L, ABsM &c., in progressione arithmeticâ, abscissæ C A, CK, CL, C M &c., decrescunt in progressione geometricâ (380. lib. 1.), sed abscissæ illæ sunt ut differentiæ velocitatis maximæ quam exhibet linea A C & velocitatis acquisitæ quam exponit linea A K, vel A L, vel A M &c., crescente igitur tempore in progressione arithmeticâ, differentia velocitatis maximæ, & velocitatis dato quovis tempore in descensu acquisitæ, decrescit in progressione geometricâ. Hinc si summa illa in ascensu & differentia in descensu numeris exprimantur, erunt tempora ut eorum numerorum Logarithmi.

(s) * *Sed & differentiæ spatiorum.* Nam si in ascensu corporis capiantur tempora D G q K, K q r L, L r s M, M s t N &c. æqualia, erit spatium primo tempore descriptum ut G E k q = D K × D E − D G q K; spatium tempore secundo descriptum ut q k l r = K L × D E − K q r L (sive quia K q r L = DG q K) = KL × DE − D G q K, & ita de cæteris. Quare differentia spatiorum primo & secundo tempore descriptorum est ut D K × D E − K L × D E, id est, ob datam D E, ut D K − K L; & simili argumento differentia spatiorum secundi & tertii temporis est ut 51.



K L − L M; differentia spatiorum tertii & quarti temporis ut L M − M N. Erunt igitur differentiæ spatiorum quæ in æqualibus temporum differentiis describuntur ut differentiæ D K − K L, K L − L M, L M − M N &c., sed (ex dem.) termini D K, K L, L M, M N &c., decrescunt ut termini progressionis geometricæ D C, K C, L C, M C &c. Ergò differentiæ D K − K L, K L − L M, L M − M N &c., descrecunt ut D K, K L, L M, M N &c., seu ut termini progressionis geometricæ D C, K C, L C, M C &c. Eadem est demonstratio pro descensu.

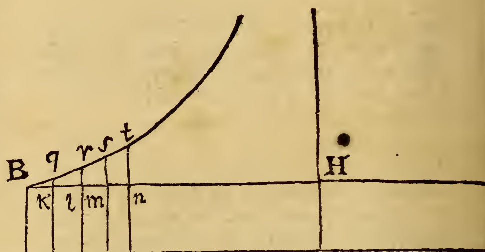
De Motu Corporum.

temporum differentiis defcribuntur, decrefcunt in eâdem progreffione geometricâ.

Corol. 4. Spatium verò à corpore defcriptum differentia eft duorum fpatiorum quorum alterum eft ut tempus fumptum ab initio defcenfus, & (t) alterum ut velocitas, quæ etiam ipfo (u) defcenfûs initio æquantur inter fe. PRO-

(t) * *Alterum ut velocitas.* Nam fpatium tempore quovis A B t N, in defcenfu defcriptum, eft ut area B t n, eft autem area B t n = A B t N − A B n N, & eft A B n N ut velocitas tempore A B t N acquifita.

(u) * *Defcenfûs initio æquantur.* Defcenfûs initio eft area nafcens A B q K æqualis rectangulo A B K k.



52. *Scholium.* Ex demonftratis non folùm corporis afcendentis aut è quiete defcendentis motus determinatur, fed etiam motus ejufdem datâ cum velocitate deorfum projecti facilè inveniri poteft. Nam velocitas projectionis vel æqualis eft velocitati maximæ, quam in figuris fuperioribus exponit linea A C, five rectangulum A H, aut velocitate maximâ minor eft, aut eâ major. Si 1um. motus corporis deorfum verticaliter projecti æquabilis eft, ob refiftentiam gravitati æqualem & contrariam. Si 2um. in lineâ A C (vid. fig. prop. 3.) capiatur A L, ad A C, ut velocitas projectionis data ad maximam, five ut refiftentia ad gravitatem, & tempore quovis L r t N, corpus defcribet, fpatium l r t n, & in fine illius temporis habebit velocitatem L l n N, eodem modo ac fi è quiete cadendo tempore A B r L, acquifiviffet datam projectionis velocitatem A B l L, & deindè in motu perfeveraffet.

53. Verum fi velocitas projectionis major fit velocitate maximâ quam corpus cadendo acquirere poteft, mutanda erit Newtoni conftructio. Cæteris enim manentibus ut in conftructione pro corporum defcenfu, producantur rectæ A C, & B H, ad a & b, ut fit rectangulum A B b a ad rectangulum C H b a, ut refiftentia tota initio motus ad vim gravitatis: velocitas projectionis exponi poterit per rectangulum A B b a, cum refiftentia fit ipfi femper proportionalis, & corpus defcendendo tempore quovis A B t N, defcribet fpatium A B b a × A N + C a × B t n, & velocitatem habebit N n b a, & tempore infinito defcribet fpatium infinitum, velocitatemque habebit æqualem terminali five maximæ velocitati quam corpus e quiete cadendo acquirere poteft. Refolvatur enim rectangulum A H in rectangula innumera A k, K l, L m, M n, &c. quæ fint ut decrementa velocitatum æqualibus totidem temporibus facta. (cum enim refiftentia gravitatem fuperet, velocitas decrefcit) & erunt, nihil A k, A l, A m, A n, &c. ut velocitates amiffæ, & ideò rectangula a B, a k, a l, a m, a n, &c., ut velocitates refiduæ refiftentiis proportionales, principio fingulorum temporum æqualium. Quoniam verò gravitas motum accelerat quem refiftentia retardat, de vi refiftentiæ fubducatur gravitas C H b a, & manebunt rectangula A B H C, K k H C, L l H C, M m H C, &c. ut vires abfolutæ quibus corpus in principio fingulorum temporum æqualium retardatur, atque ideò ut decrementa velocitatum, id eft, ut rectangula A k, K l, L m, M n, & proptereà per Lem. 1. Lib. 2. in progreffione geometricâ. Quare (380. lib. 1.) erunt areæ A B q K, K q r L, L r s M, M s t N, &c. æquales, ideóque temporibus femper æqualibus analogæ. Elapfo igitur tempore quovis A B t N, corporis velocitas refidua erit ut rectangulum N n b a, five ut recta N a, fed fpatia funt ut velocitas & tempus conjunctim, ergo

PROPOSITIO IV. PROBLEMA II.

Posito quod vis gravitatis in medio aliquo similari uniformis sit, ac tendat perpendiculariter ad planum horizontis; definire motum projectilis in eodem, resistentiam velocitati proportionalem patientis.

E loco quovis *D* egrediatur projectile secundum lineam quamvis rectam *DP*, & per longitudinem *D P* exponatur ejusdem velocitas sub initio motus. A puncto *P* ad lineam horizontalem *D C* (x) demittatur perpendiculum *P C*, & secetur *D C* in *A*, ut (y) sit *D A* ad *A C* ut resistentia medii, ex motu in altitudinem sub initio orta, & vim gravitatis; vel (z) (quod perinde est) ut sit rectangulum sub *D A* & *D P* ad rectangulum sub *A C* & *C P* ut resistentia tota sub initio motus ad vim gravitatis. Asymptotis *D C*, *C P* describatur hyperbola quævis *G T B S* secans

ergo spatia singulis tempusculis descripta, sunt ut ea velocitas Na ducta in tempus MstN, id est ut NC×tN×MN+Ca×tN×MN=ABHC×MN+Ca×MstN, (ob NC×tN=AB×CA, per theor. 4. de Hyp.) Quare (componendo) spatium totum tempore ABtN descriptum, erit ut ABHC×AN+Ca×ABtN=ABba×AN+Ca×Btn, ob ABtN=AB×AN+Btn. Q. E. D.

(x) * *Demittatur perpendiculum* PC, & quoniam DP exponit velocitatem projectionis CP exponet velocitatem verticalem, & DC velocitatem horizontalem, per leg. motûs cor. 1. & 2.

(y) * *Ut sit DA ad AC ut resistentia &c.*, aut, quod idem est (per cor. 1. prop. 111.) ut sit DA ad AC ut velocitas verticalis CP ad velocitatem maximam seu terminalem.

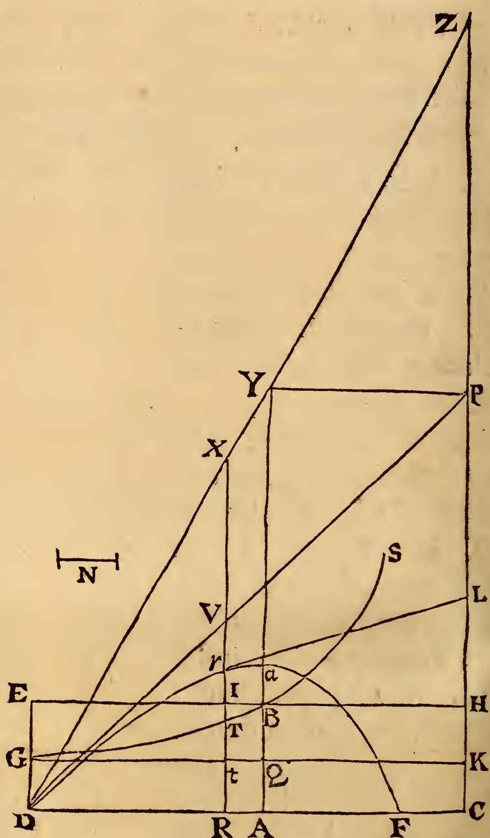
(z) * *Vel (quod perinde est) ut sit rectangulum &c.* Nam cum sit DP ad CP

 ut

53.

De Motu Corporum.

perpendicula DG, AB in G & B; & compleatur parallelogrammum $DGKC$ cujus latus GK ſecet AB in Q. Capiatur linea N in ratione ad QB quâ DC ſit ad CP; & ad rectæ DC punctum quodvis R erecto perpendiculo RT, quod hyperbolæ in T, & rectis EH, GK, DP in I, t & V occurrat; in eo cape Vr æqualem $\frac{tGT}{N}$, vel (a) quod perinde eſt, cape Rr æqualem $\frac{GTIE}{N}$; & projectile tempore $DRTG$ perveniet ad punctum r, deſcribens curvam lineam $DraF$, quam punctum r ſemper tangit, perveniens autem ad maximam altitudinem a in perpendiculo AB, & poſtea ſemper appropinquans ad aſymptoton PC. Eſtque velocitas ejus in puncto quovis r ut curvæ tangens rL. *Q. E. I.*



ut velocitas tota projectionis ad velocitatem verticalem, ac proinde ex lege reſiſtentiæ ut reſiſtentia tota ſub initio ad reſiſtentiam ex motu in altitudinem, & cum ſit D A ad A C ut reſiſtentia medii ex motu in altitudinem ad vim gravitatis (per hypotheſim), erit per compoſitionem rationum & ex æquo D A × D P ad A C × C P ut reſiſtentia tota ex motu projectionis ad vim gravitatis.

(a) * *Vel quod perinde eſt, cape Rr æqualem &c.* Cum enim ſit (per hyp.) $N:QB=DC:CP$, & $DC:CP=DR:RV$, ob triangula ſimilia DRV, DCP; erit $N:QB=DR:RV$, & ideo $RV=\frac{DR\times QB}{N}$. Sed rectangulum $GEIt=Gt\times GE=DR\times QB=GTIE+tGT$, & ideo $\frac{GTIE}{N}=\frac{DR\times QB-tGT}{N}=RV-\frac{tGT}{N}$. Quare ſi capiatur $Vr=\frac{tGT}{N}$, erit $\frac{GTIE}{N}=RV-Vr=Rr$.

* Æqua-

Est enim N ad QB ut DC ad CP seu DR ad RV, ideoque RV æqualis $\frac{DR \times QB}{N}$, & Rr (id est $RV - Vr$ seu $\frac{DR \times QB - tGT}{N}$) (b) æqualis $\frac{DR \times AB - RDGT}{N}$. Exponatur jam tempus per aream $RDGT$, & (per legum corol 2.) distinguatur motus corporis in duos, unum ascensus, alterum ad latus. Et cum resistentia sit ut motus, (c) distinguetur etiam hæc in partes duas partibus motus proportionales & contrarias: ideoque longitudo, à motu ad latus descripta, erit (per prop. II. hujus) ut (d) linea DR, (e) altitudo verò (per prop. III. hujus) ut area $DR \times AB - RDGT$, hoc est, ut linea Rr. Ipso autem motus initio area $RDGT$ (f) æqualis est rectangulo $DR \times AQ$, ideoque linea illa Rr (seu $\frac{DR \times AB - DR \times AQ}{N}$) tunc est ad DR ut $AB - AQ$ seu QB ad N, id est, ut CP ad DC; atque ideo ut motus in altitudinem ad motum in longitudinem sub initio. Cum igitur Rr semper sit ut altitudo, ac DR semper ut longitudo, atque Rr ad DR sub initio ut altitudo ad longitudinem: necesse est

(b) * *Æqualis* $\frac{DR \times AB - RDGT}{N}$ &c. Est enim $\frac{DR \times AB - RDGT}{N} = \frac{DR \times RI - RDGT}{N} = \frac{GTIE}{N} = RV - Vr$.

(c) * *Distinguetur etiam hæc &c.* In eâ, quam tractamus, resistentiæ hypothesi motus componere ac dividere licet eodem modo quo componuntur & dividuntur in vacuo; quod in aliis resistentiæ hypothesibus fieri non potest. Cum enim resistentia velocitati proportionalis est, spatia velocitatibus separatis & conjunctis eodem temporis momento describenda vi resistentiæ minuuntur in eâdem quam habent inter se ratione.

(d) * *Ut linea DR.* Exponitur enim corporis velocitas horizontalis sub motûs initio per lineam DC. Unde tempus exponi poterit per aream hyperbolicam DRGT, & spatium hoc tempore descriptum per lineam DR, per cor. prop. II. hujus.

(e) * *Altitudo vero &c.* Cum enim sit DA ad AC ut resistentia verticalis ad gravitatem (per hyp.); area GTIE, seu ei æqualis $DR \times AB - RDGT$, erit ut altitudo motu verticali descripta (per prop. III. hujus); & quia (per construct.) est $Rr = \frac{DR \times AB - RDGT}{N}$, ideoque ob datum N, R r ut $DR \times AB - RDGT$, erit altitudo ut Rr.

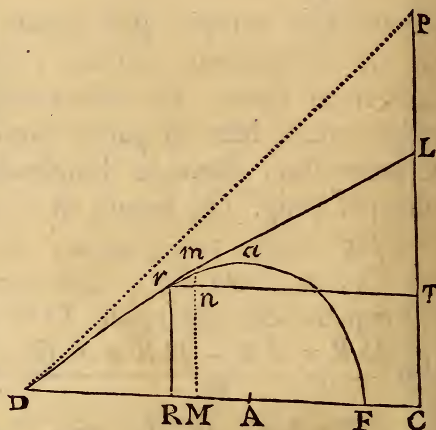
(f) * *Æqualis est rectangulo &c.* Nam coincidente puncto t cum G, evanescit Tt respectu Rt seu AQ, fitque area evanescens RDGT æqualis RDGt seu $DR \times AQ$.

53.

De Motu Corporum.

eſt ut Rr ſemper ſit ad DR ut altitudo ad longitudinem, & propterea ut corpus moveatur in linea $DraF$, quam punctum r (g) perpetuò tangit. *Q. E. D.*

Co-



(g) 54. *Perpetuo tangit.* Quoniam autem D A eſt ad A C ut reſiſtentia ex motu verticali ſub initio orta ad vim gravitatis, tempus totius aſcensûs corporis erit D A B G (per Prop. III. hujus), quo etiam tempore percurrit corpus longitudinem D A, & ideo ad maximam ſuam altitudinem a perveniet ubi erit in perpendiculo A B a, & poſtea ſemper appropinquat ad aſymptoton P C (per Cor. Prop. II). Per punctum quodvis trajectoriæ r agatur r T horizontali D C parallela & verticali C P occurrens in T, verticalis M m ipſi R r infinite propinqua ſecet r T in n & tangentem r L ſeu curvam in m: & quoniam motus corporis in loco r per arcum r m dividi poteſt in motum horizontalem r n & verticalem n m, erit velocitas horizontalis ad verticalem ut r n ad n m, & ad obliquam ſecundum tangentem curvæ ut r n ad r m. Sed ob ſimilitudinem triangulorum r n m, r T L, eſt r n : m n = r T vel R C : T L, & r n : r m = R C : r L. Quare cum R C ſit ut velocitas horizontalis corpori in loco r reſidua ex velocitate D C quam ſub initio motus habebat in loco D (per Cor. Prop. II.); erit T L ut velocitas verticalis corpori reſidua ex velocitate initiali C P, & r L ut velocitas obliqua in arcu r m ex duabus r T & T L compoſita. Eſt itaque velocitas & proinde reſiſtentia corporis in puncto quovis trajectoriæ r ut curvæ tangens r L.

55. Hinc per datum trajectoriæ punctum r duci poteſt tangens r L. Nam velocitas verticalis L T in loco r eſt ad velocitatem verticalem C P in loco D, ut rectangulum R B ad rectangulum D B (vide figuram textûs) ſive ut R A ad D A (per Prop.. II); ideoque $LT = \frac{CP \times RA}{DA}$.

56. Ex ſuperiori conſtructione facile deducitur æquatio ad trajectoriam D r a F. Poſitis enim $DP = b$, $DC = e$, $CP = f$, $AC = g$, $AB = h$, $Rr = y$, & $DR = x$, erit (per theor. 4um. de hyperb. lib. 1.) $DC (e) : AC (g) = AB (h) : GD = \frac{gh}{e}$, & $RC (e-x) : AC (g) = AB (h) : RT = \frac{gh}{e-x}$, ideoque $QB = AB - GD = \frac{eh - gh}{e}$, & areæ hyperbolicæ R D G T elementum naſcens $RT \times dx = \frac{ghdx}{e-x}$, ac proinde area $RDGT = gh. S. \frac{dx}{e-x}$, Præterea (per conſtr.) eſt $CP (f) : DC (e) = QB \frac{(eh - gh)}{e} : N = \frac{eh - gh}{f}$, & $Rr = y = \frac{DR \times AB - RDGT}{N}$. Eſt & $DR \times AB = hx$. Quare erit $y = \frac{fx}{e-g} - \frac{fg}{e-g} \times S. \frac{dx}{e-x}$. Eſt etiam (per conſtr.) D A ſeu $e-g$ ad A C ſeu g ut reſiſtentia medii ex motu in altitudinem ad vim gravitatis, & ideo per Cor. I. Prop. III. ut *velocitas verticalis*, quam exponit recta C P ſeu f, ad *velocitatem terminalem*; & ideo ſi velocitas terminalis exponatur per lineam a, habebitur

Corol. 1. Est igitur Rr æqualis $\frac{DR \times AB}{N} - \frac{RDGT}{N}$: ideoque si producatur RT ad X ut (h) sit RX æqualis $\frac{DR \times AB}{N}$; id est, si compleatur parallelogrammum $ACPY$, jungatur DY secans CP in Z, & producatur RT donec occurrat DY in X; erit Xr æqualis $\frac{RDGT}{N}$, & propterea tempori proportionalis.

LIBER SECUND. SECTIO I. PROP. IV. PROBL. II.

Co-

bitur $a = \frac{fg}{e-g}$. Unde fit $y = \frac{ax}{y} - a.\,S.\,\frac{dx}{e-x}$ & sumptis fluxionibus $dy = \frac{adx}{g} - \frac{adx}{e-x}$. Si ponatur RC sive $e-x=z$, erit $-dx=dz$, & $-\frac{adx}{e-x} = \frac{adz}{z}$, ideoque $-a.\,S.\,\frac{dx}{e-x} = a.\,S.\,\frac{dz}{z} = a.L.z = a.L.e-x$ (40). Quare erit $y = \frac{ax}{g} + a.\,L.\,e-x + Q$ *const.* Et quia evanescente y, evanescit quoque x, invenitur constans $Q = -a.\,L.\,e$, & hinc $y = \frac{ax}{g} + a.\,L.\,e-x - a.\,L.\,e = \frac{ax}{g} - a.L.\frac{e}{e-x}$. Est enim $L.e - L.e-x = L.\frac{e}{e-x}$, & signis mutatis $L.\,e-x - L.\,e = -L.\frac{e}{e-x}$.

57. Ex hac æquatione alia deducitur inter DV & Vr. Si enim dicantur $DV=v$ & $Vr=z$, erit ob triangula DCP, DRV similia, DP (b) : DV (v) = DC (e) : DR $(x) = \frac{ev}{b}$, & ideo $e-x = \frac{eb-ev}{b}$ & $\frac{e}{e-x} = \frac{b}{b-v}$; similiter erit DC (e) : CP (f) = DR $\left(\frac{ev}{b}\right)$: VR $= \frac{fv}{b}$, ideoque $y = Rr = VR - Vr = \frac{fv}{b} - z$. Quare habebitur $\frac{fv}{b} - z = \frac{aev}{bg} - a.L.\frac{bg}{b-v}$, & $z = \frac{fgv - aev}{bg} + a.\,L.\frac{b}{b-v}$. Sed (ex demonstr.) $a = \frac{fg}{v-g}$, atque ideo $ae - ag = fg$, & $fg - ae = -ag$; quare erit etiam $z = a.L.\frac{b}{b-v} - \frac{av}{b}$. 57.

(h) * *Ut sit RX æqualis* $\frac{DR \times AB}{N}$ *&c.* Hoc enim facto, erit RX ad DR ut data AB ad datam N, ideoque locus punctorum X linea recta quæ transit per punctum D, ubi evanescente DR evanescit quoque RX. Coincidente puncto R cum A fit RX seu AY : DA = AB : N, & (per theor. 4. de hyperb.) DC : AC = AB : GD seu AQ; & divisim DC : DA = AB : BQ, per constructionem vero CP : DC = BQ : N, ideoque ex æquo CP : DA = AB : N = AY : DA, ac proinde AY = CP. Unde si compleatur parallelogrammum ACPY, jungaturque DY secans CP in Z, erit DZ linea recta quam punctum X perpetuò tangit. Quoniam igitur $RX = \frac{DR \times AB}{N}$, & $Xr = RX - Rr = \frac{DR \times AB}{N} - \frac{DR \times AB + RDGT}{N}$; erit $Xr = \frac{RDGT}{N}$, & propterea, ob datam N, Xr est ut area RDGT, ideoque ut tempus quo corpus ex loco D pervenit in locum r.

* In

Corol. 2. Unde si capiantur innumeræ CR, vel, quod perinde est, innumeræ ZX in progressione geometricà; erunt totidem Xr in (i) progressione arithmeticâ. Et hinc curva $DraF$ (k) per tabulam logarithmorum facile delineatur.

Corol. 3. Si vertice D, diametro DG deorsum productâ, & latere recto quod sit ad $2DP$ ut resistentia tota ipso motus initio ad vim gravitatis, parabola construatur: velocitas quacum corpus exire debet de loco D secundum rectam DP, ut in medio uniformi resistente describat curvam $DraF$, ea ipsa erit quâcum exire debet de eodem loco D, secundum eandem rectam DP, ut in spatio non resisten-

(i) * *In progressione arithmeticâ.* Nam (380. lib. 1.) temporibus seu areis RDGT in progressione arithmeticâ crescentibus, abscissæ RC in progressione geometricâ decrescunt, & vice versâ. Quare verticalibus Xr, quæ sunt ut areæ RDGT, in progressione arithmeticâ crescentibus, correspondentes abscissæ RC decrescent in progressione geometricâ, & contra. Sed ob triangulorum DRX, DCZ similitudinem, est DC ad DZ ut DR ad DX, & divisim ut RC ad ZX: quare ob datas DC & DZ, est ZX ad RC in datâ ratione, & ideo ZX crescit vel decrescit in eâdem ratione cum RC.

(k) 58. *Per tabulam Logarithmorum facile delineatur.* Dicantur enim, ut suprà n. 56. $DC=e$, $CP=f$, $AC=g$, $a=\frac{fg}{e-g}$ $DR=x$, $Rr=y$; & erit (56) $y=\frac{ax}{y}-aL\frac{e}{e-x}$. Ob triangula DAY, YPZ similia, est DA seu $e-g$ ad AY vel CP seu f, ut YP vel AC seu g ad PZ, ideoque $PZ=\frac{fg}{e-g}=a$. Triangula similia DRX, YPZ dant etiam YP seu g ad PZ seu a, ut DR seu x ad RX, & propterea $RX=\frac{ax}{g}$. Unde cum sit $RC=e-x$, æquatio $y=\frac{ax}{g}-aL.\frac{e}{e-x}$ fiet $Rr=RX-PZ\times L.\frac{DC}{RC}$. Verum cum $PZ.L.\frac{DC}{RC}$ sit Logarithmus rationis DC ad RC in Logarithmica cujus subtangens est a sive PZ, dicendo ut subtangens tabularum ad PZ, ita $L.\frac{DC}{RC}$ è tabulis desumptus ad ejusdem quantitatis Logarithmum in Logarithmicâ cujus subtangens est PZ. Invenietur itaque $PZ\times L.\frac{DC}{RC}$ ope

ſiſtente deſcribat parabolam. Nam (l) latus rectum parabolæ hujus,

ope tabulæ vulgaris Logarithmorum, & inde obtinebitur R r ordinata ad trajectoriam D r a F, & ſic punctum quodlibet r in illa determinabitur.

59. Ex his ſimpliciſſima deducitur trajectoriæ D r a F per Logarithmicam conſtructio. Iiſdem enim poſitis quæ in corollario 1° hujus præſcripta ſunt, aſymptoto C Z & ſubtangente P Z deſcribatur per punctum D Logarithmica D K k G ſecans R X in K. Capiatur X r = R K, ſeu R r = X K, & punctum r erit in trajectoriâ quæſitâ D r a F. Nam ſi ex puncto K ducatur ad C Z perpendiculum K E, erit C E ſeu R K Logarithmus rationis D C ad KE vel R C (34), ideoque erit (58) R r = R X − R K = X K, & hinc R K = R X − R r = X r. Q. E. D.

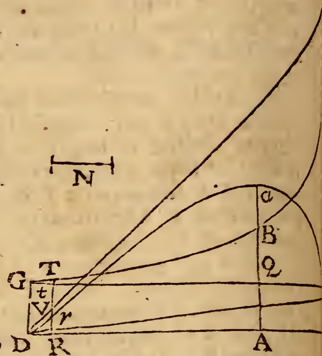
60. Hæc conſtructio hoc etiam commodi habet, quod ſtatim inveniantur altitudo maxima A a & horizontalis amplitudo D F. Eſt enim A a = Y k; & ſi ex puncto G interſectionis Logarithmicæ cum lineâ D Z demittatur ad D C perpendiculum G F, erit D F amplitudo Jactûs: nam coincidente X cum G fit X K ſeu R r = 0, & ideo coincidit punctum r cum R in horizontali D C. Pariter punctum r, quo trajectoria D r a F rectam quamlibet D c ex puncto D ad C Z ductam ſecat, invenitur, ſi capiatur C H æqualis c Z, jungatur D H Logarithmicam ſecans in K, & ex puncto K demittatur ad D C perpendiculum K R, quod lineam D c ſecabit in puncto quæſito r; erit enim R K : C H ſeu Z c = D r : D c = X r : Z c, ideoque X r = R K.

61. Quoniam velocitas projectionis eſt ad velocitatem terminalem, quæ data eſt, ut D P ad P Z (58); ſi manet velocitas projectionis & linea D P, manebit quoque Logarithmicæ ſubtangens P Z; & ideo una eademque Logarithmicæ ſpecies deſcribendæ trajectoriæ D r a F ſufficiet, utcumque mutetur projectionis angulus P D C.

(l) 62. *Latus rectum parabolæ hujus &c.* Eſt enim V r ſpatium infinite parvum quod corpus vi gravitatis deſcendendo deſcribit in medio reſiſtente, quodque eodem tempuſculo dato deſcriberet in medio non reſiſtente (6). Sed corpus in medio non reſiſtente projectum vi gravitatis deſcriberet arcum parabolæ D r, cujus tangens D P, diameter G D E, abſciſſa D M = V r, ordinata M r æqualis & parallela D V (40. lib. 1.), & (per theor. 1. de parabola lib. 1.) rectangulum ſub latere recto & abſciſsâ D M ſeu V r æquatur quadrato ordinatæ M r ſeu D V. Quare latus rectum parabolæ hujus ipſo motus initio eſt $\frac{DV^2}{Vr}$. 62.

De Motu Corporum.

hujus, ipso motus initio, est $\frac{DV\ quad.}{Vr}$; & Vr (m) est $\frac{tGT}{N}$ seu $\frac{DR \times Tt}{2N}$. Recta autem quæ, si duceretur, hyperbolam GTS tangeret in G, (n) parallela est ipsi DK, ideoque Tt est $\frac{CK \times DR}{DC}$, & N erat $\frac{QB \times DC}{CP}$. Et propterea Vr est $\frac{DRq \times CK \times CP}{2DCq \times QB}$, id est (ob proportionales DR & DC, DV & DP) $\frac{DVq \times CK \times CP}{2DPq \times QB}$, & latus rectum $\frac{DV\ quad.}{Vr}$ prodit $\frac{2DPq \times QB}{CK \times CP}$, id (o) est (ob proportionales QB & CK, DA & AC) $\frac{2DPq \times DA}{AC \times CP}$, ideoque ad $2DP$, ut $DP \times DA$ ad $CP \times AC$; (p) hoc est, ut resistentia ad gravitatem. *Q.E.D.*



Corol. 4. Unde si corpus de loco quovis D, datâ cum velocitate, secundum rectam quamvis positione datam DP projiciatur; & resistentia medii ipso motus initio detur: inveniri potest curva $DraF$, quam corpus idem describet. Nam ex datâ velocitate (q) datur latus rectum parabolæ, ut notum est.

(m) * *Et Vr est* $\frac{tGT}{N}$ (*per constr.*) *seu* $\frac{DR \times Tt}{2N}$; evanescente enim D R seu G t, triangulum t G T fit $\frac{1}{2}$ Gt$\times$Tt $= \frac{1}{2}$ DR$\times$Tt, & hinc $\frac{tGT}{N} = \frac{DR \times Tt}{2N}$.

(n) * *Parallela est ipsi DK*, ob K C = D G, & subtangentem hyperbolæ æqualem abscissæ D C (per theor. 1. de hyp. lib. 1.). Cum autem evanescit G T t, fit T t ad t G seu D R ut ordinata G D seu C K ad subtangentem, sive ad D C, & ideo Tt $= \frac{CK \times DR}{DC}$. Et *N* erat $\frac{QB \times DC}{CP}$ (per constr.). Quare si loco *N* & T t, hi valores substituantur in quantitate $\frac{DR \times Tt}{2N} =$ Vr, invenietur Vr $= \frac{DR^2 \times CK \times CP}{2DC^2 \times QB}$

(o) * *Id est ob proportionales QB & CK, DA & AC &c.* Nam (per theor. 4. de hyp.) A B est ad G D (sive A Q vel C K) ut D C ad A C, & divisim QB est ad C K ut D A ad A C, id est $\frac{QB}{CK} = \frac{DA}{AC}$.

(p) * *Hoc est, ut resistentia ad gravitatem*, per construct. Probl. II.

(q) * *Datur latus rectum parabolæ &c.* Datâ velocitate secundum directionem tangentis D P, datur tum spatium finitum in medio non resistente tempore dato æquabiliter descriptum, tum ex effectu cognito gravitatis in tempore dato, habe-

Et ſumendo 2 *DP* ad latus illud rectum, ut eſt vis gravitatis ad vim reſiſtentiæ, datur *D P*. Dein ſecando *D C* in *A*, ut ſit *CP* × *A C* ad *D P* × *D A* in eâdem illâ ratione gravitatis ad reſiſtentiam, dabitur punctum *A*. [r] Et inde datur curva *D r a F*.

Corol. 5. Et contra, ſi datur curva *D r a F*, dabitur & velocitas corporis & reſiſtentia medii in locis ſingulis *r*. [s] Nam ex datâ ratione *CP* × *A C* ad *DP* × *D A*, datur tum reſiſtentia medii ſub initio motus, tum latus rectum parabolæ: [t] & inde datur etiam velocitas ſub initio motus. Deinde ex longitudine tangentis *r L*, datur & huic proportionalis velocitas, & velocitati proportionalis reſiſtentia in loco quovis *r*.

Corol. 6. Cum autem longitudo 2 *D P* ſit ad latus rectum parabolæ ut gravitas ad reſiſtentiam in *D*; & ex auctâ velocitate augeatur reſiſtentia

tur ſpatium verticale finitum Vr eodem tempore vi gravitatis deſcriptum, id eſt, dantur ordinata & abſciſſa parabolæ, quibus datis datur illius latus rectum (per theor. 1. de parab.).

(r) * *Et inde datur curva D r a F*, non ſolum conſtructione per hyperbolam, ſed etiam conſtructione illâ quæ Logarithmicam abſolvitur (59). Nam inventâ DP, ſumenda eſt Logarithmicæ ſubtangens PZ ad D P in ratione gravitatis ad reſiſtentiam ſub initio motûs; & ideo Logarithmicæ ſubtangens P Z erit etiam ad D P ut 2 D P ad latus rectum parabolæ. 62.

(ſ) * *Nam ex datâ ratione* CP × A C ad D P × D A, id eſt (per conſtr.) ratione gravitatis ad reſiſtentiam totam ſub motus initio, dabitur reſiſtentia, ob datam gravitatem (per hyp.); & quia CP×AC eſt ad DP×DA ut 2 D P ad latus rectum parabolæ (per cor. 3.), dabitur illud latus rectum.

(t) * 63. *Et inde datur etiam velocitas ſub initio motûs.* Nam dato latere recto

para-

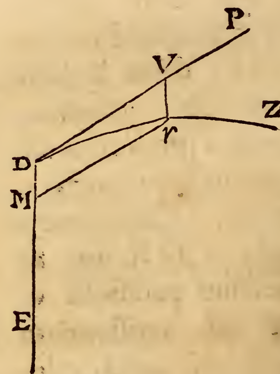
De Motu Corporum.

in eâdem ratione, (u) at latus rectum parabolæ augeatur in ratione illâ duplicatâ: (x) patet longitudinem $2DP$ augeri in ratione illâ simplici, ideoque velocitati semper proportionalem esse, neque ex angulo CDP mutato augeri vel minui, nisi mutetur quoque velocitas.

Corol. 7. Unde liquet methodus determinandi curvam $DraF$ ex phænomenis quamproximè, & inde colligendi resistentiam & velocitatem quâcum corpus projicitur. Projiciantur corpora duo similia & æqualia eâdem cum velocitate, de loco D, secundum angulos diversos CDP, CDp & cognoscantur loca F, f, ubi incidunt in horizontale planum DC. Tum, assumptâ quâcunque longitudine pro DP vel Dp, fingatur quod resistentia in D sit ad gravitatem in ratione quâlibet, & exponatur

parabolæ DrZ, quam grave in medio non resistente describit, & datâ positione tangentis DP cum diametro DE, parabola describi potest; datur autem in singulis locis velocitas corporis gravis parabolam datam describentis: Sit enim abscissa DM verticali Vr æqualis & parallela, & ordinata Mr etiam æqualis & parallela tangenti DV; datur tum velocitas quam corpus grave è puncto V cadendo per altitudinem datam Vr habet in r, tum tempus quo altitudinem illam describit, & hinc datur tempus idem quo motu uniformi describit spatium datum DV (40. lib. 1.), ideoque datur velocitas uniformis per tangentem DP, quæ est ipsa velocitas projectionis in D.

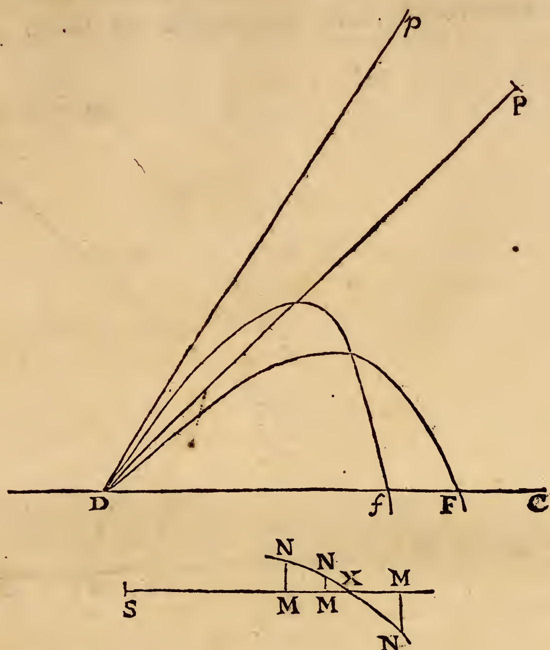
(u) * *At latus rectum parabolæ augeatur.* Nam cum velocitas secundum tangentem DV uniformis supponatur (40. lib. 1.); Si, dato tempore quo describitur DV, velocitas illa crescat, crescet DV in eadem ratione, manente spatio verticali Vr hoc eodem tempore dato descripto; sed latus rectum parabolæ DrZ est $\frac{DV^2}{Vr}$ (per cor. 3.) & quantitas $\frac{DV^2}{Vr}$ manente Vr, crescit ut DV^2. Quare latus rectum parabolæ DrZ augetur in ratione duplicatâ velocitatis.



(x) * *Patet longitudinem* 2 DP &c. Gravitas dicatur G, resistentia initio motûs R, latus rectum parabolæ, ut suprà, $\frac{DV^2}{Vr}$; & erit $2DP : \frac{DV^2}{Vr} = G : R$, ideoque $2DP = \frac{G \times DV^2}{R \times Vr}$, hoc est, datis Vr & G, 2 DP est ut $\frac{DV^2}{R}$, & quia R est ut velocitas, seu ut DV, erit etiam 2 DP ut DV, sive ut velocitas (per notam superiorem).

* 64. Dein

tur ratio illa per longitudinem quamvis SM. (y) Deinde per computationem, ex longitudine illâ assumptâ DP, inveniantur

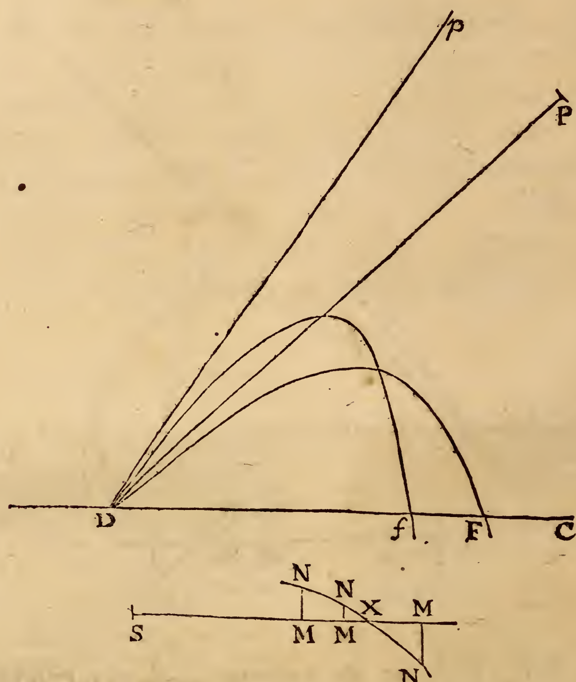


longitudines DF, Df, ac de ratione $\frac{Ff}{DF}$ per calculum inventâ, (z) auferatur ratio eadem per experimentum inventa, &

(y) 64. *Deinde per computationem.* Datâ enim D P longitudine & positione, dantur C P & D C, & datâ ratione resistentiæ in D ad gravitatem dantur D A & A C per constructionem problematis istius: His autem datis, curva D r a F (vide figuras superiores) describi potest, & hinc invenitur amplitudo horizontalis DF constructione per hyperbolam vel per logarithmicam (59). Si autem rem voluerimus calculo tractare, uti poterimus æquatione $y = \frac{a\,x}{g} - a.\,L.\,\frac{e}{e-x}$ (63) in qua ut sit $x = DF$, ponenda est $y = 0$, & æquatio fiet $\frac{a\,x}{g} = L.\,\frac{e}{e-x}$, ex quâ per regressum seriérum, vel per alias approximationes invenietur x per g & e, seu D F per A C & D C. 64.

(z) 65. *Auferatur ratio eadem per experimentum inventa*; & si nihil est residui, rectè assumpta fuit ratio resistentiæ ad gravitatem; si quid residui fuerit, *exponatur differentia per MN*. Nam si rectè assumpta fuit ratio resistentiæ ad gravitatem, curva D r a F per constructionem vel per computationem descripta similis est trajectoriæ quam corpus in medio resisten-

exponatur differentia per perpendiculum *MN*. Idem fac iterum ac tertio, assumendo semper novam resistentiæ ad gravitatem rationem *SM*, & colligendo novam differentiam *MN*. Ducantur autem differentiæ affirmativæ ad unam partem rectæ



SM, & negativæ ad alteram; & per puncta *N*, *N*, *N* agatur curva regularis *NNN* secans rectam *SMMM* in *X*, & ([a]) erit *SX* vera ratio resistentiæ ad gravitatem, quam

te reverâ describit, & hinc homologarum in illis curvis linearum debet esse ratio data. Determinatur enim trajectoria vera ex velocitate & angulo projectionis æquali PDC vel pDC, atque ex ratione resistentiæ ad gravitatem datam; & curva per constructionem delineata determinatur per longitudinem assumptam DP vel Dp, quæ velocitatem datam semper potest exhibere, per angulum PDC vel pDC, & per rationem linearum DA, AC, seu rationem resistentiæ ad gravitatem, si recte assumpta fuit: quare differentia tota inter veram trajectoriam & curvam hoc modo per constructionem descriptam est in magnitudine linearum homologarum, quarum ratio est eadem in utrâque curvâ. Curvæ igitur illæ similes sunt.

(a) 66. *Et erit SX vera ratio resistentiæ ad gravitatem.* Nam ubi MN seu differentia rationum $\frac{Ff}{DF}$, quæ per computatio-

invenire oportuit. Ex (b) hac ratione colligenda eſt longitudo DF per calculum; & longitudo quæ ſit ad aſſumptam longitudinem DP, ut longitudo DF per experimentum cognita ad longitudinem DF modo inventam, erit vera longitudo DP. Quâ inventâ, habetur tum curva linea $DraF$ quam corpus deſcribit, tum corporis velocitas & reſiſtentia in locis ſingulis.

Scholium.

Cæterum, reſiſtentiam corporum eſſe in ratione velocitatis, (†) hypotheſis eſt magis mathematica quam naturalis. In mediis, quæ rigore omni vacant, reſiſtentiæ corporum ſunt in dupli-

tionem & per experimentum inventæ ſunt, nulla eſt, ratio reſiſtentiæ ad gravitatem recte aſſumpta fuit (65). Quare cum S M aſſumptam illam rationem exponat, & evaneſcat M N ubi S M fit S X, patet in hoc caſu rationem reſiſtentiæ ad gravitatem recte exponi per lineam SX. Itaque ſi innumeræ abſciſſæ S M aſſumptæ fuiſſent, & innumeræ ordinatæ N M per experimenta determinatæ, curva quam punctum N perpetuò tangit, rationem accuratam reſiſtentiæ ad gravitatem determinaret per ejus interſectionem X cum linea S M; ideoque ſi multa fiunt tentamina, ſicque plura obtineantur puncta N, & per ea ducatur curva regularis N N X N, illa quam proxime punctum X quæſitum determinabit; methodum autem ducendi curvam regularem per plura puncta data mox in Scholio ſumus traditiuri.

(b) * *Ex hac ratione colligenda eſt &c.* Sit, exempli cauſâ, ratio aſſumpta reſiſtentiæ ad gravitatem 1 ad 10, ſeu $SM=\frac{1}{10}$; inventa autem ſit $SX=2SM=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$; erit reſiſtentia ad gravitatem ut 1 ad 5. Ex hac ratione & aſſumptâ longitudine DP colligenda eſt longitudo D F ſeu amplituda jactûs (64); & quoniam inventâ verâ ratione reſiſtentiæ ad gravitatem, trajectoria per calculum vel per conſtructionem inventa ſimilis eſt trajectoriæ quam corpus in medio reſiſtente, reverâ deſcribit (65), erit amplitudo D F per calculum inventa ad amplitudinem D F per experimentum cognitam, ut aſſumpta longitudo D P ad veram longitudinem D P pro trajectoriâ in medio reſiſtente deſcriptâ. Hâc autem longitudine inventâ, habetur (per cor. 4.) tum curva linea D r a F quam corpus reipſâ deſcribit, tum corporis velocitas & reſiſtentia in locis ſingulis (per cor. 5.). 66.

(†) 67. Ex ſupra demonſtratis determinari poſſent motus corporis in medio quod reſiſtit partim uniformiter, partim in ratione velocitatis. Et quidem ſi corpus ſola vi inſitâ in hoc medio feratur, pars illa reſiſtentiæ quæ eſt uniformis, tanquam vis conſtans gravitatis quâ corporis aſcendentis motus retardatur, conſideranda eſt, & in ſuperioribus conſtructionibus pro corporis aſcenſu, non gravitas, ſed ea reſiſtentia uniformis data per lineam A C, vel per rectangulum A H exponi debet. Si vero corpus in prædicto medio vi gravitatis etiam urgeatur, linea A C gravitatem & reſiſtentiæ partem uniformem ſimul junctas, ſi corpus aſcendit, & exceſſum gravitatis ſupra eam reſiſtentiæ partem uniformem, ſi corpus deſcendit, exponet. Qua ratione cæteris manentibus, determinabuntur motus corporis tum ſolâ vi inſitâ moti, tum vi gravitatis urgente aſcendentis & deſcendentis in medio quod reſiſtit partim in ratione datâ, partim in ratione velocitatis, tum etiam corporis projecti.

Etc-

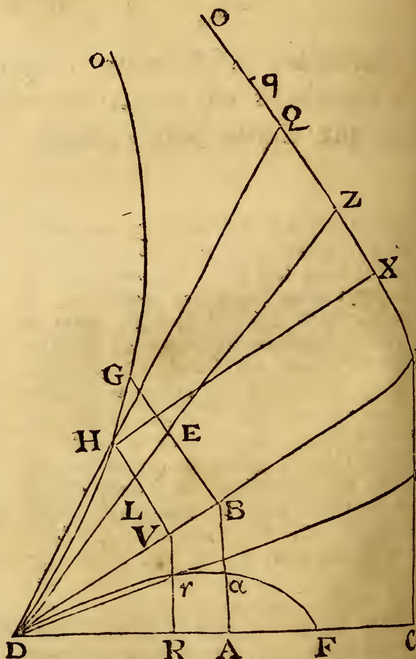
DE MOTU CORPORUM.

plicatâ ratione velocitatum. (c) Etenim actione corporis velocioris comunicatur eidem medii quantitati, tempore minore, motus major in ratione majoris velocitatis; ideoque tempore æquali, ob majorem medii quantitatem perturbatam, communicatur motus in duplicatâ ratione major; estque resistentia (per motus leg. II. & III.) ut motus communicatus. Videamus igitur quales oriantur motus ex hâc lege resistentiæ.

(c) *Etenim actione &c.* Hæc patent per demonstrata (8).

68. Scholium. Ex æquatione ad curvam D r a F, quam (57) invenimus, deducitur hujus curvæ per Logarithmicam satis elegans constructio, quâ usi sunt Varignonius & Hermannus. Eam hic exponemus breviter. Deinde cum in superioris propositionis corollario ultimo & alibi postea describenda sit curva regularis quæ per data puncta transeat, hoc problema, quod Newtonus in Epistolâ ad Oldenburgum anno 1676. datâ unum fere ex pulcherrimis dicit quod solvere desideraverit, solvemus.

69. Iisdem positis quæ in superiori constructione Newtoni, sit D P $=b$, D V $=v$, V r $=z$, & D P ad a ut velocitas projectionis ad velocitatem terminalem; & erit (57) $z = a.\,L.\,\frac{b}{b-v} - \frac{av}{b}$. Oportet curvam D r a F ex hac æquatione per Logarithmicam construere. In recta P O ad D P normali capiatur P Z $=a$, asymptoto P O & subtangente P Z describatur per punctum D Logarithmica D H O, cujus D Z erit tangens, & per punctum quodvis V in linea D P agatur V H parallela P O Logarithmicæ occurrens in H & tangenti D Z in L, capiaturque verticalis V R pars V r æqualis H L. Punctum r erit in trajectoria quæsitâ D r a F. Nam ducto ex H ad P O perpendiculo H X, erit (per construct.) V P $=$ H X $=b-v$, P Z $=a$, & hinc PX $=$ HV $=$ PZ $\times$ L. $\frac{DP}{HX} = a.\,L.\,\frac{b}{b-v}$ (34). Et ob triangula D V L, D P Z similia, D P (b) : P Z (a) $=$ D V (v) : V L $= \frac{av}{b}$. Quare erit H V $-$ L V $= a.\,L.\,\frac{b}{b-v} - \frac{av}{b} = z =$ V r. Q. E. D.



70. Cor. 1. Si per punctum A Newtoni constructione determinatum erigatur verticalis A B secans D P in B, & per B erigatur ad D P perpendiculum B G secans D Z in E & Logarithmicam in G, capiaturque B a æqualis G E, erit A a maxima altitudo Jactûs.

71. Cor. 2. Punctum r quo trajectoria rectam D c ex D ductam ad P C, secat, invenitur, si in lineæ Z O capiatur Z Q æqualis P c, jungantur D Q logarithmicam secans in H, demittatur ex H ad D P, perpendiculum H V, & ex V ad

ad DC perpendiculum VR, quod rectam Dc secabit in puncto quæsito r, atque hinc determinatur etiam horizontalis amplitudo DF, capiendo ZQ æqualem Pc, & reliqua perficiendo ut modò diximus. Nam ob parallelas Vr & Pc, HV & QP, est $Pc : Vr = PD : DV = DZ : DL = QZ : HL$; sed (per constr.) $QZ = Pc$: ergo $Vr = HL$, ideoque punctum r est in trajectoria DraF (69).

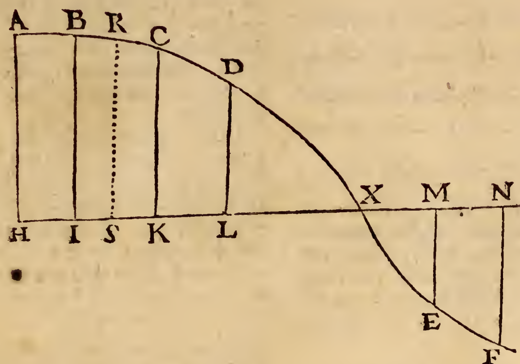
72. Ex demonstratis inveniri potest angulus elevationis PDC, sub quo corpus datâ velocitate DP projectum transibit per punctum r in verticali VR datum. Dicantur $DR = c$, $Rr = e$, $DZ = f$, $DL = x$, $HL = Vr = z$, $VR = z + e = y$; & ob triangula DLV, DZP similia erit $DZ(f) : DP(b) = DL(x) : DV = \frac{bx}{f}$, & ob angulum DRV rectum $DV^2 = DR^2 + VR^2$, hoc est, $\frac{bbxx}{ff} = cc + yy$, æquatio ad hyperbolam, cujus diameter transversa est $\frac{2cf}{b}$, diameter conjugata $2c$, abscissa a centro sumpta x, & ordinata y seu $z + e$, ut calculo inito liquet. Inde autem deducitur hæc constructio. Per punctum D ducatur infra lineam DP recta DE parallela PZ & æqualis Rr, per E agatur EK parallela DZ secans HV in M; & erit $LM = DE = Rr = e$, ideóque $HM = z + e = y$, atque $EM = DL = x$, & proinde centrum hyperbolæ est in E; cumque semidiameter transversa sit $\frac{cf}{b} = \frac{DR \times DZ}{DP}$, si capiatur in linea DP pars DN æqualis DR, & per punctum N erigatur ad DP perpendiculum NT, secans EK in T & DZ in t, erit DP ad DZ ut DN seu DR ad Dt seu ET, ideoque $ET = \frac{DR \times DZ}{DP}$, & propterea ET semidiameter transversa, EM abscissa, & MH ordinata hyperbolæ THo, cujus semidiameter conjugata æquatur DR. Hæc itaque hyperbola occursu suo cum Logarithmica DHo determinabit punctum H, ex quo si demittatur ad DP perpendiculum HV secans DZ in L, dabuntur DV & HL æqualis Vr, ideoque dabitur etiam $VR = Vr + Rr$. His autem datis, datur angulus elevationis PDC, cujus sinus est VR, posito sinu toto DV.

73. Si vero quæratur angulus projectionis PDC, ut corpus per punctum R in horizontali DC datum transeat, fiet $Rr = e = 0$, & æquatio ad hyperbolam evadet $\frac{bbxx}{ff} = cc + zz$, ob $y = z + e = z$. In constructione vero coïncidet punctum E cum puncto D, & T cum t, cæteris manentibus ut supra. Et quia si per hyperbolæ & Logarithmicæ intersectionem H ducatur recta DH secans Po in Q, est $QZ = PC$ (71.); liquet in eo casu esse QZ sinum anguli elevationis PDC, existente radio seu sinu toto DP. Observandum porro est, quod si in his constructionibus hyperbola Logarithmicam nusquam attingat, problema est impossibile, quod si eam bis secet, anguli duo satisfaciunt. Patet quoque datam semper esse rationem diametrorum hyperbolæ, ubicumque situm sit punctum r, vel R; est enim DR ad $\frac{DR \times DZ}{DP}$ in ratione data DP ad DZ. 73.

DE MOTU CORPORUM.

74. Angulus elevationis PDC maximæ omnium amplitudini horizontali conveniens ita determinatur. Per punctum D ducatur DX ipsi DP perpendicularis quæ sit ad DP ut est DP ad PZ; jungatur ZX Logarithmicam secans in H, & ex D per H ducatur recta DH secans PO in Q; erit QZ sinus anguli quæsiti, existente sinu toto DP. Sit enim DR amplitudo horizontalis maxima $=c$, DV$=v$, VR$=$Vr$=z$, & erit ob angulum DRV rectum $vv-zz=cc$, & sumptis fluxionibus $2v\,dv-2z\,dz=2c\,dc=0$ (48), ideoque $v\,dv=z\,dz$. Sed (69) $z=a\,\mathrm{L}\frac{b}{b-v}-\frac{av}{b}=a\,\mathrm{L}\,b-a\,\mathrm{L}\,b-v-\frac{av}{b}$, & sumptis fluxionibus $dz=\frac{a\,dv}{b-v}-\frac{a\,dv}{b}=\frac{av\,dv}{bb-bv}$. Quare erit $z\,dz=\frac{azv\,dv}{bb-bv}=v\,dv$, & ideo $az=bb-bv$, ac proinde DP(b):PZ$(a)=$HL(z):PV$(b-v)$; verum ob triangulum DVL, DPZ similitudinem est DP:DZ$=$PV:ZL; unde per compositionem rationum & ex æquo DP^2:PZ$\times$DZ$=$HL:ZL, & quia DP$^2=$DX$\times$PZ (per constr.), erit DX:DZ$=$HL:LZ. Quapropter punctum H per æquationem $az=bb-bv$ determinatum perpetuo tangit lineam rectam XZ; cumque idem punctum in Logarithmica esse oporteat ut determinetur maxima amplitudo DR, si per intersectionem H rectæ XZ & Logarithmicæ DHo ducatur recta DQ secans Po in Q, habebitur QZ sinus anguli PDC (73) maximæ amplitudini DR convenientis. Q. E. D.

75. Jam si oporteat curvam regularem describere per data quotlibet puncta transeuntem, uti possumus generali methodo, quam Newtonus in arithmeticâ universali tradidit, quamque deinde in problematis 55, 58 & 61. adhibuit. Hæc sunt ipsius verba: Cum curva non datur specie, sed determinanda proponitur, possisque pro arbitrio æquationem fingere quæ naturam ejus generaliter contineat, & hanc pro ea designandâ tanquam si daretur assumere, ut ex ejus



ejus assumptione quomodocumque perveniatur ad æquationes ex quibus assumpta tandem determinetur. Si itaque curva generis dati per data puncta delineanda sit, assumatur generalis ad curvam illam æquatio cum terminorum coëfficientibus indeterminatis, & curvâ ad rectam aliquam positione datam relatâ, ex singulis punctis datis in rectam illam demittantur perpendiculares aut rectæ aliæ inter se parallelæ, quæ datæ erunt ut & earum abscissæ a dato in rectâ illâ puncto computatæ; deinde in assumptâ æquatione loco abscissæ variabilis x & ordinatæ etiam variabilis y scribantur abscissæ & ordinatæ per puncta data determinatæ, & tot inde obtinebuntur æquationes quot sunt puncta data per quæ curva transire debet, atque ex illis æquationibus, generalis æquationis assumptæ coëfficientes determinabuntur. Hujus methodi exemplum sit solutio Lemmatis 5′ lib. 3. principiorum, quod ita propositum est: invenire curvam generis parabolici quæ per data quotcumque puncta transibit; cujus Lemmatis solutionem dedit ibidem Newtonus, sed sine demonstratione quæ tamen ex ejusdem auctoris differentiali methodo colligi potest.

76. I. Sunto puncta illa A, B, C, D, E, F, &c. & ab iisdem ad rectam quamvis positione datam HN demittantur perpendicula quotcumque AH, BI, CK, DL, EM, FN, &c.; positisque abscissâ variabili HS $=x$, & ordinatâ RS $=y$, assumatur generalis ad parabolam ABDEF æquatio $y=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+$&c., sintque A, B, C, D, E, &c. cum suis signis indeterminatæ. Dicantur AH $=a$, BI $=f$, CK $=g$, DL $=h$, ME $=-k$, & HI $=l$, HK $=m$, HL $=n$, HM $=t$, &c. Ponantur 1°. $y=a$ & $x=o$; 2°. $y=f$, & $x=l$; 3°. $y=g$ & $x=m$; 4°. $y=h$, & $x=n$; 5°. $y=-k$, & $x=t$ atque ita deinceps; & loco y & x seorsim substituantur hi valores in æquatione generali assumpta, quæ in has mutabitur: 76.

II. $a=A$

$f=A+Bl+Cl^2+Dl^3+El^4+$&c.

$g=A+Bm+Cm^2+Dm^3+Em^4+$&c.

$h=A+Bn+Cn^2+Dn^3+En^4+$&c.

$-k=A+Bt+Ct^2+Dt^3+Et^4+$&c.

Subducantur æquationes inferiores ex superioribus, nimirum secunda ex primâ, tertia ex secunda, & ita deinceps. Differentia primæ ac secundæ ordinatæ per primum intervallum HI divisa dicatur b, id est, $b=\frac{a-f}{l}$; secundæ ac tertiæ differentia per secundum intervallum IK divisa dicatur 2b, id est, $2b=\frac{f-g}{m-l}$, & ita de cæteris. Prodibunt æquationes sequentes.

III. $b = \frac{a-f}{l} = -B - Cl - Dl^2 - El^3$

$2b = \frac{f-g}{m-l} = -B - Cl - Cm - Dl^2 - Dlm - Dm^2 - El^3 - El^2m - Elm^2 - Em^3$

$3b = \frac{g-h}{n-m} = -B - Cm - Cn - Dm^2 - Dmn - Dn^2 - Em^3 - Em^2n - Emn^2 - En^3$

$4b = \frac{h+k}{t-n} = -B - Cn - Ct - Dn^2 - Dnt - Dt^2 - En^3 - En^2t - Ent^2 - Et^3$

Simili modo capiantur adhuc æquationum istarum differentiæ, & dividantur per intervallum inter duas ordinatas interceptum HK, IL, KM, & differentiæ sic divisæ dicantur c, 2c, 3c, ut hic factum videtur.

IV. $c = \frac{b-2b}{m} = C + Dl + Dm + El^2 + Elm + Em^2$.

$2c = \frac{2b-3b}{n-l} = C + Dl + Dm + Dn + El^2 + Elm + Em^2 + Eln + Emn + En^2$.

$3c = \frac{3b-4b}{t-m} = C + Dm + Dn + Dt + Em^2 + Emn + En^2 + Emt + Ent + Et^2$.

Harum æquationum differentiæ per intervalla trium ordinatarum HL, IM, divisæ dicantur d, 2d, & erunt æquationes

V. $d = \frac{c-2c}{n} = -D - El - Em - En$

$2d = \frac{2c-3c}{t-l} = -D - El - Em - En - Et$

Harum tandem æquationum differentia per intervallum quatuor ordinatarum HM divisa dicatur e, & erit

VI. $e = \frac{d-2d}{t} = E$.

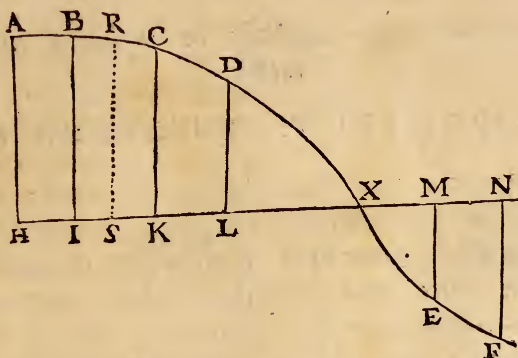
Si plura fuissent puncta data, pluresque ideo fuissent æquationes, eodem modo pergendum esset usque ad differentiam ultimam: quæ hic est differentia quarta, & sic tandem pervenitur ad valorem coëfficientis ultimi termini æquationis generalis assumptæ, & deinde retrogrediendo inveniuntur valores aliarum coëfficientium D, C, B, & A hoc modo.

VII. Quoniam $e = E$, & (V) $d = -D - El - Em - En$, erit $D = -d - el - em - en$; & quia (IV) est $c = C + Dl + Dm + El^2 + Elm + Em^2$ ideoque $C = c - Dl - Dm - El^2 - Elm - Em^2$ si loco E & D substituantur eorum valores modo inventi, habebitur $C = c + dl + dm + elm + enl + emn$. Et simili modo si in æquatione (III) $b = -B - Cl - Dl^2 - El^3$, substituantur coëfficientium E, D, C valores, invenietur $B = -b - cl - dlm - elmn$.

VIII. Cum igitur sit (II.) $A = a$, æquatio assumpta $y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4$, in hanc abit $y = a - x.(b\,cl + dlm + elmn) + x^2.(c + dl + dm + elm + enl + emn) - x^3.(d + el + em + en) + e\,x^4 = a - bx - clx + cx^2 - dlmx + dlx^2 + dmx^2 - dx^3 - elmnx + elmx^2 + enlx^2 + emnx^2 - elx^3 - emx^3 - enx^3 + ex^4$, seu $y = a + b.(-x) + c.(-x \times \overline{l-x}) + d.(-x \times \overline{l-x} \times \overline{m-x}) + e.(-x \times \overline{l-x} \times \overline{m-x} \times \overline{n-x}) + \&c.$ In quâ æquatione patet terminorum progressus, & quomodo datâ abscissâ HS seu x inveniri compendiosè possit correspondens ordinata SR seu y. Nam si dicantur $-x$ seu $-\text{HS} = p$; $-\text{IS} \times p$, seu $-x \times \overline{l-x} = q$; $+\text{SK} \times q$, seu $-x \times \overline{l-x} \times \overline{m-x} = r$; $+\text{SL} \times r$, seu $-x \times \overline{l-x} \times \overline{m-x} \times \overline{n-x} = s$, ita scilicet pergendo ad usque perpendiculum penultimum, quod hic est DL; erit RS seu $y = a + bp + cq + dr + es + \&c.$

IX. Atque hæc ipsa est regula quam Newtonus casu secundo Lemmatis V. lib. III. sic tradit: collige perpendiculorum AH, BI, CK &c. differentias primas per intervalla perpendiculorum divisas b, 2b, 3b, 4b &c; secundas per intervalla bina divisas c, 2c, 3c, 4c &c; tertias per intervalla terna divisas d, 2d, 3d, &c.; quartas per intervalla quaterna divisas e, 2e, &c. Et sic deinceps. Inventis differentiis, dic $\text{AH} = a$, $-\text{HS} = p$, p in $-\text{IS} = q$, q in $+\text{SK} = r$, r in $+\text{SL} = s$, pergendo scilicet ad usque perpendiculum penultimum. Et erit ordinatim applicata $\text{RS} = a + bp + cq + dr + es + \&c.$ ubi observandum est, præponenda esse signa negativa terminis HS, IS &c. qui jacent ad partes puncti S versus A, & signa affirmativa terminis SK, SL &c. qui jacent ad alteras partes puncti S.

X. Per hanc igitur regulam, assumptâ quâlibet abscissâ HS, invenietur valor ordinatæ correspondentis SR, singulaque pa-



rabolæ puncta determinabuntur. Si vero in æquatione ponatur $y = 0$, & deinde quæratur valor abscissæ x, cognoscetur punctum X quo parabola rectam HN intersecat.

77. XI. Si perpendiculorum HA, IB, KC, LD &c. æqualia sunt intervalla HI, IK, KL &c.; cæteris ut supra (I) nominibus servatis, positoque intervallo $HI = l = 1$, erunt $HK = m = 2$, $HL = n = 3$, $HM = t = 4$, &c. & perpendiculorum differentiæ per intervalla, per intervalla bina, terna quaterna & divisæ erunt (III, IV, V, VI) quæ secuntur.

Differentiæ primæ per intervalla divisæ, $b = a - f$, $2b = f - g$, $3b = g - h$, $4b = h + k$.

Differentiæ secundæ per intervalla bina divisæ, $c = \frac{a - 2f + g}{2}$, $2c = \frac{f - 2g + h}{2}$, $3c = \frac{g - 2h - k}{2}$.

Differentiæ tertiæ per intervalla terna divisæ, $d = \frac{a - 3f + 3g - h}{6}$, $2d = \frac{f - 3g + 3h + k}{6}$.

Differentiæ quartæ per intervalla quaterna divisæ, $e = \frac{a - 4f + 6g - 4h - k}{24}$.

XII. Ponantur $a - f = \beta$, $a - 2f + g = n$, $a - 3f + 3g - h = \delta$, $a - 4f + 6g - 4h - k = \varepsilon$; & erit $b = \beta$, $c = \frac{n}{2}$, $d = \frac{\delta}{6}$, $e = \frac{\varepsilon}{24}$. Quare si hi valores substituantur in æquatione supra (VIII.) inventa, $y = a + b.(-x) + c.(-x \times l - x) + d.(-x \times l - x \times m - x) + e.(-x \times l - x \times m - x \times n - x) +$ &c., illa in hanc mutabitur $y = a + \beta(-x) + \frac{n(-x \times 1 - x)}{2} + \frac{\delta.(-x \times 1 - x \times 2 - x)}{2 \times 3} + \frac{\varepsilon.(-x \times 1 - x \times 2 - x \times 3 - x)}{2 \times 3 \times 4} +$ &c. 77.

Quapropter si in hâc ultimâ æquatione dicantur $-HS$, seu $-x = p$; $\frac{1}{2}p$ in $-IS$, seu $\frac{-x \times 1 - x}{2} = q$; $\frac{1}{3}q$ in $+SK$, seu $\frac{-x \times 1 - x \times 2 - x}{2 \times 3} = r$; $\frac{1}{4}r$ in $+SL$, seu $\frac{-x \times 1 - x \times 2 - x \times 3 - x}{2 \times 3 \times 4} = s$; & ita pergatur ad usque perpendiculum penultimum, erit $y = a + \beta p + nq + \delta r + \varepsilon s +$ &c. ut Newtonus in casu primo Lemmatis V. lib. III. determinavit. De hoc problemate Lector consulat clarissimos auctores Hermannum in appendice ad phoronomiam, Craigium in tractatu de calculo fluentium, maximè vero Stirling in libro de interpolatione serierum, in quo totam hanc materiam copiosè & sagaciter explicat.

De Motu Corporum.

SECTIO II.

De motu corporum quibus resistitur in duplicatâ ratione velocitatum.

PROPOSITIO V. THEOREMA III.

Si corpori resistitur in velocitatis ratione duplicatâ, & idem solâ vi insitâ per medium similare movetur; tempora verò sumantur in progressione geometricâ à minoribus terminis ad majores pergente: dico quod velocitates initio singulorum temporum sunt in eâdem progressione geometricâ inversè; & quod spatia sunt æqualia, quæ singulis temporibus describuntur.

Nam quoniam quadrato velocitatis proportionalis est resistentia medii; & (d) resistentiæ proportionale est decrementum velocitatis; si tempus in particulas innumeras æquales dividatur, quadrata velocitatum singulis temporum initiis erunt velocitatum earundem differentiis proportionalia. Sunto temporis particulæ illæ AK, KL, LM, &c. in rectâ CD sumptæ, & erigantur perpendicula AB, Kk, Ll, Mm, &c. hyperbolæ $BklmG$, centro C asymptotis rectangulis CD, CH descriptæ, occurrentia in B, k, l, m, &c & (e) erit AB ad Kk ut CK ad CA, & divisim $AB-Kk$ ad Kk ut AK ad CA, & vicissim $AB-Kk$ ad AK ut Kk ad CA, ideoque ut $AB \times Kk$ ad $AB \times CA$. Unde, (f) cum AK & $AB \times CA$ dentur, erit $AB-Kk$ ut $AB \times Kk$; & ultimo, ubi coeunt AB & Kk, ut ABq. Et simili argumento erunt $Kk-Ll$, $Ll-Mm$, &c ut Kk *quad.* Ll *quad.* &c. Linearum igitur AB, Kk, Ll, Mm quadrata sunt ut earundem differentiæ; & idcirco cum quadrata velocitatum fuerint etiam ut ipsarum dif-

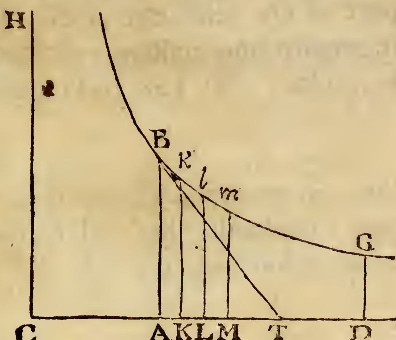
(d) * *Et resistentiæ proportionale est decrementum velocitatis*; dato nempe temporis momento, (1. 15.).

(e) * *Et erit AB ad Kk ut CK ad CA*, (per theor. 4. de hyp.).

(f) * *Undè cum AK, & AB×CA dentur.* AK quidem (ex hyp. tempus enim in particulas innumeras æquales dividitur quæ per lineas æquales AK, KL &c. exponuntur) & AB×CA (per theor. 4. de hyp.).

* Si-

differentiæ, (g) ſimilis erit ambarum progreſſio. (h) Quo demonſtrato, conſequens eſt etiam ut areæ his lineis deſcriptæ ſint in progreſſione conſimili cum ſpatiis quæ velocitatibus deſcribuntur. Ergo ſi velocitas initio primi temporis *AK* exponatur per lineam *AB*, & velocitas initio ſecundi *KL* per lineam *Kk*, & longitudo primo tempore deſcripta per aream *AKkB*; velocitates omnes ſubſequentes exponentur per lineas ſubſequentes *Ll*, *Mm*, &c. & longitudines deſcriptæ per areas *Kl*, *Lm*, &c. Et compoſitè, ſi tempus totum exponatur per ſummam partium ſuarum *AM*, longitudo tota deſcripta exponetur per ſummam partium ſuarum *AMmB*. Concipe jam tempus *AM* ita dividi in partes *AK*, *KL*, *LM*, &c. ut ſint *CA*, *CK*, *CL*, *CM*, &c. in progreſſione geometricâ; & (i) erunt partes illæ in eâdem progreſſione, & (k) velocitates *AB*, *Kk*, *Ll*, *Mm*, &c. in progreſſione eâdem inversâ, (l) atque ſpatia deſcripta *Ak*, *Kl*, *Lm*, &c. æqualia. *Q. E. D.*



Corol. 1. Patet ergo quod, ſi tempus exponatur per aſymptoti partem quamvis *AD*, & velocitas in principio temporis per ordinatim applicatam *AB*; velocitas in fine temporis exponetur per ordinatam *DG*, & ſpatium totum deſcriptum per aream hyperbolicam adjacentem *ABGD*; necnon ſpatium, quod

(g) * *Similis erit ambarum progreſſio*; & ideo velocitates ſingulis temporum æqualium A K, K L, L M &c. initiis exponi poſſunt per lineas A B, K k, L l &c.

(h) * *Quo demonſtrato, conſequens eſt ut areæ* A B K k, K k l L, L l m M, &c. *ſint in progreſſione conſimili cum ſpatiis quæ velocitatibus* A B, K k, L l &c., tempuſculis A K, K L, L M &c., *deſcribuntur* (14).

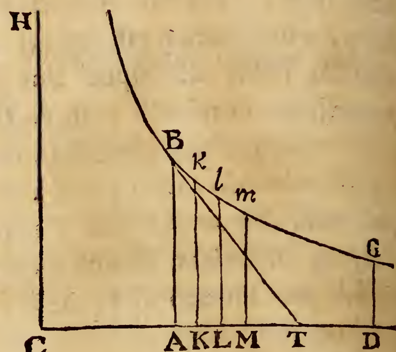
78. (i) * *Et erunt partes illæ* AK, KL, L N, &c. quæ ſunt differentiæ linearum CA, CK, CL, CM, &c. in eâdem progreſſione. Differentiæ enim cujuſvis progreſſionis geometricæ, ſunt in eâdem progreſſione geometricâ. Nam cum ſit C A : C K = C K : C L = C L : C N &c., erit auferendo antecedentia ex antecedentibus & conſequentia ex conſequentibus C A : C K = A K : K L = K L : L M &c. 78.

(k) * *Et velocitates A B, K k, L l, M m &c., in progreſſione eâdem inverſâ.* Siquidem (per theor. 4. de hyp.) eſt A B ut C A, inverſè, K k ut C K inverſè.

(l) * *Atque ſpatia deſcripta*, A B k K, K k l L, L l m M &c., æqualia (380. lib. 1).

De Motu Corporum.

quod corpus aliquod eodem tempore *A D*, velocitate primâ *A B*, in medio non resistente describere posset, (m) per rectangulum *A B* × *A D*.



Corol. 2. Unde datur spatium in medio resistente descriptum, capiendo illud ad spatium quod velocitate uniformi *A B* in medio non resistente simul describi posset, ut est area hyperbolica *A B G D* ad rectangulum *A B* × *A D*.

Corol. 3. Datur etiam resistentia medii, statuendo eam ipso motus initio æqualem esse vi uniformi centripetæ, quæ in cadente corpore, tempore *A C*, in medio non resistente, generare posset velocitatem *A B*. Nam si ducatur *B T* quæ tangat hyperbolam in *B*, & occurrat asymptoto in *T*; (n) recta *A T* æqualis erit ipsi *A C*, & (o) tempus exponet, quo resistentia prima uniformiter continuata tollere posset velocitatem totam *A B*.

Co-

79. (m) * *Per rectangulum* A B × A D. Si enim velocitas A B, manet eadem, tempore AK, describet corpus spatium AB×AK, dum in medio resistente describit spatium A B k K, tempore K L velocitate A B describet spatium A B × K L, dùm in medio resistente describit spatium K k l L, & ità deinceps (14. lib. 1.); Quare tempore A M velocitate primâ A B in medio non resistente describet corpus spatium A B × (A K + K L + L M) = A B × A M; & tempore A D, spatium A B × A D. Et quoniam ipso motûs initio, est area ABkK, æqualis rectangulo A B × K k, atquè spatia in medio resistente & in medio non resistente descripta temporis momento AK, sunt etiam æqualia, liquet spatium in medio resistente descriptum tempore quovis A D, esse ad spatium eodem tempore in medio non resistente descriptum velocitate A B, ut est area hyperbolica A B G D ad rectangulum A B × A D.

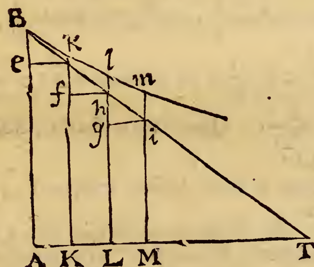
80. Ex corollario primo sequitur tempore infinito spatium infinitum describi in medio quod resistit in ratione quadrati velocitatis. Non enim evanescet G D, hoc est velocitas tota extincta non erit nisi infinita evadat recta A D, hoc est nisi tempus motus sit infinitum tuncque infinita fit area A B G D, seu spatium descriptum est infinitum.

(n) * *Recta AT æqualis erit ipsi AC.* (Per theor. 1. de Hyp.)

(o) * *Et tempus exponet.* Ordinatæ Kk, Ll, Mm, &c. rectæ BT, occurrant in k, h, i, &c. ex punctis k, h, i, demissa sint ad AB, Kk, Ll, &c. perpendicula Ke, hf, ig, &c. & sumptis temporibus quam minimis Ak, kL, LM, æqualibus erunt Be, kf, hg æquales, sed resistentia prima temporis momento AK, & tollit velocitatem AB—Kk, seu Be, eadem uniformiter continuata temporis mo-

Corol. 4. (p) Et inde datur etiam proportio hujus resistentiæ ad vim gravitatis, aliamve quamvis datam vim centripetam.

Corol. 5. Et vice versâ, si datur proportio resistentiæ ad datam quamvis vim centripetam; (†) datur tempus *AC*, quo vis centripeta resistentiæ æqualis generare possit velocitatem quamvis *AB*: & inde datur punctum *B* per quod hyperbola asymptotis *CH*, *CD*, describi debet; ut (q) & spatium *ABGD*, quod corpus incipiendo motum suum cum velocitate illâ *AB*, tempore quovis *AD*, in medio similari resistente describere potest.



momento KL, sive AK, tolleret etiam velocitatem kf=Be, & temporis momento LM, seu AK, velocitatem gh=Be, atquè ità deinceps; Quare resistentia prima uniformiter continuata tempore AT tolleret velocitatem totam AB, quia AB æqualis est omnibus differentiis Be, kf, gh, &c. usque ad T; vis autem centripeta quæ tempore AK, producit velocitatem Be, æqualis est vi quæ eodem temporis momento eandem velocitatem Be extinguit, seu æqualis est resistentiæ primæ, & illa vis centripeta uniformis manens toto tempore AT, totam velocitatem AB, produceret, quam resistentia prima uniformis manens eodem tempore extingueret; ergò resistentia prima æqualis est vi uniformi centripetæ quæ in cadente corpore, tempore AT sivè AC, in medio non resistente generare posset velocitatem AB. 80.

(p) * *Et indè datur etiam proportio.* Sunt enim vires centripetæ uniformes ut velocitates quas dato tempore producunt (13. lib. 1.) & ideò erit resistentia prima ad gravitatem ut velocitas quam producit vis centripeta uniformis cui resistentia illa æqualis supponi potest, ad velocitatem quam vis gravitatis eodem tempore generat.

(†) *Datur tempus AC quo vis resistentiæ æqualis generare possit velocitatem AB.* Si enim detur vis quædam centripeta, dabitur tempus quo velocitatem AB generare potest: Tempora autem quibus diversæ vires centripetæ eamdem velocitatem generare possunt, sunt inversè ut illæ vires; Ergo si datur ratio vis centripetæ cui resistentia est æqualis ad aliam vim datam, dabitur ratio temporis quo hæc vis velocitatem AB generare potest ad tempus quo vis cui resistentia est æqualis eam velocitatem generat, hoc est datur tempus AC.

(q) * *Ut & spatium ABGD.* His enim datis, datur tùm area ABGD, tùm rectangulum AB × AD, tùm spatium quod corpus tempore AD, cum datâ velocitate uniformi AB, describeret in medio non resistente, ideòque cum sit AB × AD, ad ABGD, ut spatium tempore AD & velocitate AB in medio non resistente descriptum ad spatium eodem tempore descriptum in medio resistente (per §91. 2.) hoc spatium dabitur.

De Motu Corporum.

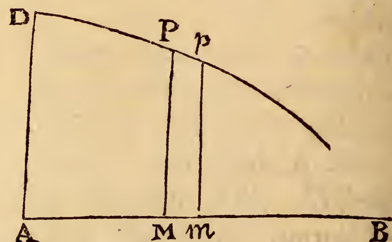
81. Scholium. Hujus propositionis constructio ad Logarithmicam reduci facilè posset, sed id relinquimus lectoris arbitrio, generalis problematis quod sequitur, solutionem analyticam tradituri ut inventionis fons ipse aperiatur.

PROBLEMA.

82. Definire motum corporis solâ vi insitâ lati in medio quod resistit in ratione compositâ ex simplici ratione densitatis medii, & quâvis ratione multiplicatâ celeritatis mobilis.

E' loco A egrediatur corpus cum velocitate datâ c & tempore t describat rectam AM $=s$, sitque ejus velocitas in M $=v$ densitas medii in eodem loco $=k$, & resistentia r erit (17.) $rds=-vdv$. Ponatur resistentia $r=\frac{kv^n}{a^n}$, sitque a quantitas data, & habebitur $\frac{kv^n ds}{a^n}=-vdv$, & hinc $kds=-a^n v^{1-n}dv$. Per punctum M, erigatur ad AM, perpendiculum MP quod exponat medii densitatem k in loco M, sitque DPp curva quam punctum P perpetuò tangit, & erecto altero perpendiculo mp priori MP infinitè propinquo ut sit Mm $=ds$, erit elementum MPpm $=kds=-a^n v^{1-n}dv$, sumptisque fluentibus, area ADPM $=\frac{Q-a^n v^{2-n}}{2-n}$; Quia verò evanescente areâ ADPM, evanescit quoque s, & fit $v=c$, erit $o=\frac{Q-a^n c^{2-n}}{2-n}$, & ideo constans $Q=a^n c^{2-n}$, atque ità ADPM $=\frac{a^n c^{2-n}-a^n v^{2-n}}{2-n}$. Porrò si densitas k, seu PM, est ut functio quævis spatii descripti s sive AM, poterit curva DPp describi, ac proindè in hâc Hypothesi dato spatio descripto, dabitur per quadraturam areæ ADPM, velocitas, & contrà datâ velocitate dabitur area ADPM, & hinc dabitur spatium descriptum AM, inde etiam (14. lib. 1.) datâ velocitate aut spatio dabitur tempus t, & contrà.

83. Si $n=2$, fit $2-n=o$, & ideò resumenda est æquatio MPpm $=-a^n v^{1-n}dv$ $=-\frac{a^2 dv}{v}$, quæ, sumptis fluentibus, abit



in hanc ADPM $=Q-a^2 L.v$, & quia positâ areâ ADPM $=o$, fit $v=c$, erit $Q=a^2 L.c$, ideoque ADPM $=a^2 L.c-a^2 L.v=a^2 L.\frac{c}{v}$. Sit ADPM $=b$, logarithmus numeri $h=1$, seu L. $h=1$, erit b L. $h=a^2$ L. $\frac{c}{v}$, & $\frac{b}{a^2}\times$ L. $h=$ L. $\frac{c}{v}$, seu L. $h^{\frac{b}{aa}}=$ L. $\frac{c}{v}$, ac proindè $h^{\frac{b}{aa}}=\frac{c}{v}$, & $v=\frac{c}{h^{\frac{b}{aa}}}$. Quarè dato spatio, dabitur velocitas & hinc dabitur tempus (14) & contrà.

84. Sit densitas uniformis seu $k=1$, erit $kds=ds=-a^n v^{1-n}dv$, sumptisque fluentibus $s=\frac{Q-a^n v^{2-n}}{2-n}=\frac{a^n c^{2-n}-a^n v^{2-n}}{2-n}$. Undè reperitur $v=\frac{[a^n c^{2-n}+(n-2)s]^{\frac{1}{2-n}}}{a^{\frac{n}{2-n}}}$. Invenitur tempus per formulam $dt=\frac{ds}{v}$ $=-\frac{a^n v^{1-n}dv}{v}=a^n v^{-n}dv$. Et sumptis fluentibus, fit $t=\frac{Q-a^n v^{1-n}}{1-n}$ $=\frac{a^n c^{1-n}-a^n v^{1-n}}{1-n}$, quia posito $t=o$, fit $v=c$, & proindè $Q=a^n c^{1-n}$.

85. Si $k=1$, & $n=1$, hoc est, si densitas est uniformis & resistentia ut velocitas erit (84) $s=ac-av$; & quia (ibid.) $dt=-a^n v^{-n}dv=-\frac{adv}{v}$, erit $t=Q$ $-$

$-aL.v=aL.c-aL.v=aL.\frac{c}{v}$, quod posito tempore $t=0$, fiat $v=c$ & proindè $Q=aL.c$.

86. Si $k=1$, & $n=2$, erit (84) $t=\frac{a^2c-a^2v}{cv}$, & quia (ibid.) $ds=-a^n v^{1-n} dv=-\frac{a^2dv}{v}$, erit $s=Q-a^2L.v=a^2L.c-a^2L.v=a^2L.\frac{c}{v}$.

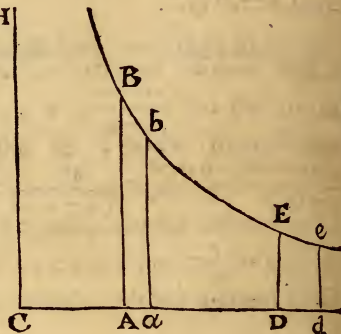
87. Si in æquatione ſpatii & velocitatis suprà inventâ, velocitas v, ſupponatur $=0$, erit $s=\frac{a^nc^{2-n}}{2-n}$, ſi n eſt numerus binario minor, at erit $s=\frac{a^nc^{n-2}-a^nv^{n-2}}{(n-2)c^{n-2}v^{n-2}}=\frac{a^n}{(n-2)0}=\infty$, ſi n eſt numerus binario major; & (86) erit $s=a^2L\frac{c}{0}=\infty$, ubi $n=2$. Quarè ſi n eſt numerus poſitivus binario minor, deſcripto ſpatio aliquo finito velocitas omnis extinguitur; at ſi n binario æqualis eſt vel major, ſpatium infinitum conficitur, priuſquam velocitas evaneſcat.

88. Si in æquationibus temporis & velocitatis velocitas v evadat $=0$, erit (84) $t=\frac{a^nc^{1-n}}{1-n}$, ſi n eſt numerus unitate minor, at erit $t=\infty$, ſi n eſt unitatè major, & (85) $t=aL.\frac{c}{0}=\infty$, ubi $n=1$. Quapropter ſi numerus poſitivus n eſt unitate minor, velocitas tempore finito extinguitur, ſpatio etiam finito deſcripto (87). Si n eſt unitati æqualis vel ipſâ major, velocitas nonniſi tempore infinito extingui poteſt, & ſpatium finitum eſt, ſi n eſt numerus binario minor, infinitum verò, ſi n binario æqualis vel major (87.). 88.

DE MOTU CORPORUM.

PROPOSITIO VI. THEOREMA IV.

Corpora sphærica homogenea & æqualia, resistentiis in duplicatâ ratione velocitatum impedita, & solis viribus insitis incitata, temporibus quæ sunt reciprocè ut velocitates sub initio, describunt semper æqualia spatia, & amittunt partes velocitatum proportionales totis.



Asymptotis rectangulis *CD*, *CH* descriptâ hyperbolâ quâvis *BbEe* secante perpendicula *AB*, *ab*, *DE*, *de*, in *B*, *b*, *E*, *e*, (r) exponantur velocitates initiales per perpendicula *AB*, *DE*, & tempora per lineas *Aa*, *Dd*. Est ergo ut *Aa* ad *Dd* ita (per hypothesin) *DE* ad *AB*, & ita (ex (t) naturâ hyperbolæ) *CA* ad *CD*; & componendo, ita *Ca* ad *Cd*. (u) Ergo areæ *ABba*, *DEed*, hoc est, spatia descripta æquantur inter se, & velocitates primæ *AB*, *DE* sunt ultimis *ab*, *de*, & propterea dividendo partibus etiam suis amissis *AB − ab*, *DE − de* proportionales. *Q. E. D.*

PROPOSITIO VII. THEOREMA V.

Corpora sphærica quibus resistitur in duplicatâ ratione velocitatum, temporibus, quæ sunt ut motus primi directè & resistentiæ primæ inversè, amittent partes motuum proportionales totis, & spatia describent temporibus istis & velocitatibus primis conjunctim proportionalia.

(x) Namque motuum partes amissæ sunt ut resistentiæ &

(r) * *Exponantur velocitates initiales &c.* Cum enim corpora duo similia homogenea & æqualia supponantur, eorum motus considerari possunt tanquam motus unius ejusdemque corporis variis celeritatis gradibus acti (ut in prop. 5.) ideóque (per coroll. 1. prop. 5.) velocitates initiales exponi possunt per lineas AB, DE, tempora per lineas Aa, Dd, velocitates in fine illorum temporum residuæ per lineas ab, de, & spatia his temporibus descripta per areas Hyperbolicas ABba, DEed.

(t) * *Ex naturâ Hyperbolæ.* (Per theor. 4. de Hyperb.)

(u) * *Ergò areæ ABba, DEed,* (378. Lib. 1.)

(x) * *Namque motuum partes amissæ &c,* (2). * Idem

tempora conjunctim. Igitur ut partes illæ sint totis proportionales, debebit resistentia & tempus conjunctim esse ut motus. Proinde tempus erit ut motus directè & resistentia inversè. Quare temporum particulis in eâ ratione sumptis, corpora amittent semper particulas motuum proportionales totis, (y) ideoque retinebunt velocitates velocitatibus suis primis semper proportionales. Et (z) ob datam velocitatum rationem, describent semper spatia, quæ sunt ut velocitates primæ & tempora conjunctim. *Q. E. D.*

(a) *Corol.* 1. Igitur si æquivelocibus corporibus resistitur in duplicatâ ratione diametrorum: globi homogenei quibuscunque cum velocitatibus moti, describendo spatia diametris suis proportio-

(y) * *Ideoque retinebunt velocitates* in ratione primâ, ob datas corporum massas (6. lib 1.).

(z) * *Et ob datam velocitatum rationem* (12.).

89\. Tota propositionis hujus demonstratio per Analysim hoc modo exponitur. Sit globi cujusvis massa m, velocitas data initio motûs c, in fine temporis t sit v, resistentia data initio motûs r, & quia ejusdem corporis resistentiæ in diversis locis sunt ut velocitatum quadrata (per Hyp.) erit cc, ad vv, ut r, ad resistentiam elapso tempore t, quæ proindè erit $\frac{rvv}{cc}$. Sed (2) resistentia $\frac{rvv}{cc}$ est ut motûs decrementum $-mdv$ directè & temporis momentum dt, inversè, hoc est, $\frac{rvv}{cc} = -\frac{mdv}{dt}$, & hinc $dt = -\frac{mccdv}{rvv}$, sumptisque fluentibus $t = Q + \frac{mcc}{rv}$. Ponatur $t = 0$, & fiet $v = c$, adeóque $Q = -\frac{mc}{r}$, quo valore substituto fit $t = \frac{mcc - mcv}{rv}$. Capiatur tempus t, ut motus primus mc, directè & resistentia prima r, inversè, hoc est t ut $\frac{mc}{r}$, & erit $\frac{mc}{r}$ ut $\frac{mcc - mcv}{rv}$, ideóque mcv, ut $mcc - mcv$, & dividendo per c, mv ut $mc - mv$; & compositè fiet mc, ut $mc - mv$, id est, motus amissus $mc - mv$ ut motus primus mc; & hinc ob datam massam m, erit etiam c, ut $c - v$, id est, velocitas amissa $c - v$, ut velocitas prima c; indè etiam erit c, ad $c - c + v$, seu v, hoc est velocitas prima c, ad residuam v, in ratione datâ. Jam si spatium tempore t descriptum dicatur s, erit (13) $ds = vdt$, & quia v est ut data c, erit ds ut cdt, sumptisque fluentibus ob datam c, fiet s ut ct. Q. E. D.

90\. Quoniam spatium s est ut ct, & t ut $\frac{mc}{r}$, erit etiam s ut $\frac{mcc}{r}$; globi cujus massa m diameter sit D, & datâ globi densitate erit massa m, ut volumen (2. lib. 1.) hoc est, ut diametri cubus D^3; Quare erit s ut $\frac{D^3cc}{r}$. Si prætereà datâ velocitate c, resistentia r est ut diametri D, dignitas cujus index n, hoc est r ut D^n, & proinde velocitate non datâ, resistentia r, ut $D^n cc$, erit s ut $\frac{D^3cc}{D^n cc}$, seu ut D^{3-n}. Ex quibus patent corollaria quæ sequuntur.

(a) * *Cor.* 1. Nam in Hypothesi corollarii hujus est $n = 2$, adeóque s ut D.

De Motu Corporum.

tionalia, amittent partes motuum proportionales totis. Motus enim globi cujusque erit ut ejus velocitas & massa conjunctim, id est, ut velocitas & cubus diametri; resistentia (per hypothesin) erit ut quadratum diametri & quadratum velocitatis conjunctim; & tempus (per hanc propositionem) est in ratione priore directè & ratione posteriore inversè, id est, ut diameter directè & velocitas inversè; ideoque spatium, tempori & velocitati proportionale, est ut diameter.

(b) *Corol.* 2. Si æquivelocibus corporibus resistitur in ratione sesquiplicatâ diametrorum: globi homogenei quibuscunque cum velocitatibus moti, describendo spatia in sesquiplicatâ ratione diametrorum, amittent partes motuum proportionales totis.

Corol. 3. Et universaliter, si æquivelocibus corporibus resistitur in ratione dignitatis cujuscunque diametrorum: spatia quibus globi homogenei, quibuscunque cum velocitatibus moti, amittent partes motuum proportionales totis, erunt ut cubi diametrorum ad dignitatem illam applicati. Sunto diametri D & E; & si resistentiæ, ubi velocitates æquales ponuntur, sint ut D^n & E^n: spatia quibus globi, quibuscunque cum velocitatibus moti, amittent partes motuum proportionales totis, erunt ut D^{3-n} & E^{3-n}. Et propterea globi homogenei describendo spatia ipsis D^{3-n} & E^{3-n} proportionalia, retinebunt velocitates in eâdem ratione ad invicem ac sub initio.

(c) *Corol.* 4. Quod si globi non sint homogenei, spatium à globo densiore descriptum augeri debet in ratione densitatis. Motus enim, sub pari velocitate, major est in ratione densitatis, & tempus (per hanc propositionem) augetur

(b) * *Cor.* 2. In hypothesi corollarii hujus est $n\frac{3}{2}$, ideóque s ut $D^{3-\frac{3}{2}}$, seu ut $D^{\frac{3}{2}}$.

(c) * *Cor.* 4. Sit globi m densitas δ, adeóque (2. lib. 1.) massa m ut δD^3, & hinc (90) s ut $\frac{\delta D^3 cc}{r}$. Quarè si ponatur resistentia r, ut $D^n cc$, erit s ut δD^{3-n}, hoc est, spatium s, quod datâ densitate δ, erat ut D^{3-n}, augeri debet in ratione densitatis δ.

* Cor.

tur in ratione motus directè, ac ſpatium deſcriptum in ratione temporis.

(d) *Corol*. 5. Et ſi globi moveantur in mediis diverſis; ſpatium in medio, quod cæteris paribus magis reſiſtit, diminuendum erit in ratione majoris reſiſtentiæ. Tempus enim (per hanc propoſitionem) diminuetur in ratione reſiſtentiæ auctæ, & ſpatium in ratione temporis.

(e) LEMMA II.

Momentum genitæ æquatur momentis laterum ſingulorum generantium in eorundem laterum indices dignitatum & coëfficientia continuè ductis.

Genitam voco quantitatem omnem, quæ ex lateribus vel terminis quibuſcunque in arithmeticâ per multiplicationem, diviſionem, & extractionem radicum; in geometriâ per inventionem vel contentorum & laterum, vel extremarum & mediarum proportionalium, ſine additione & ſubductione generatur. Ejuſmodi quantitates ſunt facti, quoti, radices, rectangula, quadrata, cubi, latera quadrata, latera cubica, & ſimiles. Has quantitates, ut indeterminatas & inſtabiles, & quaſi motu fluxuve perpetuo creſcentes vel decreſcentes, hic conſidero; & earum incrementa vel decrementa momentanea ſub nomine momentorum intelligo: ita ut incrementa pro momentis addititiis ſeu affirmativis, ac decrementa pro ſubductitiis ſeu negativis habeantur. Cave tamen intellexeris particulas finitas. Particulæ finitæ non ſunt momenta, ſed quantitates ipſæ ex momentis genitæ. Intelligenda ſunt principia jamjam naſcentia finitarum magnitudinum. Neque enim ſpectatur in hoc lemmate magnitudo momentorum: ſed prima naſcentium propor-

tio.

(d) * *Cor*. 5. Reſiſtentia r, quæ antè erat ut $D^n cc$, augeatur in ratione quâvis a, ſeu ſit r ut $aD^n cc$, & quia s eſt ut $\frac{\delta D^3 cc}{r}$, (cor. 4.) fiet s ut $\frac{\delta D^3 cc}{aD^n cc}$, ſeu ut $\frac{\delta D^{3-n}}{a}$, ſpatium igitur di- 90.
minuendum eſt in ratione majoris reſiſtentiæ.

(e) * *Lem*. 2. Totum iſtud Lemma num. 137. & ſequentibus Lib 1. fusè expoſitum videat lector.

tio. Eodem recidit si loco momentorum usurpentur vel velocitates incrementorum ac decrementorum (quas etiam motus, mutationes & fluxiones quantitatum nominare licet) vel finitæ quævis quantitates velocitatibus hisce proportionales. (f) Lateris autem cujusque generantis coefficiens est quantitas, quæ oritur applicando genitam ad hoc latus.

Igitur sensus (g) lemmatis est, ut, si quantitatum quarumcunque perpetuo motu crescentium vel decrescentium A, B, C, &c. momenta, vel his proportionales mutationum velocitates dicantur a, b, c, &c. momentum vel mutatio geniti rectanguli AB fuerit $aB+bA$, & geniti contenti ABC momentum fuerit $aBC+bAC+cAB$: & genitarum dignitatum A^2, A^3, A^4, $A^{\frac{1}{2}}$, $A^{\frac{3}{2}}$, $A^{\frac{1}{3}}$, $A^{\frac{2}{3}}$, A^{-1}, A^{-2}, & $A^{-\frac{1}{2}}$ momenta $2aA$, $3aA^2$, $4aA^3$, $\frac{1}{2}aA^{-\frac{1}{2}}$, $\frac{3}{2}aA^{\frac{1}{2}}$, $\frac{1}{3}aA^{-\frac{2}{3}}$, $\frac{2}{3}aA^{-\frac{1}{3}}$, $-aA^{-2}$, $-2aA^{-3}$, & $-\frac{1}{2}aA^{-\frac{3}{2}}$ respectivè. Et generaliter, ut dignitatis cujuscunque $A^{\frac{n}{m}}$ momentum fuerit $\frac{n}{m}aA^{\frac{n-m}{m}}$. Item ut genitæ A^2B momentum fuerit $2aAB+bA^2$; & genitæ $A^3B^4C^2$ momentum $3aA^2B^4C^2+4bA^3B^3C^2+2cA^3B^4C$; & genitæ $\frac{A^3}{B^2}$ sive A^3B^{-2} momentum $3aA^2B^{-2}-2bA^3B^{-3}$: & sic in cæteris. Demonstratur vero lemma in hunc modum.

Cas. 1. Rectangulum quodvis motu perpetuo auctum AB, ubi

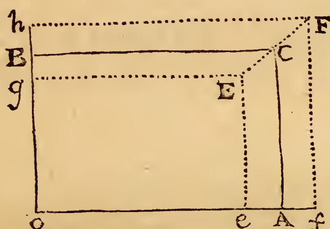
(f) *Lateris autem.* Sic lateris x, in quantitate genitâ $x^n y^m$ positi, coefficiens est $\frac{x^n y^m}{x}$, seu $x^{n-1} y^m$.

(g) * *Sensus Lemmatis est, ut, si quantitatum* A, B, C *momenta dicantur a, b, c,* ità ut dum A fit $A+a$, B evadat $B+b$, C evadat $C+c$ &c., *momentum vel mutatio geniti rectanguli AB, erit* $aB+bA$ &c., vel si loco litterarum A, B, C, &c. utamur litteris minusculis x, y, z &c. quibus variabiles quantitates consuevimus significare, & loco a, b, c, &c. scribamus dx, dy, dz &c. sensus Lemmatis est momentum seu fluxionem rectanguli xy, esse $ydx+xdy$, fluxionem solidi xyz, esse $yzdx+xzdy+xydz$, & genitarum quantitatum x^2, x^3, x^4, $x^{\frac{1}{2}}$ &c. momenta esse $2xdx$, $3x^2dx$, $4x^3dx$, $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx$ &c. respectivè; & genitæ $x^n y^m$, momentum esse, $ny^m x^{n-1}dx+mx^n y^{m-1}dy$ &c.

* B

ubi de lateribus A & B deerant momentorum dimidia $\frac{1}{2}a$ & $\frac{1}{2}b$, fuit $A-\frac{1}{2}a$ in $B-\frac{1}{2}b$, seu $AB-\frac{1}{2}aB-\frac{1}{2}bA+\frac{1}{4}ab$; & quam primum latera A & B alteris momentorum dimidiis aucta sunt, evadit $A+\frac{1}{2}a$ in $B+\frac{1}{2}b$ seu $AB+\frac{1}{2}aB+\frac{1}{2}bA+\frac{1}{4}ab$. De hoc rectangulo subducatur rectangulum prius, & (h) manebit excessus $aB+bA$. Igitur laterum incrementis totis a & b generatur rectanguli incrementum $aB+bA$. *Q. E. D.*

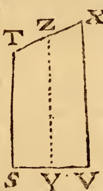
Cas. 2. Ponatur AB semper æquale G, & contenti ABC seu GC momentum (per cas. 1.) erit $gC+cG$, id est (si pro G & g scribantur AB & $aB+bA$) $aBC+bAC$ $+c$



(h) * *Et manebit excessus* $aB+bA$.

1us. Casus. Sit Rectangulum OABC sub duabus variabilibus OA, OB continuè crescentibus; sumantur hinc inde ab A partes æquales Ae, Af, & á B partes æquales Bg, Bh, ita ut, si a & b sint quantitates momentis linearum OA, OB proportionales sit $ef=a$, & $gh=b$: Compleantur Rectangula OgEe, OhFf, ducatur FE, quæ transibit per C punctum concursus linearum AC, BC (ob parallelas, & lineas ef & gh similiter, nempe bifariam, sectas in A & B). Dico quod summa Trapeziorum EFef & EFgh æqualis erit momento Rectanguli OACB; obtinetur verò Trapeziorum summa, sumendo differentiam Rectangulorum OeEG, OfFH, quæ est $Of\times Oh-Oe\times Og$, sive $\overline{OA+Af}\times\overline{OB+Bh}-\overline{OA-Ae}\times\overline{OB-Bg}$, & vocando OA, A; OB, B; $Af=Ae=\frac{1}{2}a$, $Bh=Bg=\frac{1}{2}b$ differentia Rect. erit $\overline{A+\frac{1}{2}a}\times\overline{B+\frac{1}{2}b}-\overline{A-\frac{1}{2}a}\times\overline{B-\frac{1}{2}b}=AB+\frac{1}{2}aB+\frac{1}{2}bA+\frac{1}{4}ab-AB+\frac{1}{2}aB+\frac{1}{2}bA-\frac{1}{4}ab=aB+bA$.

Ut verò probetur summam Trapeziorum EFef & EFgh æqualem esse momento Rectanguli OACB, observandum primo. Quod si lineæ quævis ST, VX, utcumque inæquales, in lineam SV sint perpendiculares jungaturque TX, & in medio lineæ SV erigatur perpendicularis YZ, erit Trapezium STXV æquale Rectangulo $SV\times YZ$: Itaque Trapezium EFef erit æquale Rectangulo $AC\times ef$, & Trapezium EFgh æquale Rectangulo $BC\times gh$. Præterea quoniam ef & gh sunt momentis linearum OA, OB proportionales, hoc est, proportionales velocitatibus quibus lineæ OA, OE crescunt, sive, quod idem est, celeritatibus quibus, dum Rectangulum OACB crescit, lineæ AC, BC antrorsum feruntur, Rectangula $AC\times ef$ & $BC\times gh$, erunt ut lineæ illæ AC, BC & earum velocitates conjunctim.



Mutatio autem geniti Rectanguli OACB proportionalis est causæ quæ eam producit, ea autem causa est motus linearum variabilium AC, BC quo antrorsum feruntur dum lineæ OA, OB crescunt, & quamvis dum illæ lineæ AC, BC moventur, interim lineæ OA, OB crescant, incrementi hujus nulla habenda est ratio dum Rectanguli fluxionem sive incrementum nascens consideramus, etenim in ipso hujus incrementi nascenti, ortu illæ productiones linearum OA, OB nihil planè sunt, & cum primum sunt aliquid jam aliæ AC, BC prioribus majores assumuntur, ergo momentum Rectanguli OACB sive ejus mutationis momentanea

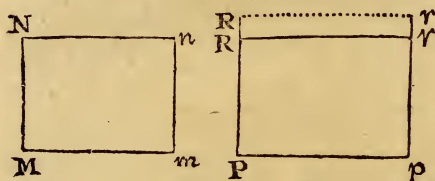
$+ c$ A B. Et par. eſt ratio contenti ſub lateribus quotcunque. *Q. E. D.*

Caſ. 3. Ponantur latera A, B, C ſibi mutuo ſemper æqualia; & ipſius A^2, id eſt rectanguli A B, momentum $aB+bA$ erit $2aA$, ipſius autem A^3, id eſt contenti A B C, momentum $aBC+bAC+cAB$ erit $3aA^2$. Et eodem argumento momentum dignitatis cujuſcunque A^n eſt naA^{n-1}. *Q. E. D.*

Caſ. 4. Unde cum $\frac{1}{A}$ in A ſit 1, momentum ipſius $\frac{1}{A}$ ductum in A, unâ cum $\frac{1}{A}$ ducto in a, (i) erit momentum ipſius 1, id eſt, nihil. Proinde momentum ipſius $\frac{1}{A}$ ſeu ipſius A^{-1} eſt

$-a$

nea cauſa, ex lineis AC & BC & velocitatibus quibuſcum feruntur determinanda eſt.



Sint verò Rectangula MNmn, PRpr, quorum lineæ MN, PR ſint æquales, concipiantur aliæ lineæ hiſce etiam æquales quæ ab MN & PR profectæ motu uniformi & parallelo ſecundum lineas Mm & Pp ferantur, ita ut eodem tempore ad mn & pr perveniant, manifeſtum eſt (per 1. 6[i]. Elem.) areas Mn, Pr fore ut lineæ Mm Pp, & pariter avelocitates linearum ab MN & PR profectarum in eadem fore ratione ideoque areas Mn, Pr, fore in ratione earum velocitatum. Quod ſi lineæ NM, PR ſint inæquales, areæ erunt ut lineæ illæ MN, PR & earum velocitates conjunctim, & quævis incrementa Rectangulorum NMmn, PRpr æquali tempore facta in eadem ratione erunt, ideoque & naſcentia incrementa erunt in eâ Ratione. Unde tandem ſequitur quod incrementum Rectanguli OABC ex motu lineæ AC natum, eſt ut illa linea AC & ejus velocitas conjunctim, & quod incrementum ejuſdem Rectanguli OACB ex motu lineæ BC natum, eſt ut illa linea BC & ejus velocitas conjunctim, ideoque totum momentum Rectanguli OACB eſt ſumma factorum linearum AC & BC per velocitates quibus feruntur reſpective ductarum, ideoque ut ſumma Rectangulorum AC × ef & BC × gh, ſive denique ut ſumma Trapeziorum EFef, EFgh. Q. E. D.

2[us]. Caſus. Facile hæc applicantur ad eos caſus ubi vel ambæ lineæ OA, OB decreſcunt, vel una creſcente altera decreſcit, quippe varianda ſunt ſolummodo ſigna juxta has hypotheſes.

Vide aliam hujus caſûs demonſtrationem (num. 160. lib. 1.).

(i) * *Erit momentum ipſius* 1, *id eſt nihil.* Ponatur enim $\frac{1}{A} = B$ & erit $\frac{1}{A} \times A = AB = 1$, ſed momentum rectanguli AB eſt $aB + bA$ (per caſ. 1.) & momentum conſtantis 1 nullum eſt; Quarè erit $aB + bA = 0$, & hinc $bA = -aB = -\frac{a}{A}$, undè momentum b ipſius B ſeu $\frac{1}{A}$ eſt $b = \frac{-a}{A^2}$

$=-a$

$\frac{-a}{A^2}$. Et generaliter cum $\frac{1}{A^n}$ in A^n sit 1, momentum ipsius $\frac{1}{A^n}$ ductum in A^n unâ cum $\frac{1}{A^n}$ in naA^{n-1} erit nihil. Et propterea momentum ipsius $\frac{1}{A^n}$ seu A^{-n} erit $-\frac{na}{A^{n+1}}$. *Q. E. D.*

Cas. 5. Et cum $A^{\frac{1}{2}}$ in $A^{\frac{1}{2}}$ sit A, momentum ipsius $A^{\frac{1}{2}}$ ductum in $2A^{\frac{1}{2}}$ erit a, per cas. 3: ideoque momentum ipsius $A^{\frac{1}{2}}$ erit $\frac{a}{2A^{\frac{1}{2}}}$ sive $\frac{1}{2}aA^{-\frac{1}{2}}$. Et generaliter si ponatur $A^{\frac{m}{n}}$ æquale B, erit A^m æquale B^n, ideoque maA^{m-1} æquale nbB^{n-1}, & maA^{-1} æquale nbB^{-1} seu $nbA^{-\frac{m}{n}}$, ideoque $\frac{m}{n}aA^{\frac{m-n}{n}}$ æquale b, id est, æquale momento ipsius $A^{\frac{m}{n}}$. *Q. E. D.*

Cas. 6. igitur genitæ cujuscunque $A^m B^n$ momentum est momentum ipsius A^m ductum in B^n, unâ cum momento ipsius B^n ducto in A^m, id est $maA^{m-1}B^n + nbB^{n-1}A^m$; idque sive dignitatum indices m & n sint integri numeri vel fracti, sive affirmativi vel negativi. Et par est ratio contenti sub pluribus dignitatibus. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc in continuè proportionalibus, si terminus unus datur, (k) momenta terminorum reliquorum erunt ut iidem ter-

$=-aA^{-2}$. Similiter si ponatur $\frac{1}{A^n}=B$, & ideò $\frac{1}{A^n}\times A^n = A^nB = 1$, erit per cas. 3. & 1. $naA^{n-1}B + bA^n = 0$ & $bA^n = -naA^{n-1}B = \frac{-naA^{n-1}}{A^n} = \frac{-na}{A}$, atquè adeò b, seu momentum ipsius $\frac{1}{A^n}$, erit $\frac{-na}{A^{n+1}}$. Simil modo patent casus 5. & 6. 90.

(k) * *Momenta terminorum reliquorum.* Quoniam enim A, B, C, D, E, F, sunt continuè proportionales erit $D:C=C:B = \frac{CC}{D} = CCD^{-1}$ & similiter invenitur $A = \frac{C^3}{D^2} = C^3D^{-2}$, $E=\frac{D^2}{C}$, $F=\frac{D^3}{CC}$ &c.

 Qua-

termini multiplicati per numerum intervallorum inter ipſos & terminum datum. Sunto A, B, C, D, E, F continuè proportionales; & ſi detur terminus C, momenta reliquorum terminorum erunt inter ſe ut $-2A-B$, D, 2E, 3F.

(l) *Corol.* 2. Et ſi in quatuor proportionalibus duæ mediæ dentur, momenta extremarum erunt ut eædem extremæ. Idem intelligendum eſt de lateribus rectanguli cujuſcunque dati.

(m) *Corol.* 3. Et ſi ſumma vel differentia duorum quadratorum detur, momenta laterum erunt reciprocè ut latera.

Scholium.

In epiſtolâ quâdam ad D. *J. Collinium* noſtratem 10 Decem. 1672 datâ, cùm deſcripſiſſem methodum tangentium quam ſuſpicabar eandem eſſe cum methodo *Slufii* tum nondum communicatâ; ſubjunxi: *Hoc eſt unum particulare vel corollarium potius methodi generalis, quæ extendit ſe citra moleſtum ullum calculum, non modo* (n) *ad ducendum tangentes ad quaſvis curvas ſive geometricas ſive mechanicas vel quomodocunque rectas lineas aliaſve curvas reſpicientes, verum etiam ad reſolvendum alia abſtruſiora problematum genera de* (o) *curvitatibus*, (p) *areis, longitudinibus*,

Quarè ob datum C, cujus nullum eſt momentum, momenta reliquorum terminorum erunt (per caſ. 3. & 4.) $-2dC^3D^{-3}$ $-dC^2D^{-2}$, d, $\frac{2dD}{C}$, $\frac{3dD^2}{CC}$, & multiplicando ſingulos terminos per $\frac{D}{d}$, manebit proportio terminorum $-2C^3D^{-2}$ $-C^2D^{-1}$, D, $\frac{2D^2}{C}$, $\frac{3D^3}{CC}$, hoc eſt $-2A$, $-B$, D, $2E$, $3F$. Eſt autem 2 numerus intervallorum inter terminum A, & terminum datum C, ſicut & intervallorum inter E & C, 1 intervallum inter B & C, ac inter C & D, & 3, numerus intervallorum inter C & F. Quarè patet veritas corollarii.

(l) * *Cor.* 2. Sit $A:B=C:D$, ſeu $BC=AD$ & BC, rectangulum datum erit (per caſ. 1.) $ad+dA=0$, & hinc $aD=-dA$ ideóque $a:-d=A:D$.

(m) * *Cor.* 3. Sit $A^2+B^2=C^2$, & quadratum C^2 ſit datum, erit (per caſ. 3.) $2aA+2bB=0$, ideóque $Aa=-bB$, & proinde $a:-b=B:A$. In iis duobus corollariis neceſſum eſt ut variabili unâ creſcente, decreſcat altera, & idcircò dum momentum unius poſitivum eſt, alterius momentum eſt negativum.

(n) * *Ad ducendum tangentes* (150. 156. lib. 1.) vide Marchionis Hoſpitalii analyſim infinitè parvorum, ubi methodus illa tangentium fusè & perſpicue exponitur.

(o) * *De curvitatibus* (216. lib. 1.).

(p) * *Areis, longitudinibus &c.* Hæc plurimis exemplis, tum 1°. tum 2°. libro contentis manifeſta ſunt. Vide tractatum Newtoni de quadraturâ curvarum.

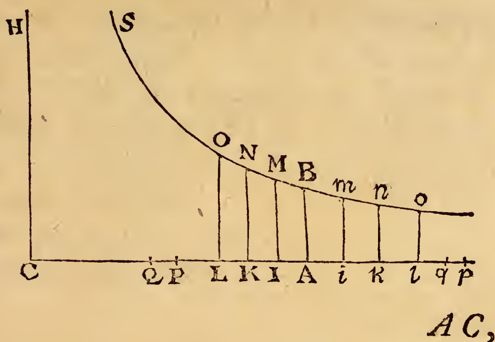
bus, (q) *centris gravitatis curvarum &c. neque (quemadmodum* Huddenii *methodus de maximis & minimis) ad solas restringitur æquationes illas quæ quantitatibus surdis sunt immunes. Hanc methodum intertexui alteri isti quâ æquationum exegesin instituo reducendo eas ad series infinitas.* Hactenus epistola. Et hæc ultima verba spectant ad tractatum quem anno 1671 de his rebus scripseram. Methodi vero hujus generalis fundamentum continetur in lemmate præcedente. (†)

LIBER SECUND. SECTIO II. PROP. VIII. THEOR. VI.

PROPOSITIO VIII. THEOREMA VI.

Si corpus in medio uniformi, gravitate uniformiter agente, rectâ ascendat vel descendat, & spatium totum descriptum distinguatur in partes æquales, inque principiis singularum partium (addendo resistentiam medii ad vim gravitatis, quando corpus ascendit, vel subducendo ipsam quando corpus descendit) investigentur vires absolutæ; dico quod vires illæ absolutæ sunt in progressione geometricâ.

Exponatur enim vis gravitatis per datam lineam AC; resistentia per lineam indefinitam AK; vis absoluta in descensu corporis per differentiam KC; velocitas corporis per lineam AP, quæ sit media proportionalis inter AK & AC,

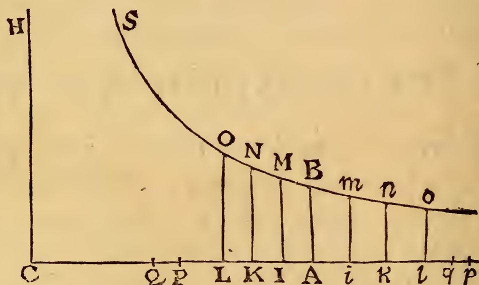


(q) * *Centris gravitatis* (66. lib. 1.).

(†) In præcedentibus Editionibus istud scholium hoc modo se habebat.

In litteris quæ mihi cum Geometra peritissimo G. G. Leibnitio annis abhinc decem intercedebant, cum significarem me compotem esse methodi determinandi maxima & minima, ducendi Tangentes, & similia peragendi, quæ in terminis surdis æque ac in rationalibus procederet, & literis transpositis hanc sententiam involventibus. (*Datâ æquatione quotcumque fluentes quantitates involvente, Fluxiones invenire, & vice versâ*) eamdem celarem; Rescripsit Vir Clarissimus se quoque in ejusmodi methodum incidisse, & methodum suam communicavit à meâ vix abludentem præterquàm in verborum & notarum formulis, & idea generationis quantitatum. Utriusque fundamentum continetur in hoc Lemmate.

AC, (r) ideoque in ſubduplicatâ ratione reſiſtentiæ; incrementum reſiſtentiæ datâ temporis particulâ factum per lineolam *KL*, & contemporaneum velocitatis incrementum per lineolam *PQ*; & centro *C* aſymptotis rectangulis *CA*, *CH* deſcribatur hyperbola quævis *BNS*, erectis perpendiculis *AB*, *KN*, *LO* occurrens in *B*, *N*, *O*. Quoniam *AK* eſt ut *APq*, erit hujus momentum *KL* ut (ſ) illius momentum 2*APQ*: id eſt, ut *AP* in *KC*, nam velocitatis incrementum *PQ* (per motus leg. II.) proportionale eſt vi generanti *KC*. Componatur ratio ipſius *KL* cum ratione ipſius *KN*, & fiet rectangulum *KL*×*KN* ut *AP*×*KC*×*KN*; hoc eſt, ob (t) datum rectangulum *KC*×*KN*, ut *AP*. Atqui areæ hyperbolicæ *KNOL* ad rectangulum *KL*×*KN* ratio ultima, ubi coeunt puncta *K* & *L*, eſt æqualitatis. Ergo area illa hyperbolica evaneſcens eſt ut *AP*. Componitur igitur area tota hyperbolica *ABOL* ex particulis *KNOL* velocitati *AP* ſemper proportionalibus, & (u) propterea ſpatio velocitate iſtâ deſcripto proportionalis eſt. Dividatur jam area illa in partes æquales *ABMI*, *IMNK*, *KNOL*, &c. & vires abſolutæ *AC*, *IC*, *KC*, *LC*, &c. (x) erunt in progreſſione geometricâ. *Q. E. D.* Et (z) ſimili argumento, in aſcenſu corporis, ſumen-



(r) * *Ideóque in ſubduplicatâ ratione reſiſtentiæ.* Ob datam A C.

(ſ) * *Ut illius momentum* 2 *APQ.* Cum enim ſit AK × AC = AP² (per conſtr.) erit AC × KL = 2 AP × PQ (per caſ. 1. & 3. Lem. 2.) id eſt, ob datam AC; KL eſt ut AP × PQ, & quia velocitatis incrementum PQ, dato temporis momento genitum (per mot. leg. 2,) proportionale eſt vi generanti KC, erit KL, ut AP × KC.

(t) * *Ob datum rectangulum* KC × KL (per theor. 4. de hyp.).

(u) * *Et propterea ſpatio velocitate iſtâ deſcripto proportionalis eſt;* dato enim temporis momento, ſpatium deſcriptum eſt ut velocitas (12).

(x) * *Erunt in progreſſione geometricâ* (379. lib. 1.).

(z) * *Et ſimili argumento.* Exponatur enim vis gravitatis per datam lineam AC, reſiſtentia per lineam indefinitam AI,

mendo, ad contrariam partem puncti *A*, æquales areas *ABmi*, *imnk*, *knol*, &c. constabit quod vires absolutæ *AC*, *iC*, *kC*, *lC*, &c. sunt continuè proportionales. Ideoque si spatia omnia in ascensu & descensu capiantur æqualia; omnes vires absolutæ *lC*, *kC*, *iC*, *AC*, *IC*, *KC*, *LC*, &c. erunt continuè proportionales. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc si spatium descriptum exponatur per aream hyperbolicam *ABNK*; exponi possunt vis gravitatis, velocitas corporis & resistentia medii per lineas *AC*, *AP* & *AK* respectivè; (a) & vice versâ.

Corol. 2. Et velocitatis maximæ, quam corpus in infinitum descendendo potest unquam acquirere, (b) exponens est linea *AC*.

Corol. 3. Igitur si in datâ aliquâ velocitate cognoscatur resistentia medii, invenietur velocitas maxima, sumendo ipsam ad velocitatem illam datam in subduplicatâ ratione, quam habet vis gravitatis (c) ad medii resistentiam illam cognitam.

P R O-

A l, vis absoluta in ascensu corporis per summam C l, velocitas corporis per lineam A p quæ sit media proportionalis inter A l & A C, ideóque in subduplicatâ ratione resistentiæ; decrementum resistentiæ datâ temporis particulâ factum per lineolam l k, & contemporaneum velocitatis decrementum per lineolam p q; & describatur ut suprà hyperbola S B o; Quoniam A l est ut Ap^2 erit hujus momentum k l ut illius momentum 2 A p q, id est, ut A p in l C; nam velocitatis decrementum p q (per mot. leg. 2.) proportionale est vi generanti l C, componatur ratio ipsius k l cum ratione ipsius l o, & fiet rectangulum k l × l o ut A p × l C × l o, hoc est, ob datum rectangulum l C × l o, ut A p. Ergo, coeuntibus punctis k, l, area hyperbolica k n o l = k l × l o, est ut A p. Componitur igitur area tota hyperbolica 2 A B o l ex particulis k n o l velocitati A p semper proportionalibus, & propterea spatio velocitate istâ descripto proportionalis est. Dividatur jam area illa in partes æquales A B m i; i m n k, k n o l, &c. & vires absolutæ A C, i C, k C, l c, &c. erunt in progressione geometricâ. Q. E. D. 90.

(a) * *Et vice versâ.* Simili modo si in ascensu corporis, spatium usque ad motûs extinctionem describendum exponatur per aream hyperbolicam A B n k exponi possunt vis gravitatis, velocitas corporis & resistentia medii per lineas A C, A p, A k.

(b) * *Exponens est linea A C.* Fiat enim A P = A C, & quia (per constr.) $AP^2 = AK \times AC$, erit etiam A K = A C, ideóque coincidente ordinatâ K N, cum asymptoto C H, area hyperbolica ABNK, infinita evadet, & spatium descendendo descriptum huic proportionale erit quoque infinitum, gravitas verò, resistentia & velocitas corporis exponentur per lineam A C, eritque proinde resistentia gravitati æqualis, & propterea velocitas A C maxima.

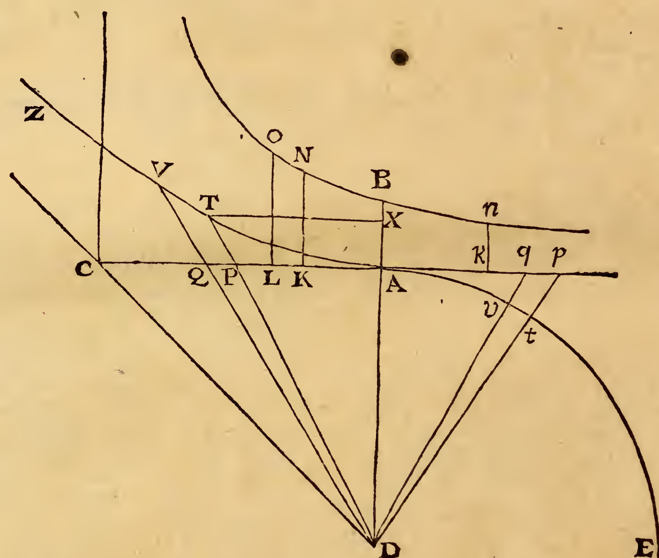
(c) * *Ad medii resistentiam illam cognitam.* Cum enim velocitates sint in subduplicatâ ratione resistentiarum (per hyp.) & resistentia sit gravitati æqualis, ubi velocitas maxima est, (per cor. 2.) ve-

De Motu Corporum.

PROPOSITIO IX. THEOREMA VII.

Positis jam demonstratis, dico quod, si tangentes angulorum sectoris circularis & sectoris hyperbolici sumantur velocitatibus proportionales, existente radio justæ magnitudinis: erit tempus omne ascendendi ad locum summum ut sector circuli, & tempus omne descendendi à loco summo ut sector hyperbolæ.

Rectæ AC, quâ vis gravitatis exponitur, perpendicularis & æqualis ducatur AD. Centro D semidiametro AD descri-



batur tum circuli quadrans AtE; tum hyperbola rectangula AVZ axem habens AX, verticem principalem A, & asymptoton DC. Ducantur Dp, DP, & erit sector circularis AtD ut tempus omne ascendendi ad locum summum; &

velocitas maxima erit ad velocitatem datam in subduplicatâ ratione gravitatis ad medii resistentiam illam cognitam.

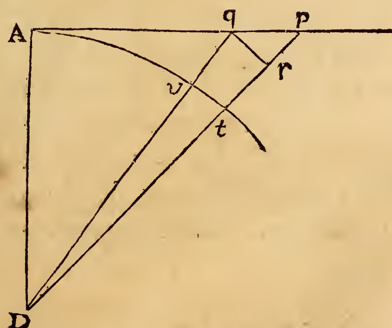
& ſector hyperbolicus ATD ut tempus omne deſcendendi à loco ſummo: Si modo ſectorum tangentes Ap, AP, ſint ut velocitates.

Caſ. 1. Agatur enim Dvq abſcindens ſectoris ADt & trianguli ADp momenta, ſeu particulas quam minimas ſimul deſcriptas tDv & qDp. Cum particulæ illæ, ob angulum communem D, ſunt in (d) duplicatâ ratione laterum, erit particula tDv ut $\frac{qDp \times tD\ quad.}{pD\ quad.}$, id eſt, ob datam tD, ut $\frac{qDp}{pD\ quad.}$. Sed $pD\ quad.$ eſt $AD\ quad. + Ap\ quad.$ id eſt, (e) $AD\ quad. + AD \times Ak$, ſeu $AD \times Ck$; & (f) qDp eſt $\frac{1}{2} AD \times pq$. Ergo ſectoris particula tDv eſt ut $\frac{pq}{Ck}$, id eſt, ut velocitatis decrementum quam minimum pq directè, & vis illa Ck quæ velocitatem diminuit inversè; (g) atque ideo ut particula temporis decremento velocitatis reſpondens. Et componendo fit ſumma particularum omnium tDv in ſectore ADt, ut ſumma particularum temporis ſingulis velocita-tis

(d) * *In duplicatâ ratione laterum.* Nam ſi ex puncto q ducatur ad D p lineola q r parallela ipſi v t, duo triangula evaneſcentia D q r, D v t ſimilia ſunt & in ratione duplicatâ laterum D q D v, (per prop. 19. lib. 6. Elem.) & triangulum D q p æquale eſt triangulo D q r evaneſcente p r reſpectu D q; eſt igitur pD^2 ad tD^2, ſeu AD^2, ut triangulum q D p ad triangulum t D v, & ideo $tDv = \frac{AD^2 \times qDp}{pD^2}$, undè ob datum circuli radium AD, particula t D v eſt ut $\frac{qDp}{pD^2}$.

(e) * *Id eſt.* Nam $AC \times Ak$, ſeu $AD \times Ak = Ap^2$ (per prop. 8.) & $AD^2 + AD \times Ak = AD \times (AC + Ak) = AD \times Ck$.

(f) * *Et* qDp *eſt* $\frac{1}{2}$ $AD \times pq$, ob AD baſi pq productæ normalem.



(g) * *Atquè ideò ut particula temporis decremento velocitatis reſpondens* (18).

tis decrescentis Ap particulis amissis pq respondentium, usque dum velocitas illa in nihilum diminuta evanuerit; hoc est, sector totus ADt est ut tempus totum ascendendi ad locum summum. *Q. E. D.*

Cas. 2. Agatur DQV abscindens tum sectoris DAV, tum trianguli DAQ particulas quam minimas TDV & PDQ, & erunt hæ particulæ ad invicem ut DTq ad DPq, id est (si TX & AP parallelæ sint) ut (h) DXq ad DAq vel TXq ad APq, & divisim ut $DXq-TXq$ ad $DAq-APq$. (i) Sed ex naturâ hyperbolæ $DXq-TXq$ est ADq, & per hypo-

(h) * *Ut* DX^2 *ad* DA^2, ob triangula DTX, DPA similia (per prop. 2. lib. 6. Elem.)

(i) * *Sed ex natura hyperbolæ &c.* Quoniam (per theor. 2. de hyperb.) rectangulum $2\overline{AD+AX}\times AX$, est ad quadratum ordinatæ TX, ut latus transversum est ad latus rectum, hæc verò Hyperbola est æquilatera, erit (per theor. 5. de hyperb.) $TX^2=2\overline{AD+AX}\times AX$. Sed est $2\overline{AD+AX}\times AX=DX^2-DA^2$ (per prop. 6. lib. 2. elem.) ergò $TX^2=DX^2-DA^2$, ac proindè $DX^2-TX^2=DA^2$.

(k) hypothesin APq est $AD \times AK$. Ergo particulæ sunt ad invicem ut ADq ad $ADq - AD \times AK$; id est, ut AD ad $AD - AK$ seu AC ad CK: ideoque sectoris particula TDV est $\frac{PDQ \times AC}{CK}$; atque ideo (l) ob datas AC & AD, ut $\frac{PQ}{CK}$, id est, ut incrementum velocitatis directè, utque vis generans incrementum inversè; atque ideo ut particula temporis incremento respondens. Et componendo fit summa particularum temporis, quibus omnes velocitatis AP particulæ PQ generantur; ut summa particularum sectoris ATD, id est, tempus totum ut sector totus. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc si AB æquetur quartæ parti ipsius AC, spatium quod corpus tempore quovis cadendo describit, erit ad spatium, quod corpus velocitate maximâ AC, eodem tempore uniformiter progrediendo describere potest, ut area $ABNK$, quâ spatium cadendo descriptum exponitur, ad aream ATD, quâ tempus exponitur. Nam cum sit AC ad AP ut AP ad AK, erit (per corol. 1. lem. 11. hujus) LK ad PQ ut $2AK$ ad AP, hoc est, ut $2AP$ ad AC, & inde LK ad $\frac{1}{2}PQ$ ut AP ad $\frac{1}{4}AC$ vel AB; est & KN ad AC vel AD ut (m) AB ad CK; itaque ex æquo $LKNO$ ad DPQ ut AP ad CK. (n) Sed erat DPQ ad DTV ut CK ad AC. Ergo rursus ex æquo $LKNO$ est ad DTV ut AP ad AC; hoc est, ut velocitas corporis cadentis ad velocitatem maximam quam corpus cadendo potest acquirere. Cum igitur arearum $ABNK$ & ATD momenta $LKNO$ & DTV sunt ut velocitates, erunt arearum illarum partes omnes simul genitæ (†) ut spatia simul descripta, ideoque areæ totæ ab initio geni-

(k) * *Et per hypothesim* AP^2 *est* $AD \times Ak$, seu $AC \times Ak$ (per prop. 8.)

(l) * *Ob datas* AC *&* AD. Est enim $PDQ = \frac{1}{2} AD \times PQ$, & ideò $TDV = \frac{\frac{1}{2} AD \times AC \times PQ}{CK}$

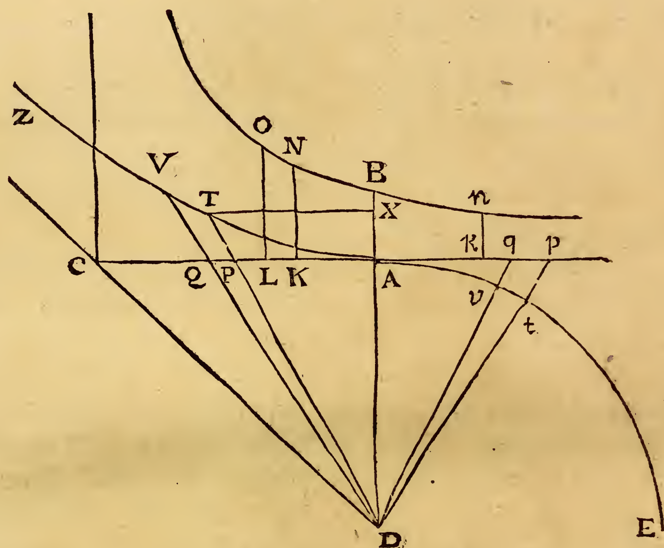
(m) * *Ut* AB *ad* CK (per theor. 4. de hyperb.

(n) * *Sed erat* DPQ *ad* DTV *&c.* Suprà cas. 2.

(†) * *Ut spatia simul descripta* (11).

genitæ *ABNK* & *ATD* ut ſpatia tota ab initio deſcenſus deſcripta. *Q. E. D.*

Corol. 2. (o) Idem conſequitur etiam de ſpatio quod in aſcenſu deſcribitur. Nimirum quod ſpatium illud omne ſit ad



ſpatium, uniformi cum velocitate *AC* eodem tempore deſcriptum, ut eſt area *ABnk* ad ſectorem *ADt*.

Corol. 3. Velocitas corporis tempore *ATD* cadentis eſt ad velocitatem, quam eodem tempore in ſpatio non reſiſtente acquireret, ut triangulum *APD* ad ſectorem hyperbolicum *ATD*.

(o) * *Idem conſequitur* &c. Eadem eſt prorſus demonſtratio, ſi loco AK & QP ſubſtituantur Ak & qp, & ad primum demonſtrationis caſum attendatur.

91. Cor. Velocitas Ap corporis in medio reſiſtente aſcendentis ad maximam altitudinem ABnk, eſt ad velocitatem AP corporis in eodem medio è quiete deſcendentis per æquale ſpatium ABNK, ut ſecans anguli ADp ad radium, aut quod idem eſt, ut tangens Ap anguli ADp, ad ejuſdem ſinum. Quoniam enim (per hyp.) area ABNK, æqualis eſt ABnk, erit (380 Lib. 1.) $Ck:AC = AC:CK$, & dividendo $Ak:AC = AK:CK$, & alternando, $Ak:AK = AC:CK = Ck$ (ſive $AC + Ak$)$:AC$, & ideò $Ak \times AC : AK \times AC = AC^2 + Ak \times AC : AC^2$; Sed (per dem. prop. 8.) $AC \times Ak = Ap^2$, & $AC \times AK = AP^2$. Quare $Ap^2 : AP^2 = AC^2 + Ap^2$ ſeu $Dp^2 : AC^2$, & hinc $Ap:AP = Dp:AC$, ſeu AD. Q. E. D.

ATD. Nam velocitas in medio non resistente (p) foret ut tempus *ATD*, & in medio resistente est ut *AP*, id est, ut triangulum *APD*. Et (q) velocitates illæ initio descensus æquantur inter se, perinde ut areæ illæ *ATD*, *APD*.

Corol. 4. (r) Eodem argumento velocitas in ascensu est ad velocitatem, quâ corpus eodem tempore in spatio non resistente omnem suum ascendendi motum amittere posset, ut triangulum *ApD* ad sectorem circularem *AtD*; sive ut recta *Ap* ad arcum *At*.

Corol. 5. Est igitur tempus, quo corpus in medio resistente cadendo velocitatem *AP*, acquirit, ad tempus, quo velocitatem maximam *AC* in spatio non resistente cadendo acquirere posset, (s) ut sector *ADT* ad triangulum *ADC*: & tempus,

(p) * *Foret ut tempus ATD*. Cresceret enim uniformiter, ideòque ut tempus (25. lib. 1.)

(q) * *Et velocitates illæ initio descensûs æquantur inter se* ob resistentiam respectu gravitatis nullam, ubi velocitas nascitur. Cum igitur velocitates in medio non resistente sint semper inter se ut areæ A T D, & in medio resistente sint ut triangula A P D, erit velocitas in medio resistente tempore finito A T D acquisita ad velocitatem initio descensûs in eo medio resistente ut triangulum finitum A P D, ad triangulum nascens A P D, & erit velocitas initio descensûs in medio non resistente ad velocitatem in eodem medio tempore finito ATD acquisitam, ut area nascens A T D (æqualis areæ nascenti A P D) ad aream finitam A T D; Quare (ex æquo) velocitas corporis tempore finito A T D cadentis in medio resistente est ad velocitatem quam eodem tempore in medio non resistente cadendo acquireret ut triangulum A P D ad sectorem hyperbolicum A T D.

(r) * *Eodem argumento*. Nam velocitas in medio non resistente foret ut tempus AtD, & in medio resistente est ut A p, id est, ut triangulum a p D ob datam A D, & velocitates illæ in fine ascensûs ubi evanescunt æquantur inter se, perindè ut areæ evanescentes AtD, ApD; est autem triangulum $ApD = \frac{1}{2} AD \times Ap$, & sector circularis $AtD, = \frac{1}{2} AD \times At$. Quare A p D est ad A t D, ut A p ad A t.

91 92 Hinc si velocitas ascensûs A p in medio resistente velocitati maximæ A C æqualis fuerit, erit velocitas A p seu A C, ad velocitatem quâ corpus eodem tempore in spatio non resistente omnem suum ascendendi motum amittere posset, ut triangulum A C D, ad octantem circuli, sive ut radius ad octavam partem peripheriæ, aut quod idem est, ut quadratum circulo circumscriptum ad circuli aream. Dum enim fit $Ap = AC$, triangulum A p D æquatur triangulo A C D, & sector A t D, octanti circuli, ideòque arcus A t est pars octava peripheriæ, & triangulum A C D est ad sectorem A t D, ut A C ad arcum A t, ac prætereà triangulum A C D, ob $AC = AD$, est pars octava quadrati circulo circumscripti.

(s) * *Ut sector ADT ad triangulum ADC*. Cum enim A P exponat velocitatem tempore A T D in medio resistente acquisitam, sumatur A Y talis ut exponat velocitatem tempore eodem in medio non resistente productam, & erit per Coroll. 2. A P ad A Y ut A P D, ad A T D, cumque etiam A C exponat velocitatem maximam,

pus, quo velocitatem *Ap* in medio resistente ascendendo possit amittere, ad tempus quo velocitatem eandem in spatio non resistente ascendendo posset amittere, ut (t) arcus *At* ad ejus tangentem *Ap*.

Corol. 6. Hinc ex dato tempore datur spatium ascensu vel descensu descriptum. Nam corporis in infinitum descendentis datur velocitas maxima (per corol. 2. & 5. theor. VI. lib. II.) inde.

ximam, erit A Y ad A C ut tempus quo prior celeritas A Y in medio non resistente acquiri potest, ad tempus quo velocitas maxima A C in medio etiam non resistente acquireretur; & cum tempus quo celeritas A Y acquiritur, exprimatur per aream A T D, erit A Y ad A C ut A T D ad aream quæ exponet tempus quo velocitas maxima in medio non resistente acquiritur, itaque cum sit A P : A Y = A P D : A T D & A Y : A C = A T D : ad hanc aream, erit ex æquo A P : A C = A P D, ad hanc aream, sed sumptâ communi altitudine D H est A P ad A C = Tri. A P D ad Tri. A D C, ergo area quæ exponet tempus quo maxima velocitas in medio non resistente acquiritur, est area A D C. Undè sequitur quod corpus in medio resistente, velocitatem maximam A C acquirere cadendo non potest nisi tempore infinito. Cum enim sit A P = A C, coincidit D T cum Hyperbolæ A T V asimptoto D C, & sector A D T fit infinitus.

(t) * *Ut arcus A t, ad ejus tangentem A p.* Siquidem (per cor. 4.) velocitas A p in medio resistente tempore A t D extinguenda, est ad velocitatem eodem tempore in spatio non resistente extinguendam ut triangulum A p D ad sectorem A t D; & etiam ut tempus quo velocitas A p in spatio non resistente extingueretur ad tempus A t D quo altera velocitas in spatio non resistente extinguitur quod idem est cum eo quo velocitas A p in spatio resistente extinguitur. Quare tempus quo velocitas A p, in spatio non resistente evanesceret est ad tempus A t D quo in spatio resistente extingueretur ut triangulum A p D, ad sectorem A t D, sive tangens A p ad ejus arcum A t. Patet ergò propositum.

93. Hinc tempus quo corpus velocitatem A p in medio resistente ascendendo amittere potest, est ad tempus quo velocitatem maximam A C in spatio non resistente ascendendo amitteret vel descendendo acquireret ut sector circularis A t D, ad triangulum A D C, seu ut arcus A t ad radium A D. Nam in medio non resistente velocitas A p est ad velocitatem A C, ut tempus A p D, quo generatur vel extinguitur velocitas A p, ad tempus quo generatur vel extinguitur velocitas A C, quod proindè erit $\frac{A C \times A p D}{A p}$, seu $\frac{1}{2}$ A D × A C, hoc est, triangulum A D C.

Cum igitur tempus quo velocitas A p, in medio resistente extinguitur, exponatur per sectorem A t D, patet propositum.

94. Tempus quo corpus in medio resistente descendendo acquirit velocitatem A P, vel ascendendo amittit velocitatem A p, est ad tempus quo eandem velocitatem in medio non resistente acquirit vel amittit, ut sector A D T, vel A D t, ad triangulum A D P, vel A D p, respectivè. Etenim (per cor. 5. & not. 93.) tempus quo in medio resistente generatur velocitas A P, vel extinguitur velocitas A p, est ad tempus quo in spatio non resistente generatur vel extinguitur velocitas maxima A C, ut A D T vel A D t, ad A D C; Et tempus quo in spatio non resistente generatur vel extinguitur velocitas A C, est ad tempus quo generatur vel extinguitur in eodem spatio non resistente, velocitas A P vel A p, ut A C ad A P vel A p, & sumpta communi altitudine D A ut A D C ad P D vel A p D. Quare (ex æquo) tempus quo in medio resistente ge-

(u) indeque datur tempus quo corpus velocitatem illam in ſpatio non reſiſtente cadendo poſſet acquirere. Et ſumendo ſecto-

LIBER SECUND. SECTIO II. PROP. IX. THEOR. VII.

rem *ADT* vel *ADt* ad triangulum *ADC* in ratione temporis dati ad tempus modo inventum; (x) dabitur tum velocitas *AP*

generatur velocitas A P, vel extinguitur velocitas A p, eſt ad tempus quo velocitas eadem in ſpatio non reſiſtente producitur vel amittitur, ut A D T ad A D P, vel A D p. Q. E. D.

95. Si celeritas A p corporis in medio reſiſtente aſcendentis maximæ A C æqualis fuerit, erit A D p = A D C, & ſector A D t, circuli octans. Quarè tempus quo corpus in medio reſiſtente aſcendendo amittere poteſt velocitatem maximam A C eſt ad tempus quo eandem in ſpatio non reſiſtente amitteret, ut circuli octans ad triangulum A D C, hoc eſt, ut area circuli ad quadratum circumſcriptum, ſeu etiam ut 8a. pars peripheriæ ad radium.

(u) 96. *Indèque datur tempus.* Cum enim vires acceleratrices uniformes, ſint ut velocitates quas generant directè & 96.
tempora quibus illas generant inversè (13. lib. 1.) datâ vi acceleratrice uniformi quâ corpus in medio quovis ſollicitatur, ſeu datâ vis illius ratione ad notam quamlibet aliam vim v. gr. ad corporum terreſtrium gravitatem, datâque ſimul velocitate quam vis illa acceleratrix produxit, dabitur tempus quo velocitas illa data genita eſt. Sit enim vis acceleratrix data ad vim notam gravitatis, ut a ad b, velocitas datâ vi illâ acceleratrice tempore x genita c, & velocitas quam vis gravitatis tempore quovis dato t generat C, erit $a : b = \frac{c}{x} : \frac{C}{t}$. Undè invenitur tempus $x = \frac{bct}{aC}$.

(x) * *Dabitur tum velocitas* A P, vel A p. (Per cor. 5. & not. 92.).

De Motu Corporum.

AP vel *Ap*, (y) tum area *ABNK* vel *ABnk*, (z) quæ eſt ad ſectorem *ADT* vel *ADt* ut ſpatium quæſitum ad ſpatium, quod tempore dato, cum velocitate illâ maximâ jam ante inventâ, uniformiter deſcribi poteſt.

Corol. 7. (a) Et regrediendo, ex dato aſcenſus vel deſcenſus ſpatio *ABnk* vel *ABNK*, dabitur tempus *ADt* vel *ADT*.

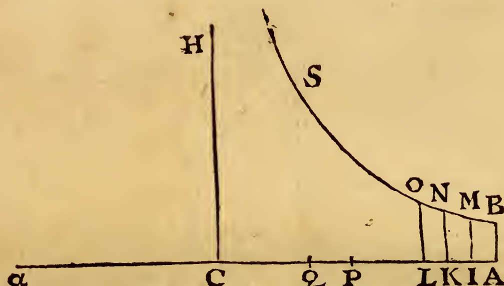
(y) * *Tum area ABNK vel ABnk.* Eſt enim (ex dem. prop. 8.) AC:AP = AP:AK, & AC:Ap = Ap:Ak, & ideò datis AC & AP vel Ap dabuntur AK vel Ak, & areæ correſpondentes ABNK, ABnk, quæ per tabulas Logarithmorum inveniri poſſunt (384. lib. 1.).

(z) * *Quæ eſt ad ſectorem ADT, vel ADt.* (per cor. 1. & 2.).

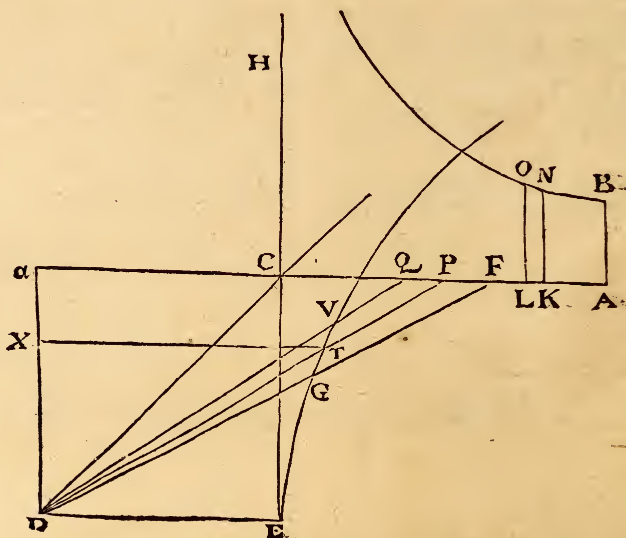
97. (a) *Et regrediendo.* Nimirum capienda eſt area ABnk, vel ABNK ad triangulum ADC in datâ ratione ſpatii dati aſcenſûs vel deſcenſûs ad duplum ſpatii, quod corpus in medio non reſiſtente cadendo deſcribit ut velocitatem maximam AC acquirat, atque ità dabitur Ak vel AK. Et hinc dabitur Ap vel AP, ſeu velocitas; ex his autem dabitur ſector ADt vel ADT, ſeu tempus (per cor. 5.). Nam ſpatium quod corpus in medio non reſiſtente cadendo deſcribit ut velocitatem maximam AC acquirat dicatur *A*, tempus quo ſpatium illud deſcribitur *T*, ſpatium quod in medio reſiſtente deſcribit ut acquirat velocitatem AP, vel amittat velocitatem Ap dicatur *s*, tempus *t*, & ſpatium quod corpus tempore illo *t* & velocitate maximâ AC uniformiter progrediendo deſcribit fit *S*, & quia (29. lib. 1.) corpus velocitate maximâ AC uniformiter

ter progrediendo, tempore *T*, defcribit fpatium 2*A*, erit (5. lib. 1.) *S* : 2*A* = *t* : *T*. Sed (per cor. 5. & not. 93.) *t* : *T* = ADT vel ADt : ADC, ideóque *S* : 2*A* = ADT vel ADt : ADC, & (per cor. 1. ac 2.) *s* : *S* = ABNK vel ABnk : ADT vel ADt, refpectivè. Quarè (ex æquo) *s* : 2*A* = ABNK vel ABnk : ADC. Q. E. D.

98. Si corpus cum velocitate quæ æqualis fit maximæ AC, verticaliter projiciatur deorfum, æquabili motu defcendet, ob refiftentiam gravitati æqualem & contrariam (per cor. 2. prop. 8.) fi minori cum velocitate projiciatur, exponatur velocitas illa per lineæ AC partem AP, & motus corporis projecti idem erit ac fi è quiete defcendendo velocitatem datam AP, jam acquifiviffet & deindè pergeret moveri; Quare motus projecti in hoc cafu ex fuperioribus facile determinabitur. 98.



99. Verum fi projectionis velocitas terminali AC major eft, conftructiones propofitionum 8 & 9 mutandæ erunt. Et quidem conftructio propofitionis 8æ. fic mutanda. Defcriptâ inter afymptotos orthogonales AC, CH Hyperbolâ quâlibet SONB, producatur afymptotus AC in a, & exponatur vis gravitatis per datam lineam aC, refiftentia initio motûs per lineam aA, refiftentia elapfo quovis tempore per lineam indefinitam aK. Velocitas corporis per lineam aP quæ fit media proportionalis inter aK & aC, ideóque in fubduplicatâ ratione refiftentiæ. Decrementum refiftentiæ datâ temporis particulâ factum per lineolam KL & contemporaneum velocitatis decrementum per lineolam PQ. Quoniam aK eft ut aP^2, erit hujus momentum KL, ut illius momentum 2aPQ, id eft, ut aP in KC. Nam velocitatis decrementum PQ, (per mot. Leg. 2.) proportionale eft vi generanti KC, quæ eft exceffus refiftentiæ aK, fuprà vim gravitatis aC. Componatur ratio ipfius KL cum ratione ipfius KN, & fiet rectangulum KL × KN ut aP × KC × KN, hoc eft, ob datum rectangulum KC × KN, ut aP, ergò rectangulum evanefcens KN × KL, hoc eft, area hyperbolica KNOL, eft ut aP. Componitur igitur area tota hyperbolica ABOL, ex particulis KNOL, velocitati aP femper proportionalibus, & propterea fpatio velocitate iftâ defcripto proportionalis eft. Dividatur jam area illa in partes æquales ABMI, IMNK, KNOL, &c. & vires abfolutæ AC, IC, KC, LC, &c. erunt in progreffione geometricâ. Si fpatium defcriptum exponatur per aream Hyperbolicam ABNK, exponi poffunt vis gravitatis, velocitas corporis & refiftentia medii per lineas aC, aP, aK.



Propositionis 9^{ae}. constructio in hanc abit. Cæteris ut in figurâ & constructione superiori manentibus, capiatur aF media proportionalis inter aC & aA, & ideò velocitatem projectionis initialem exponens, completo quadrato aCED, centro D describatur hyperbola rectangula EGTV, semiaxem transversum habens DE, verticem principalem E, & asymptotum DC. Jungantur DF, DP Hyperbolæ occurrentes in G & T, & erit sector hyperbolicus GDT ut tempus descensûs per spatium ABNK. Agatur enim DVQ abscindens tum sectoris GDV tum trianguli FDQ particulas quam minimas TDV, PDQ, & erunt hæ particulæ ad invicem ut DT^2 ad DP^2, id est, si TX & aP parallelæ sint, ut DX^2 ad Da^2, vel TX^2 ad aP^2, & divisim ut $TX^2 - DX^2$ ad $aP^2 - aD^2$; sed (ex naturâ Hyperb.) $TX^2 - DX^2$ est aD^2, & (per Hyp.) aP^2 est $aD \times aK$; ergò particulæ TDV, PDQ, sunt ad invicem ut aD^2, ad $aD \times aK - aD^2$, id est, ut aD ad $aK - aD$, seu ut aC ad CK; ideóque sectoris particula TDV, est $\frac{PDQ \times aC}{CK}$, atque ideo ob datas aC & aD, ut $\frac{PQ}{CK}$, id est ut decrementum velocitatis directè utque vis generans decrementum inversè, atque ideò ut particula temporis decremento velocitatis respondens, & componendo, fit summa particularum temporis quibus omnes velocitatis FP particulæ PQ extinguuntur, ut summa particularum sectoris GDT, id est, tempus totum ut sector totus. Q. E. D.

100. Coroll. 1. Quoniam coincidente puncto P cum C, coincidit etiam K cum C, & DT cum asymptoto DC, liquet corporis projecti velocitatem aP nonnisi descripto spatio infinito, elapsoque infinito tempore, fieri posse velocitati terminali aC æqualem.

101 Coroll. 2. Si dignitas hyperbolæ BNO seu rectangulum $CA \times AB$, sit $\frac{1}{4} aC^2$, spatium quod corpus tempore quovis describit, erit ad spatium quod corpus velocitate terminali aC eodem tempore uniformiter progrediendo describere potest, ut area ABNK quâ spatium descriptum exponitur ad aream GDT quâ tempus exponitur. Nam cum sit aC ad aP, ut aP ad aK, erit (per cor. 1. Lem. 2. lib. 2.)

2.) LK ad PQ ut 2aK ad aP, hoc est, ut 2aP ad aC, & indè LK ad $\frac{1}{2}$PQ, ut aP ad $\frac{1}{4}$aC. (Ex naturâ hyperb. & per hyp.) KN×CK est CA×AB, seu $\frac{1}{4}aC^2$, ideóque KN ad aC seu aD, ut $\frac{1}{4}$aC ad CK. Itaque (ex æquo) LKN, ad DPQ, ut aP, ad CK; sed erat DPQ, ad DTV, ut CK ad aC, ergò rursùs (ex æquo), LKN, est ad DTV, ut aP, ad aC, hoc est, ut velocitas corporis projecti est ad velocitatem maximam quam corpus è quiete cadendo potest acquirere. Cum igitur arearum ABNK & GDT, momenta LKN & DTV sint ut velocitates, erunt arearum illarum partes omnes simul genitæ ut spatia simul descripta, ideóque areæ totæ ab initio genitæ ABNK & GDT, ut spatia tota ab initio projectionis descripta.

102. Coroll. 3. Velocitas aP corporis projecti in fine temporis GTD, est ad velocitatem quam corpus velocitate initiali aF projectum eodem tempore in medio non resistente cadendo haberet, ut triangulum aPD ad summam trianguli aFD & sectoris hyperbolici GTD. Nam velocitatis incrementum tempore GTD in spatio non resistente genitum est ut tempus GTD, & velocitas projectionis ut aF, sive ut triangulum aFD, atque adeò velocitas tota in fine temporis GTD ut GTD + aFD, & velocitas in fine temporis ejusdem GTD in medio resistente est ut aP, id est, ut triangulum aPD, & velocitates illæ initio projectionis æquantur inter se, perindè ut areæ illæ GTD + aFD & aPD, ob sectorem GTD evanescentem, & aP æqualem aF initio descensûs.

103. Coroll. 4. Tempus quo corpus in medio resistente projectum acquirit velocitatem aP, seu quo amittit velocitatem PF, est ad tempus quo velocitatem maximam aC, in spatio non resistente è quiete cadendo acquirere posset, ut sector GDT ad triangulum aDC. Sit aF + V, recta velocitatem exponens quam corpus in medio non resistente cum velocitate initiali aF projectum elapso tempore GDT haberet, & erit (102) aP ad aF + V, seu multiplicando per $\frac{1}{2}$AD, aPD ad aFD + $\frac{1}{2}$aD × V, ut aPD ad aFD + GTD, ideóque $\frac{1}{2}$aD × V = GTD, & $V = \frac{GTD}{\frac{1}{2}aD}$; sed V est velocitas quam corpus è quiete cadendo in medio non resistente acquireret tempore GTD, & velocitates in medio non resistente acquisitæ, sunt ut tempora quibus acquiruntur, ideóque velocitas V seu $\frac{GTD}{\frac{1}{2}aD}$, est ad velocitatem aC, in medio non resistente acquisitam ut tempus GTD ad tempus quo corpus velocitatem aC acquirit; Quarè hoc tempus erit $\frac{1}{2}$aD × aC, seu per triangulum aDC exponetur. 103.

104. Coroll. 5. Hinc ex dato tempore datur spatium descriptum. Capiatur enim sector GDT ad triangulum aDC, ut tempus datum ad tempus quo corpus in medio non resistente acquirit velocitatem terminalem aC, & dabitur tum velocitas aP, tum area ABNK, quæ est ad sectorem GDT, ut spatium quæsitum ad spatium quod tempore dato cum velocitate illâ terminali aC uniformiter describi potest (101) & regrediendo ex dato spatio ABNK, dabitur tempus GDT, si capiatur area ABNK, ad triangulum aDC in ratione spatii dati ad duplum spatii quod corpus in medio non resistente cadendo describit ut velocitatem terminalem aC acquirat. Id demonstratur ex (not. 103. & 101) eodem prorsus modo quo factum est (97).

105. Scholium. Superiores constructiones definiendis corporum motibus sufficiunt, licet medii resistentia partim constans partim velocitatis quadrato proportionalis. Nam si corpus solâ vi insitâ moveatur, recta AC, quæ in constructionibus prop. 8. & 9. vim gravitatis uniformem exponebat, partem resistentiæ constantem quæ vi alicui centripetæ uniformi æqualis censeri potest, cæteris manentibus, exponet. Sed si corpus in medio prædicto gravitate uniformiter agente sollicitatum rectâ ascendat vel descendat, linea AC, in constructionibus pro ascensu vim gravitatis & partem resistentiæ datam simul exhibebit, in constructionibus verò pro descensu excessum gravitatis suprà partem resistentiæ datam repræsentabit; & linea illa AC, ità determinata vim gravi-

De Motu Corporum.

tatis uniformem exponet, quâ corpus urgeretur in medio cujus esset resistentia ut velocitatis quadratum. Si verò pars illa resistentiæ quæ uniformis manet vi gravitatis æqualis fuerit & corpus deorsum projiciatur, idem erit illius motus ac si solâ vi insitâ ferretur in medio quod resisteret in ratione quadrati velocitatis, atque ideò in hoc casu usurpanda erit constructio propositionis 5æ. Jam verò omissis constructionibus per Logarithmicam quas (ex demonstr. 44. 45.) facile deducere, aut in monumentis academiæ Regiæ an. 1709. & etiam in Phoronomiâ Hermanni Lector videre poterit, duo quæ sequuntur generalia problemata analyticè solvemus.

PROBLEMA.

Definire motum corporis, uniformi gravitate urgente, rectà descendentis vel ascendentis in medio similari, quod in ratione quâlibet multiplicatâ velocitatis resistit.

106. Sit vis gravitatis $=g$, velocitas corporis sub initio motûs $=c$, spatium descriptum $=s$, tempus quo descriptum est $=t$, velocitas hoc tempore acquisite vel residua $=v$, resistentia medii $r=\frac{v^n}{a^{n-1}}$, & a quantitas data. Corpore descendente erit (19) $g\,ds-\frac{v^n\,ds}{a^{n-1}}=v\,dv$, ideoque $ds=\frac{a^{n-1}v\,dv}{g\,a^{n-1}-v^n}$, & quia (13) $dt=\frac{ds}{v}$, erit $dt=\frac{a^{n-1}dv}{ga^{n-1}-v^n}$. Simili modo pro corporis ascensu, invenitur $ds=\frac{-a^{n-1}v\,dv}{g\,a^{n-1}+v^n}$ & $dt=\frac{-a^{n-1}dv}{ga^{n-1}+v^n}$. Cum igitur in his quatuor æquationibus variabiles separatæ sint, poterunt illæ, saltem concessis figurarum quadraturis, construi.

107. Si resistentia velocitati proportionalis fuerit, erit $n=1$, & ideò corpore descendente $ds=\frac{v\,dv}{g-v}$ & divisione numeratoris $v\,dv$ per $-v+g$ peractâ, est $ds=-dv+\frac{g\,dv}{g-v}$, & sumptis fluentibus $s=Q-v-g\times L.\overline{g-v}$. Quia verò ubi evanescit spatium s, fit $v=c$ (per hyp.) erit constans $Q=c+g\,L.\overline{g-c}$, ac proindè $s=c-v+L.\frac{g-c}{g-v}$. Tempus habetur per æquationem $dt=\frac{dv}{g-v}$ cujus fluens $t=Q-L.\overline{g-v}=L.\frac{g-c}{g-v}$. Simili modo pro corporis ascensu invenitur $s=c-v+g\,L.\frac{g+v}{g+c}$, & $t=L.\frac{g+c}{g+v}$.

108. Si resistentia sit ut velocitatis quadratum, erit $n=2$ & (106) $r=\frac{v^2}{a}$. Sit b velocitas terminalis, & quia resistentia gravitati æqualis est ubi corpus velocitatem maximam habet, erit $g=\frac{bb}{a}$, & $bb=ag$. Sit e spatium quod corpus vi gravitatis constante g cadendo in medio non resistente describit ut acquirat velocitatem b, & erit $2\,ge=bb=ag$ (23) ideoque $a=2\,e$. His positis, corpore descendente erit (106) $ds=\frac{a\,v\,dv}{ag-vv}=\frac{2\,e\,v\,dv}{bb-vv}$. Ponatur $bb-vv=xx$, & proindè sumptis fluxionibus $v\,dv=-x\,dx$, atquè ideo $ds=-\frac{2\,e\,x\,dx}{xx}=-\frac{2\,e\,dx}{x}$, & sumptis fluentibus $s=Q-2\,e\,L.x=Q-e\,L.x^2=Q-e\,L.\overline{bb-vv}$. Ponatur $s=0$, & ideò $v=c$, & indè habebitur $Q=e\,L.\overline{bb-cc}$, ac proptereà $s=e\,L.\frac{bb-cc}{bb-vv}$. Sit $L.h=1$ & erit $s\,L.h=e\,L.\frac{bb-cc}{bb-vv}$; $\frac{s}{e}\times L.h=L.h^{\frac{s}{e}}=L.\frac{bb-cc}{bb-vv}$, ideòque $h^{\frac{s}{e}}=\frac{bb-cc}{bb-vv}$; undè eruitur $vv=\frac{bbh^{\frac{s}{e}}+cc-bb}{h^{\frac{s}{e}}}$. Tempus obtinetur per æquationem (106) $dt=\frac{a\,dv}{ag-vv}=\frac{2\,e\,dv}{bb-vv}=\frac{\frac{e}{b}dv}{b+v}+\frac{\frac{e}{b}dv}{b-v}$; quod patet, si duæ postremæ fractiones ad communem denominatorem reducantur, &, sumptis fluentibus $t=Q+\frac{e}{b}L.\overline{b+v}-\frac{e}{b}L.\overline{b-v}=Q+\frac{e}{b}L.\frac{b+v}{b-v}$. Ponatur $t=0$, & ideò

$v=c$,

$v = c$, & invenietur $Q = -\frac{e}{b} L. \frac{l+c}{b-c}$. Quarè erit $t = \frac{e}{b} L. \frac{b+v \times b-c}{b-v \times b+c}$. Si corpus è quiete cadat erit $c = o$, & ideò $s = e L. \frac{bb}{bb-vv}$; $vv = \frac{bb h^{\frac{s}{e}} - bb}{h^{\frac{s}{e}}}$ & $t = \frac{e}{b} L. \frac{b+v}{b-v}$.

Si in hâc ultimâ æquatione loco $h^{\frac{e}{s}}$ scribatur m & loco v ipsius valor $b\sqrt{1-\frac{1}{m}}$, habebitur $t = \frac{e}{b} \times \frac{L\, 1 + \sqrt{1-\frac{1}{m}}}{1-\sqrt{1-\frac{1}{m}}}$.

Simili modo ascendente corpore invenietur $s = e L \frac{bb+cc}{bb+vv}$, & $vv = \frac{bb+cc-bbh^{\frac{s}{e}}}{h^{\frac{s}{e}}}$. Tempus autem reperitur per æquationem $dt = -\frac{adv}{ag+vv} = -\frac{edv}{bb+vv}$. Centro D, radio DA $= b$, describatur circuli quadrans ANE, velocitas c, sub initio ascensûs exponatur per datam tangentem AP, velocitas residua v, per tangentis illius partem AM, & dv per Mm, jungantur DP, DM, Dm, circulo occurrentes in T, N, n, & ex puncto M, demissum sit ad Dn perpendiculum MR, triangula similia DNn, DMR, dant DM : DN vel DA $=$ MR : Nn, & triangula similia mRM, MAD, dant DM : DA $=$ Mm : MR, ideóque (ex æquo) DM^2 : DA^2 $=$ Mm : Nn, hoc est, $bb+vv : bb = dv :$
Nn $= \frac{bbdv}{bb+vv}$; undè fit $\frac{e \times Nn}{bb} =$ 108.
$\frac{edv}{bb+vv}$; & hinc habebitur $dt = -\frac{e \times Nn}{bb}$, sumptisque fluentibus $t = Q - \frac{e \times AN}{bb}$. Ponatur $t = o$, & fiet AM $=$ AP, & AN $=$ AT, ideoque $Q = \frac{e \times AT}{bb}$. Quarè erit $t = \frac{e \times TN}{bb} = \frac{TN}{2g}$. (ob $bb = 2ge$).

PROBLEMA.

Definire motum corporis in lineâ rectâ AC, vi quâlibet centripetâ ad punctum C tendente sollicitati in medio cujus resistentia est ut densitas medii & dignitas quævis velocitatis corporis conjunctim.

109. Corpus è loco dato A vel a, datâ cum velocitate projectum ascendat per spatium aP vel descendat per spatium AP, dicanturque velocitas projectionis in a vel A $= c$, spatium descriptum aP vel AP $= s$, tempus quo descriptum est $= t$, velocitas corporis in loco P $= v$, vis centripeta ibidem $= g$, densitas medii in eodem loco $= k$, resistentia $r = kv^n$, distantia CP $= x$, & data Ca vel CA $= b$, erit (22*) pro corporis ascensu, $gdx + kv^n dx = -vdv$, & pro descensu $gdx - kv^n dx = -vdv$, quarum æquationum alterutram resolvere satis est, cum altera in alteram abeat, mutato signo $+$ vel $-$ quantitati k præfixo. Quia verò corpore ascendente est aP $= s = x - b$, & proindè $ds = dx$; at eodem descendente AP $= s = b - x$, & ideo $ds = -dx$, erit pro corporis ascensu (13) $dt = \frac{ds}{v} = \frac{dx}{v}$, & pro descensu $dt =$

DE MOTU CORPORUM.

$-\frac{dx}{v}$. His poſitis breviter exponimus præcipuos caſus in quibus ſuperiorum æquationum variabiles ſeparari & æquationes proinde per curvarum quadraturas conſtrui poſſunt.

110. Si in æquatione generali $g\,dx \pm k v^n dx = -v\,dv$, quæ eſt pro aſcenſu & deſcenſu ſimul. Sit g quantitas conſtans, & denſitas k, ut diſtantiæ dignitas $x^{\frac{1}{2}n}$ reciprocè, hoc eſt, $k = \frac{1}{a x^{\frac{1}{2}n}}$, variabiles ſeparari poſſunt. Nam æquatio generalis in hanc mutabitur $g\,dx \pm \frac{v^n dx}{a x^{\frac{1}{2}n}} = -v\,dv$. Ponatur $v^2 = xz$, ideoque $v^n = x^{\frac{1}{2}n} z^{\frac{1}{2}n}$, & $v\,dv = \frac{x\,dz + z\,dx}{2}$, & æquatio evadet $g\,dx \pm \frac{z^{\frac{1}{2}n} dx}{a} = \frac{-xdz - zdx}{2}$, undè eruitur $\frac{dx}{x} = \frac{a\,dz}{2ag + az \pm 2z^{\frac{1}{2}n}}$. In quâ variabiles ſunt ſeparatæ.

111. Si denſitas k conſtans fuerit, vis centripeta g ut diſtantia x à centro & reſiſtentia ut velocitas, variabiles ſeparari poſſunt. Nam ſi ponatur $g = ax$, k conſtans & $n = 1$, æquatio generalis fiet $a\,x\,dx \pm k\,v\,dx = -v\,dv$, in quâ neglectis coefficientibus datis a & k, termini omnes ſunt homogenei ſeu ejuſdem dimenſionis. Ponatur itaque $v = zx$, & proindè $dv = z\,dx + x\,dz$, & æquatio evadet $a\,x\,dx \pm k\,z\,x\,dx = -z^2 x\,dx - z x^2 dz$, & terminis omnibus per x diviſis, iiſque ordinatis invenitur $\frac{dx}{x} = -\frac{z\,dz}{a \pm kz + z^2}$, quæ æquatio, conceſſâ Hyperbolæ vel circuli quadraturâ ſemper conſtrui poteſt.

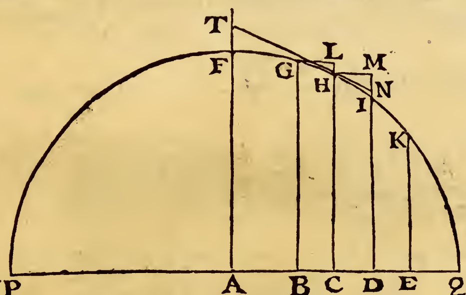
112. Si, cæteris paribus, medii reſiſtentia ſit ut quadratum velocitatis, id eſt, $n = 2$, & denſitas medii k viſque centripeta g ſint ut functiones quælibet diſtantiæ x, variabiles in ſuperioribus æquationibus (109.) ſeparationem admittunt. In hâc Hypotheſi æquatio pro corporis aſcenſu ſit $g\,dx + k v^2 dx = -v\,dv$, ſeu $v\,dv + k v^2 dx = -g\,dx$. Ponatur $k\,dx = \frac{dz}{2z}$, ut ſit $2zv\,dv + v^2 dz = -2gz\,dx$, & ſumptis fluentibus erit $zv^2 = Q - \text{S}.\,2gz\,dx$, & $v^2 = \frac{Q - S.\,2gz\,dx}{z}$. Quia verò $k\,dx = \frac{\frac{1}{2}dz}{z}$, erit $S.\,k\,dx = \frac{1}{2}L.\,z$ & $S.\,2k\,dx = L.\,z$. Atquè ideò ſi fuerit $L.\,h = 1$, $h^{S.\,2kdx} = z$ undè fit $v^2 = \frac{Q - S.\,2gh^{S.\,2kdx}dx}{h^{S.\,2kdx}}$ pro corporis aſcenſu; & pro deſcenſu loco $+k$, ſcribendo $-k$, erit $v^2 = \frac{Q - S.\,2gh^{-S.\,2kdx}dx}{h^{-S.\,2kdx}} = Qh^{S.\,2kdx} - h^{S.\,2kdx} S.\,2gh^{-S.\,2kdx}dx$ in quibus æquationibus variabiles ſunt ſeparatæ, quia (per Hyp.) quantitates k & g, ſunt ut functiones variabilis x. Conſtans Q determinatur ex eo quod ubi $x = b$, ſit $v = c$, tempus verò definitur per æquationem $dt = \frac{dx}{v}$ pro corporis aſcenſu, & per æquationem $dt = -\frac{dx}{v}$ pro corporis deſcenſu, in quibus æquationibus, ſi loco v ſubſtituatur ipſius valor per x inventus, variabiles erunt ſeparatæ. Sed de his vide Mechanicam Clar. Euleri.

PRO-

PROPOSITIO X. PROBLEMA III.

Tendat uniformis vis gravitatis directè ad planum horizontis, sitque resistentia ut medii densitas & quadratum velocitatis conjunctim: requiritur tum medii densitas in locis singulis, quæ faciat ut corpus in datâ quâvis lineâ curvâ moveatur; tum corporis velocitas & medii resistentia in locis singulis.

Sit *PQ* planum illud plano schematis perpendiculare; *PFHQ* linea curva plano huic occurrens in punctis *P* & *Q*; *G*, *H*, *I*, *K* loca quatuor corporis in hâc curvâ ab *F* ad *Q* pergentis; & *GB*, *HC*, *ID*, *KE* ordinatæ quatuor parallelæ ab his punctis ad horizontem demissæ, & lineæ horizontali *PQ* ad puncta *B*, *C*, *D*, *E* insistentes; & sint *BC*, *CD*, *DE* distantiæ ordinatarum inter se æquales. A punctis *G* & *H* ducantur rectæ *GL*, *HN* curvam tangentes in *G* & *H*, & ordinatis *CH*, *DI* sursum productis occurrentes in *L* & *N*, & compleatur parallelogrammum *HCDM*. Et (b) tempora, quibus corpus describit arcus *GH*, *HI*, erunt in subduplicatâ ratione altitudinum *LH*, *NI*, quas corpus temporibus illis describere posset, à tangentibus cadendo; & (c) velocitates erunt ut longitudines descriptæ *GH*, *HI* directè & tempora

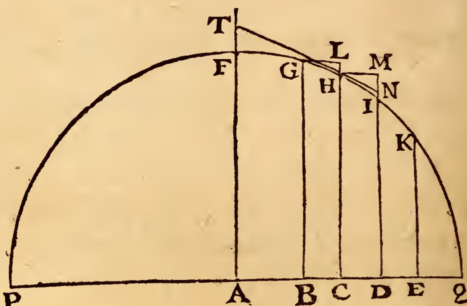


(b) 113. * *Et tempora quibus corpus describit arcus* evanescentes GH, HI, *erunt in subduplicatâ ratione altitudinum* LH, NI. Eodem enim temporis momento quo corpus vi motûs insiti in G, describeret tangentem GL, vi gravitatis uniformi caderet per altitudinem LH qualem in medio non resistente percurreret eo ipso tempore; resistentiæ enim effectus altitudinem eam minuit quantitate ejus ipsius respectu infinitè parvâ, quæ itaque hic non est spectandâ, itaque corpus arcum GH describere censendum est vi compositâ ex vi motus insiti & vi gravitatis. Et simili modo, tempore eodem quo describit arcum HI, vi gravitatis caderet per altitudinem NI. Quare (per Lem. 10. Lib. 1.) tempora quibus corpus describit arcus GH, HI, seu quibus cadit per altitudines LH, NI, sunt in subduplicatâ ratione harum altitudinum. 113.

(c) * *Et velocitates erunt* (11).

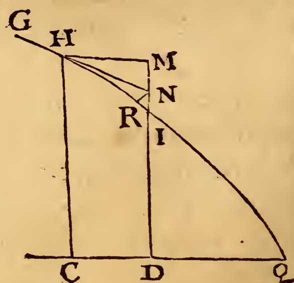
DE MOTU CORPORUM.

pora inversè. Exponantur tempora per T & t, & velocitates per $\frac{GH}{T}$ & $\frac{HI}{T}$; & (d) decrementum velocitatis tempore t factum exponetur per $\frac{GH}{T}-\frac{HI}{t}$. Hoc decrementum oritur à resistentiâ corpus retardante, & gravitate corpus accelerante. Gravitas, in corpore cadente & spatium NI cadendo describente, generat velocitatem, quâ duplum illud spatium eodem tempore describi potuisset, ut (e) *Galilæus* demonstravit; id est velocitatem $\frac{2NI}{t}$: (f) at in corpore arcum HI describente,



(d) * *Et decrementum velocitatis.* Nam si velocitas per arcum HI, eadem esset ac velocitas per arcum GH, exponeretur per $\frac{GH}{T}$, est autem illa $\frac{HI}{t}$. Quarè si velocitas decrescat, illius decrementum tempore t factum, exponetur per $\frac{GH}{T}-\frac{HI}{t}$. Si verò crescat, exponetur per $\frac{HI}{t}-\frac{GH}{T}$; hoc decrementum vel incrementum oritur à resistentia corpus retardante ejusque motui secundum directionem tangentis HN vel arcûs HI directè contraria (1) & à gravitate motum corporis descendentis accelerante, vis enim gravitatis in vires duas videlicet normalem & tangentialem divisa (24) corporis in curvâ descendentis motum per vim tangentialem accelerat quem vis normalis nec accelerat, nec retardat. Quarè si resistentia vi gravitatis tangentiali major est, motus retardatur, si minor acceleratur, si æqualis nec acceleratur nec retardatur.

(e) * *Ut Galilæus demonstravit.* (Vid. dem. not. 29. lib. 1.).



(f) * *At in corpore &c.* Nam solâ vi insitâ, corpus tempore t describeret tangentem HN, & vi gravitatis solâ altitudinem NI, viribus verò conjunctis describit arcum HI. Quarè gravitas spatium à corpore secundùm directionem HN vel HI, describendum auget solâ longitudine HI − HN. Est autem $HI-HN=\frac{MI\times NI}{HI}$. Si enim centro H & radio HN, descriptus intelligatur arcus circularis NR, secans HI in R, duo triangula IRN, IMH similia erunt, ob angulum MIH utri-

auget arcum illum solâ longitudine $HI-HN$ seu $\frac{MI \times NI}{HI}$; ideoque generat tantum velocitatem $\frac{2MI \times NI}{t \times HI}$. Addatur hæc velocitas ad decrementum prædictum, (a) & habebitur decrementum velocitatis ex resistentiâ solâ oriundum, nempe $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} + \frac{2MI \times NI}{t \times HI}$. Proindeque cum gravitas eodem tempore in corpore cadente generet velocitatem $\frac{2NI}{t}$; (b) resistentia erit ad gravitatem ut $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} + \frac{2MI \times NI}{t \times HI}$ ad $\frac{2NI}{t}$, sive ut $\frac{t \times GH}{T} - HI + \frac{2MI \times NI}{HI}$ ad $2NI$.

Jam pro abscissis CB, CD, CE scribantur (c) $-o$, o, $2o$. Pro

utrique triangulo communem, & angulos IRN, IMH rectos, ideoque æquales, undè erit $HI : MI = NI : RI$ seu $HI - HN$; & propterea $HI - HN = \frac{MI \times NI}{HI}$. Cum igitur RI sit spatium tempore t vi gravitatis tangentiali descriptum (113) velocitas illa quam vis illa tempore t generat, exponetur (29. lib. 1.) per $\frac{2RI}{t} = \frac{2MI \times NI}{t \times HI}$.

(a) * *Et habebitur decrementum velocitatis ex solâ resistentiâ oriundum, nempe* $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} + \frac{2MI \times NI}{t \times HI}$, non solum in eo casu quo resistentia vim gravitatis tangentialem superat, sed etiam in eo casu quo ab istâ superatur. Sit enim velocitatis decrementum ex solâ resistentiâ oriundum V, cum incrementum velocitatis vi gravitatis tangentiali genitum sit $\frac{2MI \times NI}{t \times HI}$, erit in primo casu $V - \frac{2MI \times NI}{t \times HI} = \frac{GH}{T} - \frac{HI}{t}$ (113), ideoque $V = \frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} + \frac{2MI \times NI}{t \times HI}$; at in secundo casu erit (113) $\frac{2MI \times NI}{t \times HI} - V = \frac{HI}{t} - \frac{GH}{T}$, & proinde $V = \frac{2MI \times NI}{t \times HI} + \frac{GH}{T} - \frac{HI}{t}$, quæ eadem est expressio ac prius. 113.

(b) * *Resistentia erit ad gravitatem &c.* Vires enim acceleratrices vel retardatrices sunt ut velocitatum elementa quæ dato temporis momento generant aut extinguunt, (13. lib. 1).

(c) * *Scribantur* $-o$, o, $2o$. Si enim abscissæ CD, CE affirmativè capiantur, abscissæ CB, &c in contrariam partem sumptæ negativè debent exprimi.

Pro ordinata CH ſcribatur P, & pro (d) MI ſcribatur ſeries quælibet $Qo + Roo + So^3 +$ &c. Et ſeriei termini omnes poſt primum, nempe $Roo + So^3 +$ &c. (e) erunt NI, & (f) ordinatæ DI, EK, & BG erunt $P - Qo - Roo - So^3 -$ &c. $P - 2Qo - 4Roo - 8So^3 -$ &c. & $P + Qo - Roo + So^3 -$ &c. reſpectivè. Et quadrando differentias ordinatarum $BG - CH$ & $CH - DI$, & ad quadrata prodeuntia addendo quadrata ipſarum BC, CD, (g) habebuntur arcuum GH, HI quadrata $oo + QQoo - 2QRo^3 +$ &c. & $oo + QQoo + 2QRo^3 +$ &c. Quorum radices $o\sqrt{1 + QQ} - \frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$, & $o\sqrt{1 + QQ} + \frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$ ſunt arcus GH & HI. Præterea ſi ab ordinatâ CH ſubducatur ſemiſumma ordinatarum BG ac DI, & ab ordinatâ DI ſubducatur ſemiſumma ordinatarum CH & EK,

(d) * *Et pro MI ſcribatur ſeries quælibet.* Nam ordinatarum CH, DN differentia fluxionalis MI exprimi poteſt per ſeriem infinitam $Qo + Roo + So^3 +$ &c. in quâ Q, R, S, &c. ſunt quantitates finitæ hic generaliter ſumptæ & poſtea in ſingulis caſibus determinandæ, & o eſt incrementum naſcens & conſtans abſciſſæ (552, 556. lib. 1.).

(e) * *Erunt NI &c.* (552. lib. 1.).

(f) * *Et ordinatæ &c.* Eſt enim $DI = DM - MI = CH - MI = P - Qo - Roo - So^3 -$ &c. (per hyp.); & quia $CE = 2o$, ſi in valore ordinatæ DI loco o ſcribatur $2o$, abibit DI in $EK = P - 2Qo - 4Roo - 8So^3 -$ &c; & ſimili modo quia $CB = -o$, ſi in valore ordinatæ DI loco $+o$ ſcribatur $-o$, fiet $DI = BG = P + Qo - Roo + So^3 -$ &c.

(g) * *Habebuntur arcuum GH, HI quadrata &c.* Eſt enim, ob angulum HMI rectum $HI^2 = HM^2 + MI^2$, & $HM = CD = o$, ac $MI = CH - DI = Qo + Roo + So^3 +$ &c. ideoque $HM^2 = oo$, $MI^2 = Q^2o^2 + 2QRo^3 + R^2o^4 + 2QSo^4 +$ &c.; unde $HI^2 = o^2 + QQo^2 + 2QRo^3 +$ &c. Negliguntur autem termini in quibus eſt o^4, o^5, &c. quod præ cæteris antecedentibus evaneſcant & ad rem nihil faciant. Quare extrahendo radicem quadratam fit $HI = o\sqrt{1 + QQ} + \frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$, neglectis cæteris terminis negligendis: & ſimili modo invenitur $GH = o\sqrt{1 + QQ} - \frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$.

EK, (h) manebunt arcuum *GI* & *HK* sagittæ Roo & $Roo + 3So^3$. Et (k) hæ sunt lineolis *LH* & *NI* proportionales, ideoque in duplicatâ ratione temporum infinitè parvorum T & *t*: & (l) inde ratio $\frac{t}{T}$ est $\sqrt{\frac{R + 3So}{R}}$ seu $\frac{R + \frac{3}{2}So}{R}$; & $\frac{t \times GH}{T} - HI + \frac{2MI \times NI}{HI}$, substituendo ipsorum $\frac{t}{T}$, *GH*, *HI*, *MI* & *NI* valores jam inventos, (m) evadit $\frac{3Soo}{2R}\sqrt{1+QQ}$. Et cum $2NI$ sit $2Roo$, resistentia jam erit

(h) * *Manebunt arcuum GI & HK sagittæ &c.* Jungatur chorda GI secans CH in V, & ex puncto I demittatur ad BG perpendiculum IS secans CH in T. Erit, ob triangulorum ITV, ISG similitudinem IT ad IS, seu DC ad DB, id est, 1 ad 2, ut TV ad GS, & ideo $GS = 2VT$, & $GB = 2VT + SB = 2VT + DI$, & $GB + DI = 2VT + 2DI$, quare semisumma ordinatarum GB ac DI est $VT + DI$, seu VC, quæ si ab ordinatâ CH subducatur, remanebit arcûs GI sagitta VH. Et simili ratiocino patet arcûs HK sagittam IX æqualem esse differentiæ inter ordinatam DI & semisummam ordinatarum CH & EK.

(k) * *Et hæ sunt lineolis LH & NI proportionales.* Nam coeuntibus punctis B, C, D, E & G, H, I, K figuræ NHIXH, LGHVG similes fiunt, & propterea latera homologa HV & IX, LH & NI proportionalia; sunt autem (ex demonstr.) lineolæ LH, NI ut quadrata temporum *T t*, quibus describuntur arcus GH, HI. 113.

(l) * *Et inde ratio $\frac{t}{T}$ est &c.* Nam (ex demonst.) $\frac{t^2}{T^2} = \frac{IX}{HV} = \frac{Roo + 3So^3}{Roo} = \frac{R + 3So}{R}$, & ideo $\frac{t}{T} = \sqrt{\frac{R + 3So}{R}} = \sqrt{\frac{RR + 3SRo}{RR}} = \frac{\sqrt{RR + 3SRo}}{R}$; sed $\sqrt{RR + 3SRo} = R + \frac{3SRo}{2R}$, neglectis terminis negligendis: quare erit $\frac{t}{T} = \frac{R + \frac{3So}{2}}{R} = 1 + \frac{3So}{2R}$.

(m) * *Evadit* $\frac{3Soo}{2R}\sqrt{1+QQ}$. Est enim $\frac{t \times GH}{T} = o\sqrt{1+QQ} - \frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}} + \frac{\frac{3}{2}Soo\sqrt{1+QQ}}{R}$, neglecto termino in quo reperitur o^3, qui præ cœteris evanescit. Unde fit $\frac{t \times GH}{T} - HI = \frac{\frac{3}{2}Soo\sqrt{1+QQ}}{R}$

DE MOTU CORPORUM.

erit ad gravitatem ut $\frac{3\,S\,oo}{2\,R}\sqrt{1+QQ}$ ad $2\,R\,oo$, id est, ut $3\,S\sqrt{1+QQ}$ ad $4\,RR$.

Velocitas autem ea est, quâcum corpus de loco quovis *H*, secundum tangentem *HN* egrediens, in parabolâ diametrum *HC*

& latus rectum $\frac{HNq}{NI}$ seu $\frac{1+QQ}{R}$ habente, (n) deinceps in vacuo moveri potest.

Et

$-\frac{2\,QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$; sed $2\,MI = 2\,Qo$, & $NI = Roo$ neglectis cæteris seriei terminis evanescentibus, ideoque $2\,MI \times NI = 2\,QRo^3$, atque proinde $\frac{2\,MI \times NI}{HI} = \frac{2\,QRo^2}{\sqrt{1+QQ}}$, neglecto in valore arcûs HI termino evanescente $\frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$. Quare erit $\frac{t \times GH}{T} - HI + \frac{2\,MI \times NI}{HI} = \frac{3\,Soo\sqrt{1+QQ}}{2\,R}$.

(n) * *Deinceps in vacuo moveri potest.* Cum enim velocitas per arcum HI, seu per tangentem nascentem HN, æquabilis censeri possit (5), & corpus eodem temporis momento quo vi insitâ describeret HN, vi gravitatis uniformi, omissa resistentia quæ hic ut nulla haberi debet (113), cadit per altitudinem NI; arcus nascens HI, quem corpus viribus conjunctis describit, usurpari potest pro arcu parabolæ, cujus est diameter HC (40. lib. 1.), tangens HN ordinatis parallela, & NI parallela & æqualis abscissæ cui responderet ordinata æqualis HN. Quare hujus parabolæ latus rectum erit $\frac{HN^2}{NI}$ (per Theor. 1. de parab.), seu (per Lemma 7. lib. 1.) $\frac{HI^2}{NI} = \frac{oo+QQoo}{Roo} = 1+QQ$, neglectis terminis negligendis. Si itaque corpus in vacuo deinceps moveretur, hanc parabolam describeret (40. lib. 1.).

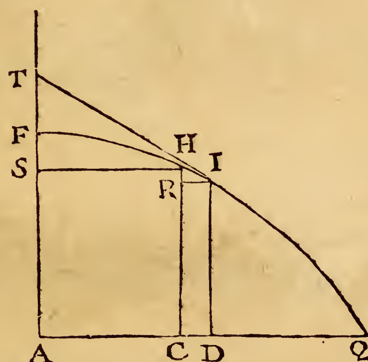
Et resistentia est ut medii densitas & quadratum velocitatis conjunctim, & propterea medii densitas est ut resistentia directè & quadratum velocitatis inversè, id (o) est, ut $\frac{3S\sqrt{1+QQ}}{4RR}$ directè & $\frac{1+QQ}{R}$ inversè, hoc est, ut $\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$. *Q. E. I.*

Corol. 1. Si tangens *HN* producatur utrinque donec occurrat ordinatæ cuilibet *AF* in *T*: (p) erit $\frac{HT}{AC}$ æqualis

(o) * *Id est, ut &c.* Quia enim resistentia est ad gravitatem constantem ut $3S\sqrt{1+QQ}$ *ad* $4RR$, erit resistentia ut $\frac{3S\sqrt{1+QQ}}{4RR}$. Velocitas autem est ut $\frac{HI}{t}$, & illius quadratum ut $\frac{HI^2}{t^2}$; & HI^2 est $oo+QQoo$, neglectis negligendis, t^2 verò est ut NI, seu ut Roo (ex demonst.); adeoque velocitatis quadratum ut $\frac{1+QQ}{R}$. Quare medii densitas erit ut $\frac{3S\sqrt{1+QQ}}{4R(1+QQ)}$, & ob datum numerum $\frac{3}{4}$, ut $\frac{S.\sqrt{1+QQ}}{R(1+QQ)}$ $=\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$.

114. Si resistentia esset ut medii densitas & velocitatis V dignitas quælibet V^n conjunctim; cum sit V^n ut $\frac{HI^n}{t^n}$, sive ut $\frac{(1+QQ)^{\frac{n}{2}}}{R^{\frac{n}{2}}}$, medii densitas foret ut $\frac{3S\sqrt{1+QQ}}{4RR}$ directè & $\frac{(1+QQ)^{\frac{n}{2}}}{R^{\frac{n}{2}}}$ inversè, id est, directè ut $\frac{SR^{\frac{n-4}{2}}}{(1+QQ)^{\frac{n-1}{2}}}$.

(p) * *Erit* $\frac{HT}{AC}$ *æqualis &c.* Ex pun-



ctis H & I demittantur ad AF & CH perpendicula HS & IR; & ob triangula IRH, HST similia, erit HT ad HS seu AC ut HI ad IR vel CD, ideoque $\frac{HT}{AC}=\frac{HI}{CD}$ $=\frac{o\sqrt{1+QQ}}{o}=\sqrt{1+QQ}$. 114.

115. Hinc si resistentia sit ut medii densitas & velocitatis dignitas V^n conjunctim, erit resistentia ad gravitatem, ut $3S\times HT$ ad $4RR\times AC$, velocitatis dignitas n, ut $\frac{HT^n}{AC^n\times R^{\frac{n}{2}}}$, & medii densitas ut $\frac{SR^{\frac{n-4}{2}}\times AC^{n-1}}{HT^{n-1}}$, sive ut $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}}\times\overline{\frac{AC}{HT}}\Big|^{n-1}$ (114).

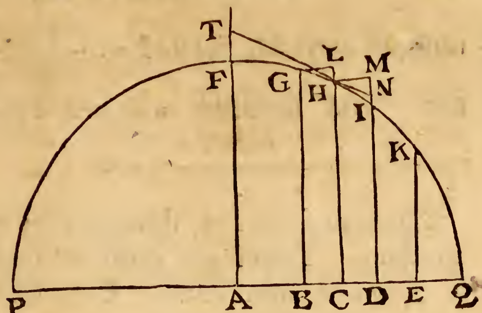
De Motu Corporum.

$\sqrt{1+QQ}$, ideoque in superioribus pro $\sqrt{1+QQ}$ scribi potest. Quâ ratione resistentia erit ad gravitatem ut $3S \times HT$ ad $4RR \times AC$, velocitas erit ut $\frac{HT}{AC\sqrt{R}}$, & medii densitas erit ut $\frac{S \times AC}{R \times HT}$.

Co-

116. Superiores formulæ non solum pro corporis descensu per arcum FQ, sed etiam pro ejusdem ascensu per arcum PF usurpari possunt. Corpore ascendente per arcum PF à P ad F, eadem fiat quæ pro descensu per arcum FQ constructio; & tempora quibus describuntur arcus GH, HI exponantur per T & t. Decrementum velocitatis tempore t factum erit $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t}$. Hoc decrementum oritur à resistentiâ & gravitate corporis ascendentis motum simul retardantibus. Gravitas in corpore cadente & spatium NI cadendo describente, generat velocitatem $\frac{2NI}{t}$; at in corpore arcum HI describente, minuit arcum illum solâ longitudine HN−HI seu $\frac{MI \times NI}{HI}$, ideoque extinguit tantum velocitatem tangentialem $\frac{2MI \times NI}{t \times HI}$. Auferatur hæc velocitas à decremento prædicto, & habebitur decrementum velocitatis ex resistentiâ solâ oriundum, nempe $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} - \frac{2MI \times NI}{t \times HL}$. Proindeque cum gravitas eodem tempore in corpore cadente generet velocitatem $\frac{2NI}{t}$; resistentia erit ad gravitatem ut $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} - \frac{2MI \times NI}{t \times HI}$ ad $\frac{2NI}{t}$, sive ut $\frac{t \times GH}{T} - HI - \frac{2MI \times NI}{HI}$ ad $2NI$.

Jam si pro abscissis BC, CD, CE scribantur $-o$, o, $2o$, & pro ordinata CH scribatur P; MI & NI erunt $Qo - Roo - So^3 -$&c., & $Roo + So^3 +$&c. Nam in arcu FQ (vide fig. Newt.) DI, seu



Corol. 2. Et hinc, si curva linea $PFHQ$ definiatur per relationem inter basem seu abscissam AC & ordinatim applicatam CH, ut moris est; & valor ordinatim applicatæ resolvatur in seriem convergentem: Problema per primos seriei terminos expeditè solvetur, ut in exemplis sequentibus.

Exempl. 1. Sit linea $PFHQ$ semicirculus super diametro PQ descriptus, & requiratur medii densitas quæ faciat ut projectile in hâc lineâ moveatur.

Bisecetur diameter PQ in A; dic AQ, n; AC, a; CH, e; & CD, o: & (q) erit DIq seu $AQq - ADq = nn - aa - 2ao - oo$, seu $ee - 2ao - oo$, & (r) radice per methodum

seu CH − MN − NI, erat $P - Qo - Roo - So^3$ &c., ideoque MN erat Qo (552. lib. 1.), & NI erat $Roo + So^3$; at in arcu PF est $DI = CH + MN - NI$, proindeque $DI = P + Qo - Roo - So^3$ &c., & hinc MI est $Qo - Roo - So^3$ &c. & NI est $Roo + So^3$. Et si in serie quæ valorem ordinatæ DI exprimit, loco o scribantur abscissæ CE, BC, sive $2o - o$, habebuntur ordinatæ EK & BG, nempe $P + 2Qo - 4Roo - 8So^3$ &c., & $P - Qo - Roo + So^3$ &c. respectivè. Et quadrando differentias ordinatarum CH−BG & DI−CH, & ad quadrata prodeuntia addendo quadrata ipsarum BC, CD, habebuntur arcuum GH, HI quadrata $oo + QQoo + 2QRo^3$, & $oo + QQoo - 2QRo^3$; quorum radices $o\sqrt{1+QQ} + \frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$ & $o\sqrt{1+QQ} - \frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$ sunt arcus GH & HI. Præterea si ab ordinata CH subducatur semisumma ordinatarum BG ac DI, & ab ordinata DI subducatur semisumma ordinatarum CH & EK, manebunt arcuum GI & HK sagittæ Roo & $Roo + 3So^3$. Et hæ sunt lineolis LH NI proportionales, ideoque in duplicatâ ratione temporum infinitè parvorum T & t, & inde ratio $\frac{t}{T}$ est, $\sqrt{\frac{R + 3So}{R}}$, seu $\frac{R + \frac{3}{2}So}{R}$; & $\frac{t \times GH}{T} - HI - \frac{2MI \times NI}{HI}$, substituendo ipsorum $\frac{t}{T}$, HI, GH, MI & NI valores jam inventos, evadit $\frac{3Soo}{2R}\sqrt{1+QQ}$. Et cum 2NI sit $2Roo$, resistentia erit ad gravitatem ut $3S\sqrt{1+QQ}$ ad $4RR$. Quamadmodum pro descensu inventum est; & corollaria eadem quoque manent. 116

(q) * *Erit DIq seu &c.* Est enim radius $AI = AQ$, & ideo, ob angulum ADI rectum, $DI^2 = AQ^2 - AD^2 = nn - aa - 2ao - oo = ee - 2ao - oo$, ob $CH^2 = ee = AQ^2 - AC^2 = nn - aa$.

(r) * *Et radice per methodum nostram extractâ*, seu per formulam generalem (550. lib. 1.).

De Motu Corporum.

nostram extractâ, fiet $DI = e - \frac{ao}{e} - \frac{oo}{2e} - \frac{aaoo}{2e^3} - \frac{ao^3}{2e^3} - \frac{a^3o^3}{2e^5} -$ &c. Hic scribatur nn pro $ee + aa$, & evadet $DI = e - \frac{ao}{e} - \frac{nnoo}{2e^3} - \frac{anno^3}{2e^5} -$ &c.

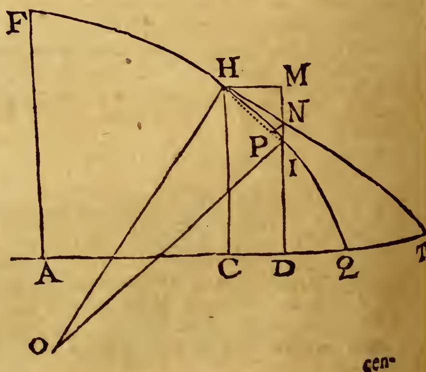
Hujusmodi series distinguo in terminos successivos in hunc modum. Terminum primum appello, in quo quantitas infinitè parva o non extat; secundum, in quo quantitas illa est unius dimensionis; tertium, in quo extat duarum; quartum, in quo trium est; & sic in infinitum. Et (s) primus terminus, qui hic est e, denotabit semper longitudinem ordinatæ CH insistentis ad initium indefinitæ quantitatis o. Secundus (t) terminus, qui hic est $\frac{ao}{e}$, denotabit differentiam inter CH & DN, id est, lineolam MN, quæ abscinditur complendo parallelogrammum $HCDM$, (u) atque ideo positionem tangentis HN semper determinat; ut in hoc casu capiendo MN ad HM ut est $\frac{ao}{e}$ ad o, seu a ad e. Terminus tertius, qui hic est $\frac{nnoo}{2e^3}$, designabit lineolam IN, quæ jacet inter tangentem & curvam, (x) ideoque determinat angulum contactus IHN seu cur-

(s) * *Et primus terminus* (552. lib. 1).

(t) * *Secundus terminus* (ibidem).

(u) 117. * *Atque ideo positionem tangentis HN semper determinat.* Producatur tangens HN ut diametro AQ occurrat in T; & propter triangulorum HMN, TCH similitudinem, erit CT : HC = HM : MN. Est vero generatim HM = o, & MN = Qo, ac Q coefficiens secundi termini seriei generalis pro curvâ quâcumque (ex demonstr. prop. X.): quare si capiatur CT ad HC ut est 1 ad Q habebitur subtangens CT.

(x) 118. * *Ideoque determinat angulum contactûs seu curvaturam &c.* Sit O cen-



curvaturam quam curva linea habet in *H*. Si (y) lineola illa *IN* finitæ est magnitudinis, designabitur per terminum tertium unà cum sequentibus in infinitum. At si lineola illa minuatur in infinitum, termini subsequentes evadent infinitè minores tertio, ideoque negligi possunt. (z) Terminus quartus determinat variationem curvaturæ, quintus variationem variationis, & sic deinceps. Unde obiter patet usus non contemnendus harum serierum in solutione problematum, quæ pendent à tangentibus & curvaturâ curvarum.

Conferatur jam series $e - \frac{ao}{e} - \frac{nnoo}{2e^3} - \frac{anno^3}{2e^5}$ - &c. cum serie $P - Qo - Roo - So^3$ - &c. & perinde pro P, Q, R & S scribatur e, $\frac{a}{e}$, $\frac{nn}{2e^3}$, & $\frac{ann}{2e^5}$, & pro $\sqrt{1+QQ}$ scribatur $\sqrt{1+\frac{aa}{ee}}$ (a) seu $\frac{n}{e}$, & prodibit medii densitas ut $\frac{a}{ne}$,

centrum circuli curvam FHQ osculantis in H; OH, OS radii, HRI chorda arcûs HI, NR arculus circularis centro H & radio HN descriptus. Duo triangula IRN, IMH similia erunt, ob angulos ad R & M rectos & angulum ad I utrique triangulo communem; & ideo HI est ad HM ut NI ad NR, ac proinde $NR = \frac{HM \times NI}{HI}$. Anguli NHI, quem tangens HN cum subtensa HRI constituit, mensura est dimidius arcus HI, & anguli ad centrum HOI mensura est arcus totus HI (ex natura circuli); unde NR seu $\frac{HM \times NI}{HI}$ est ad HN seu HI (Lem. 7. lib 1.) ut $\frac{1}{2}$HI ad HO, & ideo radius osculi $HO = \frac{HI^3}{2HM \times NI}$. Et quia (ex demonst. prop. X.) $HI = \sqrt{1+QQ}$, $HM = o$, ac $NI = Roo$; erit $HO = \frac{(1+QQ)^{\frac{3}{2}}}{2R}$. Sed angulus contactus & curvatura curvæ lineæ FHQ in H est ut radius osculi HO inverse (121. lib. 1.), id est, ut $\frac{2R}{(1+QQ)^{\frac{3}{2}}}$. Quare angulus ille, seu curvatura in H, datis secundo & tertio termino seriei in quam valor ordinatim applicatæ resolvitur, determinabitur. 118.

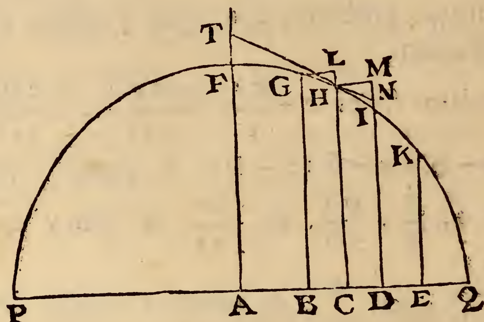
(y) * *Si lineola illa IN &c.* (552. 553. lib. 1.).

(z) * *Terminus quartus determinat variationem curvaturæ.* Quoniam differentia lineolarum LH & NI quarto seriei termino proportionalis est (554) & per lineolam NI determinatur angulus contactus seu curvatura curvæ in puncto H (118) & per lineolam LH curvatura in puncto G; per harum linearum differentiam seu per quartum seriei terminum determinabitur differentia seu variatio curvaturæ, ductâque aliâ tangente similiter determinabitur variatio variationis, & sic deinceps.

(a) * *Seu* $\frac{n}{e}$. Est enim $1 + \frac{aa}{ee} = \frac{ee+aa}{ee} = \frac{nn}{ee}$

DE MOTU CORPORUM.

hoc est (ob datam n) ut $\frac{a}{e}$, seu $\frac{AC}{CH}$, id est, (b) ut tangentis longitudo illa HT, quæ ad semidiametruum AF ipsi PQ normaliter insistentem terminatur: & resistentia erit ad gravitatem ut $3a$ ad $2n$, id est, ut $3AC$ ad circuli diametrum PQ: (c) velocitas autem erit ut $\surd CH$. Quare si cor-



pus justâ cum velocitate secundum lineam ipsi PQ parallelam exeat de loco F, & medii densitas in singulis locis H sit ut longitudo tangentis HT, & resistentia etiam in loco aliquo H sit ad vim gravitatis ut $3AC$ ad PQ, corpus illud describet circuli quadrantem FHQ. *Q. E. I.*

At

(b) * *Id est, ut tangentis longitudo illa HT &c.* Jungatur radius AH, & ob angulum rectum quem tangens TH cum radio AH constituit, parallelasque AT, CH, triangulum AHC simile erit triangulo ATH, & inde est TH ad HA, ut AC ad HC, id est, $\frac{AC}{HC}$ est ut $\frac{HT}{AH}$, seu ut HT ob datum radium AH.

(c) * *Velocitas autem erit ut $\surd CH$.* Nam (ex demonst. prop. X.) velocitas est ut est ut $\sqrt{\frac{1 + QQ}{R}}$, id est, ut $\surd e$, vel $\surd 2CH$ ideoque ut $\surd CH$.

119. Quoniam igitur velocitas est ut $\surd CH$, medii densitas ut tangens HT, & resistentia ut AC, (quia gravitas & circuli diameter PQ data sunt) corpore perveniente ad punctum Q lineæ horizontalis, velocitas ejus nulla erit, medii densitas infinita, resistentia finita. Si vero ponatur CH negativa, ut corpus infra horizontalem PQ pergat; fiet velocitas ut $\surd -CH$, quantitas imaginaria; & ideo corpus non potest infra horizontalem PQ descendere. At dum corpus est in F, velocitas ejus est ut $\surd AF$, medii densitas nulla, & resistentia nulla.

At si corpus idem de loco P, secundum lineam ipsi PQ perpendicularem egrederetur, & in arcu semicirculi PFQ moveri inciperet, sumenda esset AC seu a ad contrarias partes centri A, & propterea signum ejus mutandum esset & (d) scribendum $-a$ pro $+a$. Quo pacto prodiret medii densitas ut $-\frac{a}{e}$. Negativam autem densitatem, hoc est, quæ motus corporum accelerat, natura non admittit: & propterea naturaliter fieri non potest, ut corpus ascendendo à P describat circuli quadrantem PF. Ad hunc effectum deberet corpus à medio impellente accelerari, non à resistente impediri.

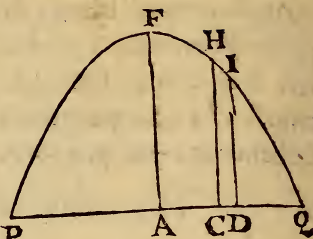
Exempl. 2. Sit linea PFQ parabola, axem habens AF horizonti PQ perpendicularem, & requiratur medii densitas, quæ faciat ut projectile in ipsâ moveatur.

Ex

(d) * *Screbendum $-a$ pro $+a$.* Nam formula quæ densitatem medii exponit, corporis ascensui & descensui communis est, sicut & aliæ formulæ quæ resistentiam & velocitatem exponunt (116); & idcirco ut quantitas quæ densitatem medii corpore descendente exponit eamdem exponat pro corporis ascensu per eumdem vel similem & æqualem arcuum, substituendus est in illâ quantitate valor abscissæ, quæ corpore descendente hic positiva est, ascendente negativa.

120. Atque hinc generatim colligitur eumdem curvæ arcum, vel similes & æquales utrinque ab axe arcus, non posse ascensu & descensu describi in uno medio densitatis utcumque variabilis, id est, si arcus unus ascensu describi potest, descensu describi non posse, & contra. Nam si in solutione problematis tertii pro corporis descensu per arcum FQ, origo abscissæ positivæ AC statuatur in A, & pro CB, CD, CE scribantur $-o$, o, $2o$, erit resistentia ut $\frac{S\sqrt{1+QQ}}{RR}$. Pro ascensu per eumdem arcum à Q ad F, abscissa eadem AC sumenda erit negativè, cumque sit o abscissæ fluxio, loco CB, CD, CE scribendum erit $o-o-2o$ in valoribus linearum MI, NI, DI, EK & BG; & absoluto calculo, ut in eâdem pro descensu solutione, resistentia pro ascensu invenietur proportionalis quantitati $-\frac{S\sqrt{1+QQ}}{RR}$, quæ negativa est, si prior $+\frac{S\sqrt{1+QQ}}{RR}$, quæ pro descensu erat, positiva sit; & contra. 120.

(e) Ex naturâ parabolæ, rectangulum PDQ æquale est rectangulo sub ordinatâ DI & rectâ aliquâ datâ: hoc est, si dicantur recta illa b; PC, a; PQ, c; CH, e; & CD, o; rectangulum $a + o$ in $c - a - o$ seu $ac - aa - 2ao + co - oo$ æquale est rectangulo b in DI, ideoque DI æquale $\frac{ac - aa}{b} + \frac{c - 2a}{b} o - \frac{oo}{b}$. Jam scribendus esset hujus seriei secundus terminus $\frac{c - 2a}{b} o$ pro Qo, tertius item terminus $\frac{oo}{b}$ pro Roo. Cum verò plures non sint termini, debebit quarti coefficiens S evanescere, & propterea quantitas $\frac{S}{R\sqrt{1 + QQ}}$, cui medii densitas proportionalis est, nihil erit. Nullâ igitur medii densitate movebitur projectile in parabolâ, (f) uti olim demonstravit *Galilæus*. *Q. E. I.*



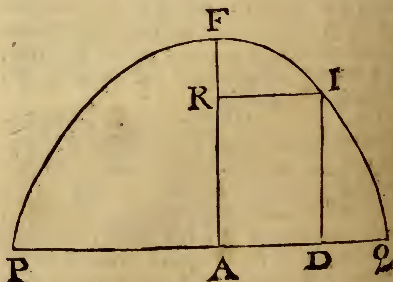
Exempl. 3. Sit linea AGK hyperbola, asymptoton habens NX plano horizontali AK perpendicularem; & quæratur medii densitas, quæ faciat ut projectile moveatur in hâc lineâ.

Sit MX asymptotos altera, ordinatim applicatæ DG productæ occurrens in V; & ex naturâ hyperbolæ, (g) rectan-

(e) * *Ex natura parabolæ, rectangulum &c.* Ex puncto I ad axem parabolæ FA demissum sit perpendiculum IR, sitque axis latus rectum $= b$; erit (per theor. 1. de parab.) $b \times FR = RI^2 = AD^2$; & $b \times FA = AQ^2$. Quare $b \times FA - b \times FR$, seu $b \times RA$, vel $b \times DI = AQ^2 - AD^2 = \overline{AQ + AD} \times \overline{AQ - AD} = PD \times DQ$. Q. E. D.

(f) * *Uti olim demonstravit Galilæus.* Vide demonstrationem n. 40. lib. 1.

(g) * *Rectangulum XV in VG dabitur*, per theor. 4. de hyp.



ctangulum XV in VG dabitur. (h) Datur autem ratio DN ad VX, & propterea datur etiam rectangulum DN in VG. Sit illud bb: & completo parallelogrammo $DNXZ$; dicatur BN, a; BD, o; NX, c; & ratio data VZ ad ZX vel DN ponatur esse $\frac{m}{n}$. Et erit DN æqualis $a-o$, VG æqualis $\frac{bb}{a-o}$, VZ æqualis $\frac{m}{n}\overline{a-o}$, & GD seu $NX-VZ-VG$ æqualis $c-\frac{m}{n}a+\frac{m}{n}o-\frac{bb}{a-o}$. Resolvatur terminus $\frac{bb}{a-o}$ (k) in seriem convergentem $\frac{bb}{a}+\frac{bb}{aa}o+\frac{bb}{a^3}oo+\frac{bb}{a^4}o^3$ &c. & fiet GD æqualis $c-\frac{m}{a}a-\frac{bb}{a}+\frac{m}{n}o-\frac{bb}{aa}o-\frac{bb}{a^3}o^2-\frac{bb}{a^4}o^3$ &c. (i) Hujus se-

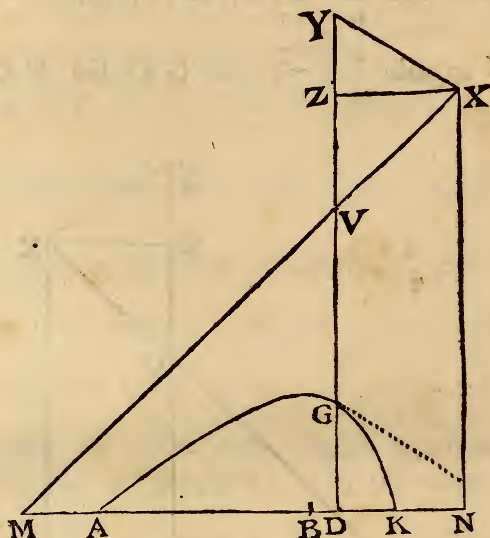
(h) * *Datur autem ratio DN ad VX*, quæ eadem est cum ratione data MN ad MX, ob parallelas DV, NX.

(k) * *In seriem convergentem*, divisione in infinitum productâ.

(i) * *Hujus seriei &c.* Est enim hæc series æqualis seriei $P-Qo-Roo-So^3-$ &c., & singuli illius termini singulis terminis hujus

De Motu Corporum.

riei terminus ſecundus $\frac{m}{n}o - \frac{bb}{aa}o$ uſurpandus eſt pro Qo, tertius cum ſigno mutato $\frac{bb}{a^3}o^2$ pro Ro^2, & quartus cum ſigno



etiam mutato $\frac{bb}{a^4}o^3$ pro So^3, eorumque coefficientes $\frac{m}{n} - \frac{bb}{aa}$, $\frac{bb}{a^3}$ & $\frac{bb}{a^4}$ ſcribendæ ſunt in regula ſuperiore pro Q, R & S.

Quo

hujus æquantur; id eſt, $c - \frac{m}{n}a - \frac{bb}{a}$ eſt P, ſeu ordinata quæ per punctum B ad hyperbolam duceretur; $+\frac{m}{n}o \frac{-bb}{aa}o$ eſt $-Qo$, & ideo $\frac{m}{n} - \frac{bb}{aa} = -Q$; ſed quia in expreſſionibus reſiſtentiæ, denſitatis, & velocitatis ſemper reperitur quadratum QQ, quod idem manet, ſeu radix illius Q affirmativè ſumatur, ſeu negativè, nihili intereſt ſcribere $\frac{bb}{aa} - \frac{m}{n}$, aut $\frac{m}{n} - \frac{bb}{aa}$ pro Q. Secundus autem ſeriei terminus $\frac{-bb}{a^3}o^2$ eſt $-Ro^2$, & ideo, mutatis ſignis, fit $\frac{bb}{a^3} = R$; tertius terminus $\frac{-bb}{a^4}o^3$ eſt $-So^3$, atque proinde $\frac{bb}{a^4} = S$.

Quo facto prodit medii densitas ut $\dfrac{\dfrac{bb}{a^4}}{\dfrac{bb}{a^3}\sqrt{1+\dfrac{mm}{nn}-\dfrac{2mbb}{naa}+\dfrac{b^4}{a^4}}}$ seu (l) $\dfrac{1}{\sqrt{aa+\dfrac{mm}{nn}aa-\dfrac{2mbb}{n}+\dfrac{b^4}{aa}}}$ id (m) est si in VZ sumatur VY æqualis VG, ut $\dfrac{1}{XY}$. Namque aa & $\dfrac{mm}{nn}aa-\dfrac{2mbb}{n}+\dfrac{b^4}{aa}$ sunt ipsarum XZ & ZY quadrata. (n) Resistentia autem invenitur in ratione ad gravitatem quam habet $3XY$ ad $2YG$; & (o) velocitas ea est, quâcum corpus in parabolâ pergeret verticem G, diametrum DG, & latus rectum $\dfrac{XY\ quad.}{VG}$ habente. Ponatur itaque quod medii densitates in locis singulis G sint reciprocè ut distantiæ XY, quodque resistentia in loco aliquo G sit ad gravitatem ut $3XY$ ad $2YG$; & corpus de loco A, justâ cum velocitate emissum, describet hyperbolam illam AGK. *Q. E. I.*

Exempl.

(l) * *Seu*, numeratore & denominatore in $\frac{a^4}{bb}$ ductis.

(m) * *Id est, si in VZ sumatur &c.* Est enim $VG=\frac{bb}{a-o}=\frac{bb}{a}$, & $VZ=\frac{m}{n}\overline{a-o}=\frac{m}{n}a$, ubi evanescit BD, seu o. Quare $VY-VZ=ZY=\frac{bb}{a}-\frac{m}{n}a$; & quia $ZX=DN=a$, & $YX^2=YZ^2+ZX^2$ erit $YX^2=aa+\frac{mm}{nn}aa-\frac{2mbb}{n}+\frac{b^4}{aa}$; ideoque medii densitas ut $\frac{1}{XY}$.

(n) * *Resistentia autem &c.* Resistentia est ad gravitatem ut $3S\sqrt{1+QQ}$ ad $4RR$, id est, ut $\frac{3bb}{a^4}\times$ $\sqrt{1+\frac{mm}{nn}-\frac{2mb^2}{naa}+\frac{b^4}{a^4}}$ ad $\frac{4b^4}{a^6}$, sive 120.
dividendo per $\frac{bb}{a^5}$, ut $3\sqrt{aa+\frac{mm}{nn}aa-\frac{2mbb}{n}+\frac{b^4}{aa}}$ ad $\frac{4bb}{a}$, seu ut $3XY$ ad $4VG=2YG$.

(o) * *Et velocitas &c.* Hujus parabolæ latus rectum est $\frac{1+QQ}{R}=\dfrac{1+\frac{mm}{nn}-\frac{2mbb}{naa}+\frac{b^4}{a^4}}{\frac{bb}{a^3}}=\dfrac{aa+\frac{mm}{nn}aa-\frac{2mbb}{n}+\frac{b^4}{aa}}{\frac{bb}{a}}=\frac{YX^2}{VG}$. Velocitas autem est ut $\sqrt{\frac{1+QQ}{R}}$, adeoque ut $\frac{YX}{\sqrt{VG}}$.

Exempl. 4. Ponatur indefinitè, quod linea AGK hyperbola sit, centro X, asymptotis MX, NX eâ lege descripta, ut constructo rectangulo $XZDN$ cujus latus ZD secet hyperbolam in G & asymptoton ejus in V, fuerit VG reciprocè ut ipsius ZX vel DN dignitas aliqua DN^n, (p) cujus index est numerus n: & quæratur medii densitas, quâ projectile progrediatur in hâc curvâ.

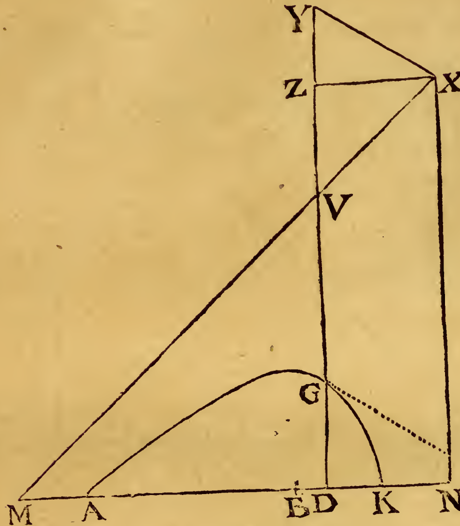
Pro BN, BD, NX scribantur A, O, C respective, sitque VZ ad XZ vel DN ut d ad e, & VG æqualis $\frac{bb}{DN^n}$, & erit DN æqualis A−O, $VG = \frac{bb}{\overline{A-O}|^n}$, $VZ = \frac{d}{e}\overline{A-O}$, & GD seu $NX-VZ-VG$ æqualis $C - \frac{d}{e}A + \frac{d}{e}O - \frac{bb}{\overline{A-O}|^n}$. (q) Resolvatur terminus ille $\frac{bb}{\overline{A-O}|^n}$ in seriem infinitam $\frac{bb}{A^n} + \frac{nbb}{A^{n+1}}O + \frac{nn+n}{2A^{n+2}}bbO^2 + \frac{n^3+3nn+2n}{6A^{n+3}}bbO^3$ &c. ac fiet GD æqualis $C - \frac{d}{e}A - \frac{bb}{A^n} + \frac{d}{e}O - \frac{nbb}{A^{n+1}}O - \frac{+nn+n}{2A^{n+2}}bbO^2$

$+n^3$

(p) * *Cujus index est numerus n*, positivus. Hanc autem hyperbolam, dum producitur, ad lineas XM, XN etiam productas continuo accedere, easque non nisi in distantia infinita contingere posse manifestum est. Cum enim sit VG ut $\frac{1}{DN^n}$, ubi DN = o, hyperbola rectam XN attingit, & distantia VG infinita evadit; & ubi DN infinita sit, VG est nihil, & ideo hyperbola alteram asymptoton XM tangit, in distantia infinita ab Asymptoto XN.

(q) * *Resolvatur terminus ille* $\frac{bb}{\overline{A-O}}{}^n$, seu $bb \times \overline{A-O}^{-n}$, in seriem infinitam per formulam generalem (548. lib. 1.), & invenietur $bb \times \overline{A-O}^{-n} = bbA^{-n} + \frac{n}{1}bbA^{-n-1}O + \frac{n \times \overline{n+1}}{1.2} \times bbA^{-n-2}O^2 + \frac{n \times \overline{n+1} \times \overline{n+2}}{1.2.3}bbA^{-n-3}O^3 +$ &c. $= \frac{bb}{A^n} + \frac{nbbo}{A^{n+1}} + \frac{\overline{nn+n} \times bbO^2}{2A^{n+2}} + \frac{\overline{n^3+3n^2+2n}}{6A^{n+3}} \times bbO^3 +$ &c.; Quo enim modo quo in n. 551 demonstravimus formulam ad potentias quorum exponentes sunt fracti applicari posse, eodem fere modo eam ad potentias quorum exponens negativus est applicari debere constabit.

$-\frac{+n^3+3nn+2n}{6A^{n+3}}bbO^3$ &c. Hujus ſeriei terminus ſecundus $\frac{d}{e}O-\frac{nbb}{A^{n+1}}O$ uſurpandus eſt pro Qo, tertius $\frac{nn+n}{2A^{n+2}}bbO^2$

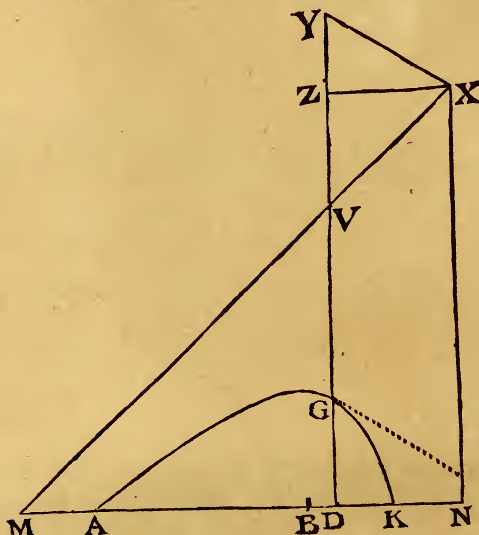


pro Ro^2, quartus $\frac{n^3+3nn+2n}{6A^{n+3}}bbO^3$ pro So^3. Et inde medii denſitas $\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$, in (r) loco quovis G, fit $\frac{n+2}{3\sqrt{A^2+\frac{dd}{ee}A^2-\frac{2dnbb}{eA^n}A+\frac{nnb^4}{A^{2n}}}}$, ideoque ſi in VZ capiatur VY æqualis $n\times VG$, denſitas illa eſt reciprocè ut XY.

(r) * *In loco quovis G fit &c.* Invenitur enim $\frac{S}{R}=\frac{n+2}{3A}$, & $\sqrt{1+QQ}=\sqrt{1+\frac{dd}{ee}-\frac{2dnbb}{eA^{n+1}}+\frac{nnb^4}{A^{2n+2}}}$; & ideo, ob datum numerum $\frac{n+2}{3}$, $\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$ eſt ut $\frac{1}{\sqrt{AA+\frac{dd}{ee}AA-\frac{2dnbbA}{eA^n}+\frac{n^2b^4}{A^{2n}}}}$. 120.

De Motu Corporum.

XY. Sunt enim A^2 & $\frac{dd}{ee}A^2 - \frac{2dnbb}{eA^n}A + \frac{nnb^4}{A^{2n}}$ (ſ) ipſarum XZ & ZY quadrata. Reſiſtentia autem in eo-



dem loco G (t) fit ad gravitatem ut $3S$ in $\frac{XY}{A}$ ad $4RR$, id eſt, ut XY ad $\frac{2nn+2n}{n+2}VG$. Et velocitas ibidem ea ipſa eſt, quâcum corpus projectum in parabolâ pergeret, verticem

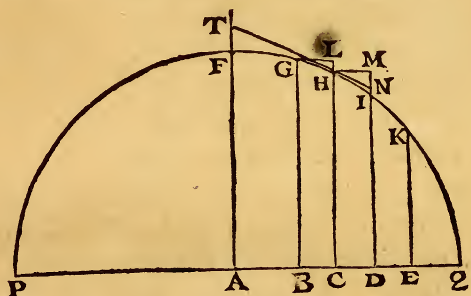
(ſ) * *Ipſarum XZ & ZY quadrata.* Nam $XZ = DN = A$ (hyp.), & $ZY = VY - VZ = n \times VG - \frac{d}{e}A = \frac{nbb}{A^n} - \frac{d}{e}A$; aut $ZY = VZ - VY = \frac{d}{e}A - \frac{nbb}{A^n}$, prout YV major vel minor eſt quam VZ. Quare cum ſit $XY^2 = XZ^2 + ZY^2$, denſitas erit ut $\frac{1}{XY}$.

(t) * *Fit ad gravitatem ut &c.* Quoniam (ex dem.) $\frac{XY}{A} = \sqrt{1+QQ}$, erit $3S\sqrt{1+QQ} = \frac{3S \times XY}{A}$, & inde reſiſtentia ad gravitatem ut $\frac{3S \times XY}{A}$ ad $4RR$, vel ut XY ad $\frac{4RR \times A}{3S}$; ſed $4RR \times A = \frac{\overline{nn+n}^2 \times b^4}{A^{2n+3}}$, & $3S = \frac{\overline{nn+n} \times \overline{n+2}\,bb}{2A^{n+3}}$, ideoque $\frac{4RRA}{3S} = \frac{\overline{2nn+2n} \times bb}{\overline{n+2} \times A^n} = \frac{2nn+2n}{n+2} \times VG$,

cem G, diametrum GD & (u) latus rectum $\frac{1+QQ}{R}$ seu $\frac{2\,XY\ quad.}{nn+n \text{ in } VG}$ habente. *Q. E. I.*

Scholium.

Eâdem ratione quâ prodiit densitas medii ut $\frac{S \times AC}{R \times HT}$ in corollario primo, si resistentia ponatur ut velocitatis V dignitas quælibet V^n, (x) prodibit densitas medii ut $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}} \times \overline{\frac{AC}{HT}}\Big|^{n-1}$. Et (y) propterea si curva inveniri potest eâ lege, ut data fuerit ratio $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}}$ ad $\overline{\frac{HT}{AC}}\Big|^{n-1}$, vel $\frac{S^2}{R^{4-n}}$ ad $\overline{1+QQ}\big|^{n-1}$: corpus movebitur in hâc curvâ in uniformi medio cum resistentia quæ sit ut velocitatis dignitas V^n. Sed redeamus ad curvas simpliciores.



Quo-

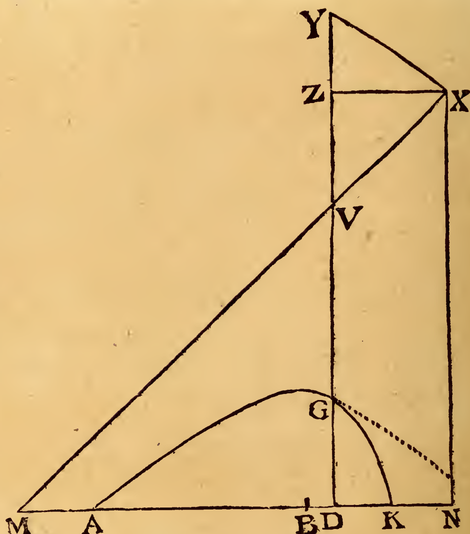
ob $VG = \frac{bb}{A^n}$. Quare resistentia est ad gravitatem ut XY ad $\frac{2nn+2n}{n+2} \times VG$.

(u) * *Et latus rectum &c.* Est enim $\frac{XY^2}{A^2} = 1 + QQ$, & hinc $\frac{1+QQ}{R} = \frac{2XY^2 \times A^n}{nn+n \times bb} = \frac{2XY^2}{nn+n \times VG}$, ob $VG = \frac{bb}{A^n}$. Unde velocitas quæ est ut $\sqrt{\frac{1+QQ}{R}}$, erit ut $\frac{YX}{\sqrt{VG}}$, ob datum numerum $\frac{2}{nn+n}$.

(x) * *Prodibit densitas medii ut &c.* (115). 120.

(y) * *Et propterea &c.* Si enim fuerit $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}}$ ad $\frac{HT^{n-1}}{AC^{n-1}}$ in ratione a ad b, erit $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}} = \frac{a}{b} \times \frac{HT^{n-1}}{AC^{n-1}}$, & $\frac{S \times AC^{n-1}}{R^{\frac{4-n}{2}} \times HT^{n-1}} = \frac{a}{b}$, id est densi-

 tas



Quoniam motus non fit in parabolâ nisi in medio non resistente, in hyperbolis vero hic descriptis fit per resistentiam perpetuam; perspicuum est quod linea, quam projectile in medio uniformiter resistente describit, propius (z) accedit ad hyperbolas hasce quam ad parabolam. Est utique linea illa hyperbolici generis, sed (a) quæ circa verticem magis distat ab asymptotis; in partibus à vertice remotioribus propius ad ipsas accedit quam pro ratione hyperbolarum quas hic descripsi. Tanta vero non est inter has & illam differentia, quin illius loco possint hæ in rebus practicis non incommodè adhiberi. Et utiliores forsan futuræ sunt hæ, quam hyperbola magis accurata & simul magis composita. Ipsæ vero in usum sic deducentur.

Com-

tas medii ut quantitas data $\frac{a}{b}$, & proinde uniformis. Est autem (per cor. 1. prop. X.) $\frac{HT}{AC} = \sqrt{1 + QQ}$: quare si data fuerit ratio $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}}$ ad $\frac{HT^{n-1}}{AC^{n-1}}$, data quoque erit ratio quadratorum $\frac{S^2}{R^{4-n}}$ ad $\overline{1+QQ}|^{n-1}$, & contra.

(z) * *Accedit ad hyperbolas hasce*, cum iis tamen perfecte convenire nunquam potest, quod in hisce hyperbolis densitas medii reciproce proportionalis sit rectæ variabili XY, & præterea non satis manifestum sit curvam, quam projectile in medio uniformi describit in hypothesi resistentiæ velocitatis quadrato proportionalis, habere asymptotum verticalem ut XN: cum præsertim in hâc resistentiæ hypothesi spatium motu horizontali insito descriptum, semotâ gravitate, infinitum evadat (per cor. 1. prop. V). Verumtamen inveniri possunt hyperbolæ in quibus pro parte illâ exiguâ curvæ AGK, quæ in rebus practicis necessaria est, recta XY sit quam proxime constans, & proinde medii densitas quam proxime uniformis; quo fit ut curvæ illæ in rebus practicis non incommodè adhiberi possint.

(a) * *Sed quæ circa verticem &c.* Hæc demonstrabuntur infra in notâ *h*.

Compleatur parallelogrammum $XYGT$, & (b) recta GT tanget hyperbolam in G, ideoque densitas medii in G, est reciprocè ut tangens GT, & velocitas ibidem ut $\sqrt{\frac{GTq}{GV}}$, resistentia autem ad vim gravitatis ut GT ad $\frac{2nn+2n}{n+2}$ in GV.

Proin-

(b) * *Et recta GT tanget hyperbolam in G.* Ex puncto G ad ordinatam BF per B ductam, & ex puncto T ad ordinatam DG demissa sint perpendicula GR & TS, sitque GT tangens in G. Erit FR ad RG seu BD, ut GS ad ST, ob triangula similia FRG, GST. Sed FR est Qo seu $\frac{nbbO}{A^{n+1}} - \frac{d}{e}O$, BD est O, & ST = ZX = A. Quare erit $\frac{nbb}{A^{n+1}} - \frac{d}{e}$ ad 1, seu $\frac{nbb}{A^n} - \frac{d}{e}A$ ad A, ut GS ad ZX seu A. Supra invenimus $ZY = \frac{nbb}{A^n} - \frac{d}{e}A$. Ergo ZY = GS; & ideo tangens GT æqualis est & parallela rectæ YX. Est autem (ex demonst.) densitas medii in G reciprocè ut YX: quare densitas medii in G est recipro- 120.
cè ut tangens GT, velocitas ibidem ut $\sqrt{\frac{GT^2}{GV}}$, & resistentia ad gravitatem ut GT ad $\frac{2nn+2n}{n+2}$ GV.

DE MOTU CORPORUM.

Proinde ſi corpus de loco *A* ſecundum rectam *AH* projectum deſcribat hyperbolam *AGK*, & *AH* producta occurrat aſymptoto *NX* in *H*, actaque *AI* eidem parallela occurrat alteri aſymptoto *MX* in *I*: erit (c) medii denſitas in *A* reciprocè ut *AH*, & corporis velocitas ut $\sqrt{\frac{AHq}{AI}}$, ac reſiſtentia ibidem ad gravitatem ut *AH* ad $\frac{2nn+2n}{n+2}$ in *AI*. Unde prodeunt ſequentes regulæ.

Reg. (d) 1. Si ſervetur tum medii denſitas in *A*, tum velocitas quâ-

(c) * *Erit medii denſitas &c.* Coincidente puncto G cum A, tangens GT cum tangente AH congruit, & recta VG cum AI; proindeque *medii denſitas in A eſt reciproce ut AH, & corporis &c.*

(d) * *Reg.* 1. Manentibus indice hyperbolæ n & denſitate medii in A, manet tangentis longitudo AH quæ denſitati reciprocè proportionalis eſt. Manente velocitate quâcum corpus e loco A projicitur, manet linea $\sqrt{\frac{AH^2}{AI}}$ quæ eſt ut velocitas; & ideo cum data ſit AH, datur & AI. Ob parallelas GT, YX, eſt $TX=GY=GV+VY=GV+n\times GV$ (ex. 4.), & quia coincidente puncto G cum A, fit $GV=AI$, & $TX=HX$; erit $HX=AI+n\times AI$. Quare ob datas quantitates AI & *n*, datur & HX. Unde ſi longitudines illæ AH, AI, & HX in aliquo caſu inveniantur, hyperbola deinceps ex dato quovis angulo NAH expeditè determinari poteſt. His enim datis, dantur puncta A, H & I. Per H ducatur

XHN

quâcum corpus projicitur, & mutetur angulus *NAH*; manebunt longitudines *AH*, *AI*, *HX*. Ideoque si longitudines illæ in aliquo casu inveniantur, hyperbola deinceps ex dato quovis angulo *NAH* expeditè determinari potest.

Reg. (e) 2. Si servetur tum angulus *NAH*, tum medii densitas in *A*, & mutetur velocitas quâcum corpus projicitur; servabitur longitudo *AH*, & mutabitur *AI* in duplicatâ ratione velocitatis reciprocè.

Reg. (f) 3. Si tam angulus *NAH*, quam corporis velocitas in *A*, gravitasque acceleratrix servetur, & proportio resistentiæ in *A* ad gravitatem motricem augeatur in ratione quâcunque; augebitur proportio *AH* ad *AI* in eâdem ratione, manente parabolæ prædictæ latere recto, eique proportionali longitudine $\frac{AHq}{AI}$: & propterea minuetur *AH* in eâdem ratione, & *AI* minuetur in ratione illâ duplicatâ. (g) Augetur vero proportio resistentiæ ad pondus, ubi vel gravitas specifica sub

XHN recta horizontali AN Verticalis, & dabitur punctum N; & quia data est HX, dabitur etiam punctum X; datis vero punctis duobus X & I, dabitur recta XIM cum puncto M ubi horizontalem MN secat. Unde ductâ quâvis rectâ VD ad horizontalem AN normali, si in ea capiatur VG ad AI, ut est AN^n ad DN^n, vel ut XI^n ad XV^n, dabitur punctum G in trajectoria AGK. Est enim (Exemplo 4.) ordinata quævis VG ad alteram ordinatam IA, ut AN^n ad DN^n, seu ut XI^n ad XV^n.

(e) * *Reg.* 2. Servatâ medii densitate in A, servabitur tangentis longitudo AH, quæ est ut densitas inversè. Et quia velocitas in A est ut $\sqrt{\frac{AH^2}{AI}}$, & velocitatis quadratum ut $\frac{AH^2}{AI}$, id est, ut $\frac{1}{AI}$ ob datam AH; erit AI velocitatis quadrato reciprocè proportionalis.

(f) * *Reg.* 3. Datâ corporis velocitate & gravitate acceleratrice in A, datur longitudo $\frac{AH^2}{AI}$ tum velocitatis quadrato, tum lateri recto parabolæ (Exemp. 4.) proportionalis. Est autem resistentia motrix, si ita loqui fas est, ad gravitatem motricem, ut AH ad $\frac{2nn+2n}{n+2}\times AI$ (Ex. 4.). Quare si proportio resistentiæ motricis in A ad gravitatem motricem augeatur in ratione quacumque, augebitur proportio AH ad $\frac{2nn+2n}{n+2}$ AI, seu, ob datum numerum $\frac{2nn+2n'}{n+2}$, augebitur proportio AH ad AI in eâdem ratione; & quia longitudo $\frac{AH^2}{AI}$ constans est, ac proinde $\frac{AH}{AI}$ est ut $\frac{1}{AH}$, & AI ut AH^2, necessum est ut AH minuatur in ratione quâ augetur $\frac{AH}{AI}$, & ut AI minuatur in ratione illâ duplicatâ.

(g) 121. * *Augetur verò proportio resistentiæ ad pondus &c.* Corpus specificè gravius vel levius dicitur, quod sub æquali 121.

De Motu Corporum.

ſub æquali magnitudine ſit minor, vel medii denſitas major, vel reſiſtentia, ex magnitudine diminutâ diminuitur in minore ratione quam pondus.

Reg. (h) 4. Quoniam denſitas medii prope verticem hyperbolæ major eſt quam in loco A; ut habeatur denſitas mediocris, debet ratio minimæ tangentium GT ad tangentem AH inveniri, & denſitas in A augeri in ratione paulo ma-

li volumine majus vel minus pondus habet quam alterum corpus quocum comparatur; & ideo gravitas ſpecifica corporis, volumine dato, eſt ut ipſius pondus abſolutum, id eſt, datâ gravitate acceleratrice, ut corporis maſſa (per defin. 7. & not. 3. lib. 1.). At, dato volumine, maſſa eſt ut denſitas (2. lib. 1.); quare gravitas ſpecifica corporis eſt ipſius denſitati proportionalis. Augetur itaque proportio reſiſtentiæ ad gravitatem motricem ſeu ad corporis pondus, tum ubi manentibus corporis volumine, figurâ & velocitate ac medii denſitate, manenteque proinde reſiſtentiâ, gravitas ſpecifica ſit minor; tum ubi, cæteris paribus, medii denſitas augetur, quo caſu medii reſiſtentia creſcit cum denſitate, & corporis pondus in fluido denſiori & ſpecificè graviori magis ſublevati minuitur; tum ubi reſiſtentia ex magnitudine corporis diminutâ, diminuitur in minori ratione quam pondus. Ex quibus liquet tertiam regulam determinandis motibus corporum variæ magnitudinis & denſitatis accommodatam eſſe.

122. Lemma. Datâ curvâ A G K, invenire minimam tangentium G T. Quoniam (ex dem. in Exemp. 4.) $XY^2 = GT^2 = A^2 + \frac{dd}{ee}A^2 - \frac{2dnbb}{eA^{n-1}} + \frac{nnb^4}{A^{2n}}$; hujus quantitatis, in quâ ſi detur curva A G K, ſola eſt variabilis A, fluxio ponenda eſt nihilo æqualis (48). Brevitatis cauſâ dicantur $1 + \frac{dd}{ee} = f$, $\frac{2dnbb}{e} = 2g$, $nnb^4 = h$, & $A = x$; erit $GT^2 = fxx - 2gx^{1-n} + hx^{-2n}$; & ſumptis fluxionibus, $0 = 2fxdx + \overline{n-1} \times 2gx^{-n}dx - 2nhx^{-2n-1}dx$. Dividatur æquatio tota per $2xdx$, & fiet $0 = f + \overline{n-1}gx^{-n-1} - nhx^{-2n-2}$; & multiplicando per x^{2n+2}, $fx^{2n+2} + \overline{n-1}gx^{n+1} = nh$, unde eruitur, ut fit in reſolutione æquationum ſecundi gradus,

$$x^{n+1} = \frac{\sqrt{(n-1)^2gg + 4nhf} - (n-1)g}{2f},$$

& hinc habetur

$$x = \left[\frac{\sqrt{(n-1)^2gg + 4nhf} - (n-1)g}{2f}\right]^{\frac{1}{n+1}}.$$

Quare ſi loco x ſubſtituatur, hic ipſius valor in æquatione $GT = \sqrt{fxx - 2gx^{1-n} + hx^{-2n}}$, obtinebitur minima tangentium. Q. E. I.

123. Cor. Si curva A G K ſit hyperbola conica, erit index $n = 1$, & ideo $n - 1 = 0$, & $x = \sqrt[4]{\frac{h}{f}}$. Unde invenitur $GT^2 = f\sqrt[2]{\frac{h}{f}} - 2g + \frac{h}{\sqrt{\frac{h}{f}}} = 2\sqrt[2]{hf} - 2g = \frac{2bb}{e}\sqrt{ee+dd} - \frac{2dbb}{e} = 2bb \times \frac{[\sqrt{ee+dd} - d]}{e}$. Quia vero (Ex. 4.) $d : e = VZ : XZ = XN : MN$, ac proinde $dd : ee = XN^2 : MN^2$, & componendo $dd + ee : ee = XN^2 + MN^2$, ſeu $MX^2 : MN^2$, atque adeo $\frac{\sqrt{ee+dd}}{e} = \frac{MX}{MN}$, & $\frac{d}{e} = \frac{XN}{MN}$; erit $\frac{\sqrt{ee+dd} - d}{e} = \frac{MX - XN}{MN}$. Præterea (Ex. 4.) eſt $VG = \frac{bb}{DN}$, $AI = \frac{bb}{AN}$, & hinc $2AI \times AN = 2bb$. Erit igitur minimæ tangentium quadratum $GT^2 = \frac{2AI \times AN}{MN} \times \overline{MX - XN}$.

(h) * *Reg.* 4. Quoniam denſitas in loco quovis G eſt reciprocè ut tangens G T, quæ prope verticem hyperbolæ minor eſt quam in loco A; manifeſtum eſt denſitatem medii prope verticem hyperbolæ majorem eſſe quam in loco A. Denſitas in loco A dicatur K, in loco G per quem ducitur tangentium minima GT, dica-

jore quam ſemiſummæ harum tangentium ad minimam tangentium *GT*.

(i) *Reg.* 5. Si dantur longitudines *AH*, *AI*, & deſcribencatur *B*; & erit $K : B = GT : AH$, & hinc $K + B : K = GT + AH : GT$, & $\frac{K+B}{2} : K = \frac{GT+AH}{2} : GT$. Eſſet autem $\frac{K+B}{2}$ denſitas mediocris, ſi tangens AH foret omnium maxima, ſicuti GT (hyp.) eſt omnium minima; & ideo, ut medii denſitas ferè tanquam uniformis haberi poſſet, augenda eſſet denſitas in A in ratione ſemiſummæ tangentium $\frac{GT+AH}{2}$ ad minimam tangentium GT. Verum quia tangens AH non eſt omnium maxima, ſed tangentes aliæ ad partes curvæ verſus *K* ductæ majores ſunt; denſitas in A augenda eſt in ratione paulo majore quam ſemiſummæ $\frac{GT+AH}{2}$ ad GT, ut medium tanquam uniforme ferè cenſeatur. Atque hoc pacto errores oriundi ex eo quod medium in loco A denſius ſupponatur, corrigentur ferè aliis erroribus qui naſcuntur ex eo quod in G medium rarius fingatur quam pro ratione curvæ AGK.

Interim liquet veram trajectoriam quam corpus in medio uniformi deſcribit, circa verticem magis diſtare ab aſymptotis, & in partibus à vertice remotioribus propius ad ipſas accedere quam pro ratione hyperbolarum in medio non uniformi deſcriptarum. Nam ſi e loco A, cum velocitate $\sqrt{\frac{AH^2}{AI}}$, & directione AH projiciatur corpus in medio cujus denſitas uniformis æqualis ſit denſitati mediocri medii in quo deſcribitur hyperbola AGK; ob majorem medii uniformis denſitatem in A, qua corporis velocitas impreſſa magis minuitur, trajectoria intra hyperbolam continebitur, adeoque prope verticem ab aſymptotis magis diſtabit; & quia prope verticem eſt magis depreſſa, in partibus verſus K a vertice remotioribus ad aſymptotum NX propius accedet quam hyperbola AGK; cum præſertim in medio uniformi ſpatium motu horizontali deſcriptum, ſemotâ gravitate, infinitum evadat (per cor. 1. prop. V). 123.

(i) * *Reg.* 5. Si dentur longitudines AH, AI cum angulo HAN, & deſcriben-

da sit figura AGK: produc HN ad X, ut sit HX ad AI ut $n+1$ ad 1, centroque X & asymptotis MX, NX per punctum A describatur hyperbola, eâ lege, ut sit AI ad quamvis VG ut XV^n ad XI^n.

Reg. (k) 6. Quò major est numerus n, eò magis accuratæ sunt hæ hyperbolæ in ascensu corporis ab A, & minus accuratæ in ejus descensu ad K; & contra. Hyperbola conica mediocrem rationem tenet, estque cæteris simplicior. Igitur si hyperbola sit hujus generis, & punctum K, ubi corpus projectum incidet in rectam quamvis AN per punctum A transeuntem, quæratur: occurrat producta AN asymptotis MX, NX in M & N, & sumatur NK ipsi AM æqualis.

Reg. 7. Et hinc liquet methodus expedita determinandi hanc hyperbolam ex phænomenis. Projiciantur corpora duo similia & æqualia, eâdem velocitate, in angulis diversis HAK, hAk, inci-

benda sit figura AGK: ex puncto H ad horizontalem AN demitte perpendiculum HN; produc HN ad X, ut sit HX æqualis facto sub $n+1$ & AI (demonstravimus enim in nota ad reg. 1. esse HX æqualem facto $\overline{n+1} \times AI$) centroque X & asymptotis MX, NX per punctum A describatur hyperbola, eâ lege, ut sit AI ad quamvis VG ut XV^n ad XI^n: est enim (per hyp. Ex. 4.) VG ad AI, ut AN^n ad DN^n, seu ut XI^n ad XV^n.

(k) * *Reg. 6.* Quo major est numerus n, eo magis hæ hyperbolæ in ascensu corporis ab A accedunt ad trajectorias in medio uniformi descriptas, & eo minus in descensu ad K accuratæ sunt; & contrà. Nam quo major est numerus n, eo minus tangens GT, quæ densitati reciprocè proportionalis est, in ascensu corporis ab A variatur; & eo magis in descensu ad K mutatur, quippe data sit medii densitas in A cum angulo projectionis HAN, & quantitas $\frac{n+2}{AH}$ densitati in A (ex. 4.) proportionalis, data erit, ideoque tangens AH eo longior erit quo major fuerit numerus n; & quia dato angulo HAN, datur specie triangulum rectangulum HNA, ratioque proinde laterum AH, AN, HN etiam datur, liquet quod crescente AH aut numero n, crescant quoque latera AN & HN. Ex demonstratis in Exemplo 4°. corpore ascendente tangentis GT quadratum $GT^2 = DN^2 + [ZV - nVG]^2$, & corpore descendente est $GT^2 = DN^2 + [nVG - ZV]^2$. Ex natura hyperbolæ AGK, est $DN^n : AN^n = AI : VG$, ideoque $nVG = \frac{nAI \times AN^n}{DN^n}$. Ex demonstratione regulæ 1æ, $HX = \overline{n+1} \times AI$, & proinde $NX = HN + n + 1 \times AI$, & $NX - AI = HN + nAI$. Sed ob triangula XZV, MNX, MAI similia, ZX seu DN est ad ZV, ut MN ad NX, & ut MA ad AI, & divisim DN est ad ZV, ut AN ad $NX - AI$ seu $HN + nAI$; unde fit $ZV = \frac{DN \times HN + nAI \times DN}{AN}$.

Quare in corporis ascensu $GT^2 = DN^2 + \left[\frac{DN \times HN + nAI \times DN}{AN} - \frac{nAI \times AN^n}{DN^n}\right]^2$

&

incidantque in planum horizontis in *K* & *k*; & notetur proportio *AK* ad *Ak*. Sit ea *d* ad *e*. Tum erecto cujusvis longitudinis perpendiculo *AI*, assume utcunque longitudinem *AH* vel *Ah*, & (1) inde collige graphicè longitudines *AK*,

& in descensu $GT^2 = DN^2 + \left[\frac{n AI \times AN^n}{DN^n} - \frac{DN \times HN + n AI \times DN}{AN}\right]^2$. Jam vero si numerus *n* satis magnus fuerit, lineæ AH, AN, HN tam in ascensu quam in descensu corporis longiores sunt, & in ascensu ab A est fere DN æqualis AN, in descensu verò DN quantum libet minor ipsâ AN. Unde in ascensu ab A est fere $\frac{n AI \times DN}{AN} = n AI$ & ideo $GT^2 = DN^2 + \left[\frac{DN \times HN}{AN}\right]^2 = DN^2 + HN^2$ ferè. Est autem $AH^2 = AN^2 + HN^2$: quare ratio GT ad AH in ascensu corporis ab A est ferè æqualitatis, dum numerus *n* satis magnus supponitur, ac proinde non multum variatur densitas: In descensu verò ad K, fit DN quantumlibet exigua respectu datæ AN, & ideo quantitas $\frac{n AI \times AN^n}{DN^n}$ vehementer crescit, & hinc tangens GT multum

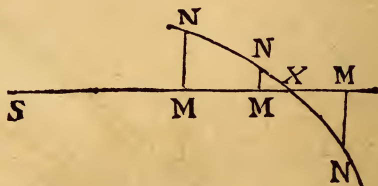
variatur ubi numerus *n* magnus est. Con- 123.
tra fit, si numerus ille sit admodum exiguus. Porro cum numerus *n* possit esse quilibet integer vel fractus, & in hyperbola conica sit *n* æqualis unitati, quæ veluti medium locum tenet inter nnmeros omnes integros & fractos, satis manifestum est hyperbolam conicam inter superiores omnes & inferiores hyperbolas mediocrem rationem tenere, & quia etiam cæteris simplicior est, posse loco veræ trajectoriæ in medio uniformiter denso adhiberi. Si igitur hyperbola AGK sit hujus generis, & punctum K, ubi corpus projectum incidet in rectam quamvis AN, horizontalem vel horizonti obliquam, per punctum A transeuntem, quæratur: occurrat producta AN asymptotis MX, NX, in M & N, & sumatur NK ipsi AM æqualis, & habebitur punctum K (per theor. 1. de conicis).

(1) * *Et inde collige graphicè &c.* Datâ enim tangente AH, tum magnitudine tum positione, datur verticalis HN

cum

DE MOTU CORPORUM.

Ak, per reg. 6. Si ratio *AK* ad *Ak* ſit eadem cum ratione *d* ad *e*, (m) longitudo *AH* recte aſſumpta fuit. Sin minus cape in recta infinita *SM* longitudinem *SM* æqualem aſſumptæ *AH*, & erige perpendiculum *MN* æquale rationum differentiæ $\frac{AK}{Ak} - \frac{d}{e}$ ductæ in rectam quamvis datam. Simili methodo ex aſſumptis pluribus longitudinibus *A H* invenienda ſunt plura puncta *N*, & per omnia agenda (n) curva linea regularis *NNXN*, ſecans rectam *S M M M* in *X*. Aſſumatur demum *A H* æqualis abſciſſæ *SX*, & inde denuo inveniatur longitudo *AK*; & longitudines, quæ ſint ad aſſumptam longitudinem *AI* & hanc ultimam *A H*, ut longitudo *A K* per experimentum cognita ad ultimo inventam longitudinem *A K*, erunt veræ illæ longitudi-



cum puncto N; & quia aſſumitur etiam AI, & eſt HX = 2 AI (per dem. reg. 1æ.) ob $n = 1$; dabitur hyperbolæ centrum X, & inde ob datum punctum I dabitur aſymptotus altera XIM cum puncto M in horizontali MN; & capiendo NK æqualem datæ MA, dabitur punctum K, & hinc longitudo AK obtinebitur. Eodemque modo invenietur altera longitudo Ak.

(m) * *Longitudo AH recte aſſumpta fuit.* Datâ medii denſitate in A cum velocitate corporis ſub diverſis angulis HAK, hAk projecti, manet perpendiculum AI, & tangens AH æqualis eſt tangenti Ah (per regulam 1am). Datis tangente AH, angulo HAK & perpendiculo AI, hyperbola AGK deſcribi poteſt (per reg. 6am. & notam præced.) & ideo data eſt tum ſpecie, tum magnitudine. Unde ſi dentur tantum angulus HAK & ratio tangentis HA ad AI, hyperbola AGK ſpecie tantum dabitur, id eſt, omnes hyperbolæ, quæ ex his duobus datis deſcribentur, ſimiles erunt. Quare ſi in hyperbola AGK, quæ in chartâ deſcripta ſupponitur, tangens aſſumpta AH ſit ad perpendiculum AI, ut tangens hyperbolæ quam corpus ſub angulo æquali HAK projectum in medio reſiſtente deſcribit, eſt ad ſuum perpendiculum AI; hyperbola AGK in charta deſcripta ſimilis erit hyperbolæ quæ in medio reſiſtente deſcribitur. Et eodem argumento altera hyperbola, cujus eſt amplitudo Ak & tangens Ah, manente perpendiculo AI, ſimilis erit hyperbolæ illi quam corpus ſub angulo æquali hAk, projectum in ſecundo experimento deſcribit. Quâ propter, ob figurarum in chartâ & in medio reſiſtente deſcriptarum ſimilitudinem, amplitudines AK, Ak erunt inter ſe ut homologæ amplitudines hyperbolarum quæ in experimentis deſcriptæ ſunt, id eſt, AK : Ak = d : e.

(n) * *Curvas regularis.* Vide notam 75. lib. hujus.

tudines AI & AH, (o) quas invenire opportuit. Hisce verò datis dabitur & resistentia medii in loco A, (p) quippe quæ sit ad vim gravitatis ut AH ad $\frac{4}{3}AI$. Augenda est autem densitas medii per reg. 4. & resistentia modo inventa, si (q) in eâdem ratione augeatur, fiet accuratior.

Reg. 8. Inventis (r) longitudinibus AH, HX; si jam deside-

(o) * *Quas invenire oportuit.* Cum enim abscissa SM longitudini assumptæ AH æqualis sit, & rationum differentia $\frac{AK}{Ak} - \frac{d}{e}$ exponatur per ordinatam MN; ubi sit $SM = SX$ & proinde $MN = o$, est etiam $\frac{AK}{Ak} - \frac{d}{e} = o$, & ideo $\frac{AK}{Ak} = \frac{d}{e}$, atque SX æqualis veræ longitudini assumendæ AH (per not. præced.). Si itaque ex datis perpendiculo AI & verâ longitudine inventâ AH cum angulo HAN quæratur, ut supra, longitudo AK; ob similitudinem figurarum in medio resistente & in charta descriptarum, erit longitudo AK experimento cognita ad longitudinem AK ultimo inventam in charta, ut longitudo AH in medio resistente ad longitudinem AH in chartâ ductam, atque etiam ut perpendiculum AI in medio resistente ad perpendiculum AI in charta assumptum. Quibus inventis, describi poterit hyperbola similis & æqualis hyperbolæ, quam corpus in medio resistente descripsit. 123.

(p) * *Quippe quæ sit ad vim gravitatis &c.* Ex demonstratis in hoc scholio ante regulam 1am. resistentia est ad gravitatem ut AH ad $\frac{2nn+2n}{n+2}$ AI, hoc est, ut AH ad $\frac{4}{3}$ AI, ob $n = 1$ (per hyp.).

(q) * *Si in eadem ratione augeatur.* Nam datâ velocitate, resistentia est ut medii densitas.

(r) * *Inventis longitudinibus AH, HX &c.* Inventis enim (per reg. 7.) lineis AI & AH, datur linea HX, ut pote quæ æqualis est 2AI, ob $n = 1$, (reg. 5.).

ſideretur poſitio rectæ AH, ſecundum quam projectile, datâ illâ cum velocitate emiſſum incidit in punctum quodvis K: ad puncta A & K erigantur rectæ AC, KF horizonti perpendiculares, quarum AC deorſum tendat, & æquetur ipſi AI ſeu $\frac{1}{2}$ HX. Aſymptotis AK, KF (ſ) deſcribatur hyperbola, cujus conjugata tranſeat per punctum C, centroque A & intervallo AH deſcribatur circulus ſecans hyperbolam illam in puncto H; & projectile ſecundum rectam AH emiſſum incidet in punctum K. *Q. E. I.* Nam punctum H, (t) ob datam longitudinem AH, locatur alicubi in circulo deſcripto. Agatur CH occurrens ipſis AK & KF, illi in E, huic in F; & (u) ob parallelas CH, MX & æquales AC, AI, erit AE æqualis

(ſ) * *Deſcribatur hyperbola* (346. lib. 1.)

(t) * *Ob datam longitudinem AH*, per reg. 1am.

(u) * *Et ob parallelas CH, MX &c.* Nam ſi ſupponamus H eſſe punctum quæſitum, per quod ducenda eſt recta AH, erit (per conſtr.) HX æqualis & parallela IC, & ideo CH parallela IX ſeu MX, ac triangula CAE, IAM ſimilia; proindeque cum ſit CA = AI (per conſt.) erit etiam AE = MA − KN, (per theor. 1. de conicis). Sed ob triangula ſimilia CAE, HNE, & ob parallelas KF, NH, eſt CE : AE = EH : EN = FH : KN. Cum igitur ſit AE = KN, erit quoque CE = FH; ac proinde incidit punctum H in hyperbolam (per theor. 1. de hyp.)

lis *A M*, & propterea etiam æqualis *K N*. Sed *CE* eſt ad *A E* ut *FH* ad *K N*, & propterea *CE* & *F H* æquantur. Incidit ergo punctum *H* in hyperbolam aſymptotis *A K*, *K F* deſcriptam, cujus conjugata tranſit per punctum *C*, atque ideo reperitur in communi interſectione hyperbolæ hujus & circuli deſcripti. *Q. E. D.* Notandum eſt autem quod hæc operatio perinde ſe habet, ſive recta *AKN* horizonti parallela ſit, ſive ad horizontem in (x) angulo quovis inclinata: (y) quodque

(x) * *In angulo quovis inclinata.* Demonſtratio enim lineam M A K N per puncta data A & K ductam horizonti parallelam eſſe minime ſupponit, eademque prorſus manet ſi linea illa ad horizontem inclinata fuerit.

(y) * *Quodque ex duabus interſectionibus.* Quoniam punctum H per interſectionem circuli cum hyperbola determinatur (ex dem.), & circulus hyperbolam in duobus punctis interſecare poteſt, ex duabus interſectionibus H, H duo prodeunt anguli, ſeu duæ ſunt poſitiones nes tangentis AH ſecundum quam projectile datâ velocitate emiſſum incidit in punctum K.

124. Problema. Inventis longitudinibus A I & A H, maximam altitudinem G D, ad quam corpus ſub angulo dato H A N projectum pertingere poteſt, definire.

Sit, ut in exemplo 3°, $BN = a$, $BD = o$, $NX = c$, ratio data V Z ad Z X, ſeu AI ad $AM = \frac{m}{n}$, $VG = \frac{bb}{a}$, ideoque $AI = \frac{bb}{AN}$, & $bb = AI \times AN$. Et erit (Ex. 3°.) $GD = c - \frac{m}{n}a - \frac{bb}{a} + \frac{m}{n}o - \frac{bb}{aa}o -$ &c.; & $\frac{m}{n}o - \frac{bb}{a}o = Qo$. Eſt autem Qo ut ordinatæ G D fluxio, quæ, ut habeatur ordinata omnium maxima, nihilo æquanda eſt (48): quare erit $\frac{m}{n} = \frac{bb}{aa}$, & $aa = \frac{nbb}{m}$, ſive $DN^2 = \frac{AM \times AI \times AN}{AI} = AN \times AM$. Si ergo capiatur D N media proportionalis inter A N & A M, ducaturque per D ordinata G D, hæc erit omnium maxima. Quoniam verò $\frac{m}{n} = \frac{bb}{aa}$ & proinde $\frac{m}{n}a = \frac{bb}{a}$, erit maxima ordinata G D ſeu $c - \frac{m}{n}a - \frac{bb}{a} = c - \frac{2bb}{a} = NX - \frac{2AI \times NA}{DN}$. Quare G D ordinata maxima æqualis eſt differentiæ inter verticalem N X & quartam proportionalem ad D N, A N & 2 A I. Q. E. I.

125. Problema. Datis longitudinibus AI & AH, angulum projectionis H A N maximæ omnium amplitudini A K convenientem invenire. Dicantur $AH = a$, $AI = b$, $HX = 2AI = 2b$, $AK = e$, $AN = x$, $HN = y$, & erit $x - e = KN = MA = AE$, ac $b = AI = AC$ (per reg. 8), proindeque $EN = AK = e$. Triangula ſimilia E A C, E N H hanc proportionem ſuppeditant, $AE (x-e) : EN (e) = AC (b) : HN (y)$, & componendo $x : e = b + y : y$, unde habetur $e = \frac{xy}{b+y}$, $x = \frac{be + ey}{y}$, & $xx = ee\frac{[b+y]^2}{yy}$. Eſt etiam, ob angulum A N H rectum, $aa - yy = xx = ee\frac{[b+y]^2}{yy}$, & hinc $aayy - y^4 = ee[b+y]^2$. Capiatur hujus æquationis fluxio, & amplitudinis maximæ *e* fluxione nihilo æquatâ (48), erit illa $2a^2ydy - 4y^3dy = 2ee[b+y]dy$, &, dividendo per $2dy$, $aay - 2y^3 = ee[b+y]$. Erat autem $e = \frac{xy}{b+y}$, & ideo $ee = \frac{xxyy}{[b+y]^2}$. 124.

que ex duabus interſectionibus H, H duo prodeunt anguli NAH, NAH; & quod in praxi mechanicâ ſufficit circulum ſemel deſcribere, deinde regulam interminatam CH ita applicare ad punctum C, ut ejus pars FH, circulo & rectæ FK interjecta, æqualis ſit ejus parti CE inter punctum C & rectam AK ſitæ.

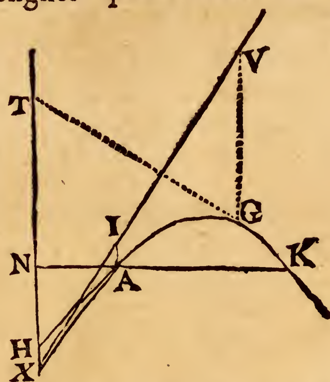
Quæ

$= \frac{aayy - y^4}{[b+y]^2}$, ac proinde $ee(b+y) = \frac{aayy - y^4}{b+y}$. Quare erit $aay - 2y^3 = \frac{aayy - y^4}{b+y}$, ſive $aaby + aay^2 - 2by^3 - 2y^4 = aay^2 - y^4$, unde, reductione factâ & diviſis terminis per y, eruitur $aab = 2byy + y^3$. Hâc igitur æquatione reſolutâ, invenitur y ſeu HN ſinus anguli HAN, exiſtente ſinu toto AH. Q. E. D.

126. Cor. Manifeſtum eſt in æquatione $aab = 2byy + y^3$, quantitatem $2byy$ minorem eſſe quantitate aab, & proinde quadratum yy, ſeu HM^2, minus dimidio quadrato $\frac{1}{2}aa$ vel $\frac{1}{2}AH^2$; unde ſequitur angulum quæſitum HAN ſemirecto minorem eſſe, qui, ſi medium non reſiſteret, foret ſemirectus. Sit medii denſiias, adeoque & reſiſtentia, admodum parva, & erit ferè $y = a\sqrt{\frac{1}{2}}$, atque $aab = 2byy + ayy\sqrt{\frac{1}{2}}$, & hinc $yy = \frac{aab}{2b + a\sqrt{\frac{1}{2}}}$, ac $y = a\sqrt{\frac{b}{2b + a\sqrt{\frac{1}{2}}}}$, quam proximè.

Quæ de hyperbolis dicta sunt facile applicantur ad parabolas. Nam si $XAGK$ parabolam designet quam recta XV tangat in vertice X, sintque ordinatim applicatæ IA, VG ut quælibet abscissarum XI, XV dignitates XI^n, XV^n; agantur XT, GT, AH, quarum XT parallela sit VG & GT, AH parabolam tangant in G & A: & corpus de loco quovis A, secundum rectam AH productam, justâ cum velocitate projectum, describet hanc parabolam, si modo densitas medii, in locis singulis G, sit reciprocè ut tangens GT. Velocitas autem in G ea erit quâcum projectile pergeret, in spatio non resistente, in parabolâ conicâ verticem G, diametrum VG deorsum productam, & latus rectum $\frac{2\,GTq}{nn - n \times VG}$ habente. Et resistentia in G erit ad vim gravitatis ut GT ad $\frac{2nn-2n}{n-2}VG$. Unde si NAK lineam horizontalem designet, & manente tum densitate medii in A, tum velocitate quâcum corpus projicitur, mutetur utcunque angulus NAH; manebunt longitudines AH, AI, HX, & inde datur parabolæ vertex X, & positio rectæ XI, & sumendo VG ad IA ut XV^n ad XI^n, dantur omnia parabolæ puncta G, (z) per quæ projectile transibit.

LIBER SECUND. SECTIO II. PROP. X. PROB. III.



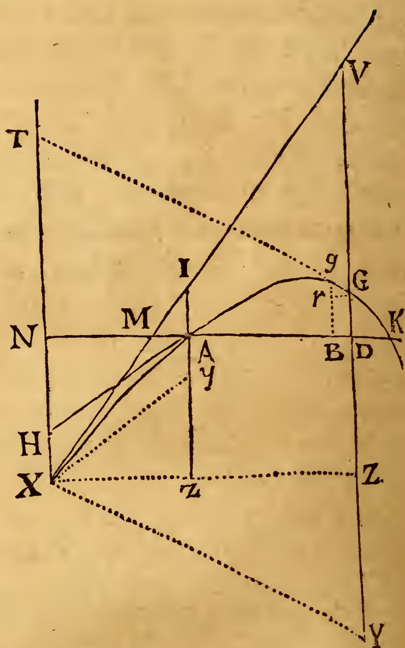
(z) *Per quæ projectile transibit.* Producatur VG ut horizontalem NK secet in

Lem. 1 I.

126.

De Motu Corporum.

in D, & rectam XZ horizonti parallelam in Z. Pro BN, BD, NX scribantur A, O, c, respective, sitque M intersectio linearum XV, NK; & XN ad NM, sive ob triangulorum XNM, VZX similitudinem, VZ ad ZX vel DN ut d ad e; ideoque DN $= A + O$, & VZ $= \frac{d}{e} \times \overline{A+O}$. Quia vero VG est ut XV^n (per hypoth.), & VX est ad XZ, seu DN, in datâ ratione XN ad NM; erit etiam VG ut DN^n. Ponatur ergo VG $= \frac{DN^n}{bb} = \frac{\overline{A+O}^n}{bb} = \frac{A^n}{bb} + \frac{nA^{n-1}O}{bb} + \frac{n.\overline{n-1}}{1.2} \frac{A^{n-2}}{bb} O^2 + \frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}}{1.2.3} \frac{A^{n-3}}{bb} O^3 +$ &c., & erit GD $=$ VZ $-$ NX $-$ VG $= \frac{d}{e} \times \overline{A+O} - c - \frac{\overline{A+O}^n}{bb} = \frac{d}{e}A - c - \frac{A^n}{bb} + \frac{d}{e}O - \frac{nA^{n-1}}{bb}O - \frac{(nn-n)A^{n-2}}{2bb}O^2 - \frac{(n^3-3nn+2n)A^{n-3}}{6bb}O^3 -$ &c. Quare erit $Q = \frac{nA^{n-1}}{bb} - \frac{d}{e}$; $R = \frac{\overline{nn-n}A^{n-2}}{2bb}$, & $S = \frac{\overline{n^3-3nn+2n}A^{n-3}}{6bb}$. Per punctum B ducatur ordinata Bg, ad quam demittatur ex G perpendiculum Gr, sitque XY æqualis & parallela tangenti GT; & ob triangula Grg, XZY similia, erit Gr^2 ad Gg^2 ut XZ^2 seu DN^2 ad XY^2 vel GT^2; est autem Gr$^2 = OO$, rg$^2 = QQOO$, & ideo Gg$^2 = OO \times \overline{1+QQ}$: quare cum sit etiam BN seu DN $= A$, erit GT$^2 = AA \times \overline{1+QQ}$, GT $= A\sqrt{\overline{1+QQ}}$, & $\frac{GT}{A} = \sqrt{\overline{1+QQ}}$. Per coroll. 1. prop. X. medii densitas in loco G est ut $\frac{S \times A}{R \times GT}$, & (ex demonstratis) $\frac{S}{R} = \frac{n-2}{3A}$, ideoque $\frac{S \times A}{R \times GT}$ est ut $\frac{n-2}{3GT}$; quare, ob datum numerum $\frac{n-2}{3}$, densitas est reciprocè ut tangens GT. Velocitas in G (per prop. X.) ea est, quâ cum projectile pergeret, in spatio non resistente, in parabolâ conicâ verticem G,



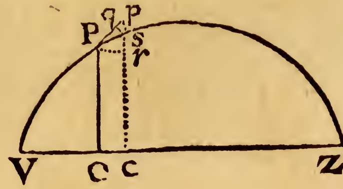
diametrum GD, & latus rectum $\frac{1+QQ}{R}$ habente; & ideo cum sit $\frac{1+QQ}{R} = \frac{GT^2}{A^2 R} = \frac{2GT^2}{\overline{nn-n} \times \frac{A^n}{bb}} = \frac{2GT^2}{\overline{nn-n} \times VG}$ (ex dem.), parabolæ latus rectum erit $\frac{2GT^2}{\overline{nn-n}.VG}$. Resistentia in G (per cor. 1. prop. X.) est ad vim gravitatis, ut $3S \times$ GT ad $4RR \times$ DN, id est, ut GT ad $\frac{4RR \times A}{3S}$; sed $4RR \times A = \frac{\overline{nn-n}^2 \times A^{2n-3}}{b^4}$, & $3S = \frac{\overline{nn-n} \times \overline{n-2}}{2} \times \frac{A^{n-3}}{bb}$, atque ideo $\frac{4RR \times A}{3S} = \frac{2nn-2n}{n-2} \times \frac{A^n}{bb} = \frac{2nn-2n}{n-2} \times VG$. Erit igitur resistentia ad gravitatem, ut GT ad

127.

ad $\frac{2nn-2n}{n-2}\times VG$. Velocitas in loco G (per prop. X.) est ut $\sqrt{\frac{1+QQ}{R}} = \sqrt{\frac{2GI^2}{nn-n\times VG}}$, ideoque ob datum numerum $\frac{2}{nn-1}$, ut $\frac{GT}{\sqrt{VG}}$.

Quando igitur corpus est in A, medii densitas est ut $\frac{1}{AH}$, & velocitas ut $\frac{AH}{\sqrt{AI}}$; unde manente tum densitate medii in A, tum velocitate quâcum corpus projicitur, & mutato utcunique angulo NAH, manebunt AH, & $\frac{AH}{\sqrt{AI}}$, ac proinde AI. Quia porro $ZY^2 = XY^2 - XZ^2 = GT^2 - DN^2 = AA\times\overline{1+QQ} - AA = AAQQ$, & ideo $ZY = Q\times A = \frac{nA^n}{bb} - \frac{d}{e}A = n\,VG - VZ$, atque $ZY + VZ = VY = n\,VG$; erit in loco A, $Iy = n\times AI$, & hinc $Ay = XH = n\,AI - AI$. Quare manente AI, manebit etiam HX, ob datum numerum $n-1$. Inveniantur, uti regulâ 7â. pro hyperbolâ factum est, longitudines AH, AI, & proinde HX; & inde dabitur punctum H, per quod si ducatur THX ad horizontem perpendicularis, datâ XH, dabitur positio rectæ XI, & sumendo VG ad IA ut XV^n ad XI^n, dabuntur omnia parabolæ puncta G, per quæ projectile transibit.

Problema elegantissimum de inveniendâ trajectoriâ quam corpus in medio juxta duplicatam velocitatum rationem resistente describit, in suis principiis prætermisit Newtonus. Rem generaliter postea confecerunt Clarissimi Mathematici Joannes Bernoullius, Hermannus, & Eulerus, qui trajectoriam a projectili descriptam in medio quod in qualibet multiplicatâ velocitatum ratione resistit, analytice invenerunt. Horum vestigiis insistentes, tam elegans problema in nostris commentariis desiderari nolumus.



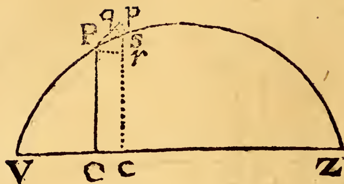
PROBLEMA.

127. *Tendente vi gravitatis uniformi ubique perpendiculariter ad planum horizontis VZ, determinare curvam VPp, quam describit projectile in medio uniformi quod in multiplicatâ quâlibet velocitatum ratione resistit.*

Ductis ordinatis verticalibus PC, pc infinite propinquis, & ex puncto P ad pc perpendiculo Pr; dicantur vis gravitatis $=g$, velocitas projectilis in loco P $=v$, resistentia ibidem $=r=\frac{v^{2n}}{2a}$, ita ut sit a quantitas constans quæ determinabitur ex determinatione resistentiæ, sit Tangens Pp, arcus $Ps=ds$, $VC=x$, $PC=y$, & ideo $pr=dy$, ac Cc seu $Pr=dx$; fluxio hæc dx constans supponatur. * Resolvatur actio gravitatis quæ exprimitur per ps in actionem sq curvæ perpendicularem; & actionem pq, curvæ parallelam quæ in ascensu corporis illud retardat in descensu accelerat, erit actio tota gravitatis ad ejus actionem quâ motum in curva retardat in ascensu & accelerat in descensu ut est ps ad pq, & ob similia triangula pqs, Ppr, est ps ad pq sicut Pp sive Ps ad pr, ideoque Ps (ds) ad pr (dy) sicut gravitas tota g, ad $\frac{g\,dy}{ds}$ quæ est actio gravitatis ad retardandum corpus in ascensu, & quia in descensu est $pr=-dy$, est $\frac{-g\,dy}{ds}$ actio gravitatis ad accelerandum corpus in descensu; Unde tota retardatio corporis tam ex gravitate quam ex resistentia orta, est $r+\frac{g\,dy}{ds}$ tam in ascensu quam in descensu.

Decrementum antem velocitatis $-dv$; est semper ut vis retardans & tempus quo du-

De Motu Corporum.



durante ea vis agit conjunctim, idque tempus est semper æquale arcui descripto Ps ad velocitatem v applicato, hoc est, temporis incrementum $dt = \frac{ds}{v}$ unde velocitatis decrementum $-dv = \overline{r + \frac{gdy}{ds}} \times \frac{ds}{v} = -\frac{rds + gdy}{v}$, & quia ex Hypothesi $r = \frac{v^{2n}}{2a}$, est $-vdv = \frac{v^{2n}ds}{2a} - gdy$; Ut autem obtineatur valor v, & dv expressione quæ ad curvam referatur, notandum quod lineola ps sive $-ddy$ est spatiolum urgente gravitate tempore dt percursum, ideoque est ut vis gravitatis g per temporis quadratum multiplicata, ideoque est $-ddy = g\,dt^2 = \frac{gds^2}{v^2}$ (cum sit $dt = \frac{ds}{v}$) unde est $v^2 = \frac{gds^2}{-ddy}$ sive $-v^2 ddy = gds^2$, & fluxionem utrinque sumendo est $-v^2d^3y - 2vddydv = 2gdsdds$, & cum lineola pq designet dds sitque Pp sive Ps(ds) ad Pr(dy) sicut ps$(-ddy)$ ad pq (dds) est $dsdds = -dyddy$ unde hæc ultima æquatio fit $-v^2d^3y - 2vddydv = -2gdyddy$ & $-2vddydv = v^2d^3y - 2gdyddy$ & $-vdv = \frac{v^2d^3y}{2ddy} - gdy$, unde cum inventum etiam fuerit $-vdv = \frac{v^{2n}ds}{2a} - gdy$, est $\frac{v^2d^3y}{ddy} = \frac{v^{2n}ds}{a}$, & valorem inventum $v^2 = \frac{gds^2}{-ddy}$ substituendo, fit tandem $\frac{gds^2d^3y}{-ddy^2} = \frac{g^nds^{2n+1}}{-addy^n}$ sive reductione facta $ad^3y = \frac{g^{n-1}ds^{2n-3}}{ddy^{n-2}}$.

Ut autem ex hac æquatione eruatur æquatio inter dx, & dy, & inter x & y, designet p variabiles quascumque quæ in æquatione quæsita ita multiplicant fluxionem dx ut ea sit æqualis dy, sitque $dy = pdx$ & $dy^2 = p^2dx^2$, cum sit $ds^2 = dx^2 + dy^2$ erit $ds^2 = dx^2 + p^2dx^2 = \overline{1+p^2} \times dx^2$, & $ds = dx\sqrt{1+pp}$ unde $ds^{2n-1} = dx^{2n-1} \times \overline{1-pp}^{\frac{2n-1}{2}}$.

Præterea cum dx constans supponatur erit $dy = pdx$, $ddy = dxdp$, & sumpta fluxione erit & $d^3y = dxddp$. Et si tandem q designet variabiles quæ ita multiplicant fluxionem dx, ut ea fiat æqualis dp, sitque $qdx = dp$ erit $dxdq = ddp$ & $dx^2dq = dxddp = d^3y$, & æquatio proposita in hanc vertetur $adx^2dq = \frac{g^{n-1}dx^{2n-1} \times \overline{1-pp}^{\frac{2n-1}{2}}}{dxdp^{n-2}} = \frac{g^{n-1}dx^{n+1} \times \overline{1+pp}^{\frac{2n-1}{2}}}{dp^{n-2}}$, & diviso utroque termino per dx^2, erit $adq = \frac{g^{n-1}dx^{n-1} \times \overline{1+pp}^{\frac{2n-1}{2}}}{dp^{n-2}}$. Denique loco dx posito ejus valore $\frac{dp}{q}$ erit $adq = \frac{g^{n-1}dp^{n-1} \times \overline{1+pp}^{\frac{2n-1}{2}}}{q^{n-1}dp^{n-2}}$ sive $adq = \frac{g^{n-1} \times \overline{1+pp}^{\frac{2n-1}{2}}}{q^{n-1}} \times dp$, hoc est $aq^{n-1}dq = g^{n-1}\,\overline{1 \times pp}^{\frac{2n-1}{2}}dp$, quæ est æquatio fluxionalis inter dp & dq, ex qua per curvarum quadraturam obtinebitur æquatio inter p & q & inde inter x & y, ut id ipsum nunc exponemus, summando enim terminos æquationis $aq^{n-1}dq = g^{n-1} \times \overline{1+pp}^{\frac{2n-1}{2}}dp$ habetur $\frac{aq^n}{n} = g^{n-1} \times S\overline{1+pp}^{\frac{2n-1}{2}}dp$, hoc est $q = \sqrt[n]{\frac{ng^{n-1}}{a} \times S\overline{1+pp}^{\frac{2n-1}{2}}dp}$, unde fit curva cujus abscissa qualiscumque AP sit $= p$, sitque ejus ordinata PN semper æqualis $1+$

$\overline{1+pp}^{\frac{2n-1}{2}}$, erit area ABPN $= S\,\overline{1+pp}^{\frac{2n-1}{2}}dp$, ducatur ergo ab altera parte P ordinata PO talis ut sit semper æqualis $\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{ng^{n-1}}{a}\times ABPN}}$ erit ea PO æqualis $\frac{1}{q}$, cumque sit $dx=\frac{dp}{q}=\frac{1}{q}\times dp$, erit (summando) $x=S\,\frac{1}{q}\times dp$ sive æqualis area ACPO.

Denique cum sit $dy=p\,dx=\frac{p\,dp}{q}=\frac{p}{q}\times dp$ & summando $y=S.\frac{p}{q}\times dp$ ideo si è puncto P versus originem A sumatur PI æqualis unitati, ductaque 1 O, ducatur ipsi parallela AQ ab origine curvæ quæ secet PO productam in Q, erit 1 : PO (sive $\frac{1}{q}$) = AP (sive p) : PQ $=\frac{p}{q}$, itaque area curvæ APQ erit $S.\frac{p}{q}dp$ ac per consequens æquatur, ergo datis curvarum ACPO, & APQ quadraturis datur ratio x ad y, & ex earum ordinatis ratio dx ad dy: sed ut habeatur origo a quâ sumi debent illarum arearum portiones, sumendum est id punctum in quo PO est ad PQ ut Cosinus anguli jactus cum Horizonte sub quo corpus moveri incepit ad ejus anguli sinum, quippe ea fuit ipso motus initio ratio elementorum dx & dy; sique ille cosinus dicatur c, & sinus s, erit in ea origine $c:s=\frac{1}{q}:\frac{p}{q}$, unde si sumatur AR sive $p=\frac{s}{c}$ erit ejus extremitas R origo arearum quarum valor rationem quæsitarum x & y exhibebit. †

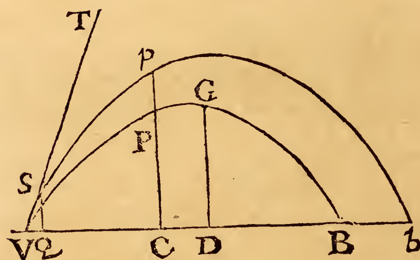
128. Cor. 1. Quoniam invenimus $v^2=\frac{-g\,ds^2}{ddy}$, $ds^2=dx^2(1+pp)$, & $ddy=dx\,dp$; erit $v^2=\frac{-g\,dx(1+pp)}{dp}$; sed $dp=q\,dx$; quare erit $v^2=\frac{-g(1+pp)}{q}$.

Præterea (13) $dt=\frac{ds}{v}=\frac{dx\sqrt{1+pp}}{v}=\frac{dp\sqrt{1+pp}}{q\,v}$, & $v=\sqrt{\frac{-g(1+pp)}{q}}$; quare erit $dt=\frac{dp}{\sqrt{-gq}}$, & $t=S.\frac{dp}{\sqrt{-gq}}$. Invenietur itaque tum velocitas corporis in loco P trajectoriæ VPp, tum tempus t quo arcus VP describitur. 128.

129. Cor. 2. Si in æquatione generali supra repeta, $a\,d^3y=\frac{g^{n-1}ds^{2n-1}}{ddy^{n-2}}$, ponatur $n=1$, seu resistentia velocitatis quadrato proportionalis; æquatio in hanc migrabit $a\,d^3y=ds\,ddy$; & ponendo $dy=p\,dx$, ac $dx=\frac{dp}{q}$, invenietur $a\,q=S.\,dp\sqrt{1+pp}$, $x=S.\frac{dp}{q}=S.\frac{a\,dp}{S.\,dp\sqrt{1+pp}}$, $y=S.\frac{p\,dp}{q}=S.\frac{a\,p\,dp}{S.\,dp\sqrt{1+pp}}$, $vv=\frac{-ag(1+pp)}{S.\,dp\sqrt{1+pp}}$, & $t=S.\frac{a^{\frac{1}{2}}dp}{\sqrt{-g\,S.\,dp\sqrt{1+pp}}}$. Est autem $S.\,dp\sqrt{1+pp}$ area hyperbolæ æquilateræ, cujus abscissa est p & ordinata ducta perpendiculariter ad axem conjugatum $\sqrt{1+pp}$, semiaxis verò unitas. Unde invenietur q in p per hujus hy-

hyperbolæ aream; at abſciſſa x obtinebitur per aream curvæ cujus eſt abſciſſa p & ordinata $\frac{1}{q}$; & correſpondens ordinata y definietur per aream curvæ, cujus abſciſſa eſt p & ordinata $\frac{p}{q}$. Ex quibus manifeſtum fit veræ trajectoriæ VPZ deſcriptionem adeo perplexam eſſe, ut ex illa vix quidquam ad uſus philoſophicos aut mechanicos accommodatum poſſit deduci.

130. Coroll. 3. Quoniam poſito $n=1$, reſiſtentia medii eſt $\frac{v^2}{2a}$ (127), ubi reſiſtentia fit gravitati æqualis, id eſt, ubi v æqualis eſt velocitati terminali, habetur $\frac{v^2}{2a}=g$, & $v^2=2ag$, ideóque (30. lib. 1.) a eſt altitudo ex quâ corpus in medio non reſiſtente vi conſtante g ſollicitatum caderet ut velocitatem terminalem acquirat.



131. Coroll. 4. Si in hypotheſi corollarii ſecundi reſiſtentia parva fuerit qualem ferè experitur globus ferreus non parvus magnâ ſatis velocitate per aera projectus, trajectoria VPB, quam globus ille in medio reſiſtente deſcribit, non multùm aberrat a Parabolâ conicâ Vpb, quam eâdem urgente vi gravitatis uniformi g ſeu 1 deſcriberet. Quia tamen reſiſtentia velocitatem projectionis minuit, ordinata CP, ad trajectoriam VPB, in medio reſiſtente paulò minor erit quam ordinata Cp ad parabolam conicam Vpb. Porrò ſi abſciſſa VC dicatur x ordinata Cp dicatur z, amplitudo Vb, h & proindè Cb, $h-x$, erit (ex naturâ parabolæ) rectangulum ſub abſciſſis VC × Cb, ſeu $hx-xx$, æquale rectangulo ordinatæ Cp, vel z in datam quantitatem l, & ideò æquatio erit $z=\frac{hx}{l}-\frac{xx}{l}$. Cum igitur ordinata CP (quæ dicatur y) paulò minor ſit quam Cp, ſeu z, ponatur $y=\frac{hx}{l}-\frac{xx}{l}-ex^3$, & æquatio iſta in quâ eſt e quantitas exigua, naturam trajectoriæ VPB exponere poterit quam proximè; loco $\frac{h}{l}$, & $\frac{1}{l}$, ſcribantur b & c ut æquatio ſit $y=bx-cx^2-ex^3$. Ut jam determinentur coëfficientes b, c, e, capiantur æquationis fluxiones, prima, ſecunda & tertia, factâ dx conſtante, erunt illæ $dy=bdx-2cxdx-3ex^2dx$; $ddy=-2cdx^2-6exdx^2$, $d^3y=-6edx^3$. Coincidentibus punctis V & C, fit $x=0$, & ideo $dy=bdx$, $ddy=-2cdx^2$ & $d^3y=-6edx^3$. Ex æquatione $dy=bdx$, deducitur proportio $dx:dy=1:b$; & coincidente C cum V, dx eſt ad dy ut ſinus totus VQ ad tangentem QS, anguli projectionis TVQ; Quarè ſi ſinus totus dicatur 1, erit b tangens anguli projectionis, & ideò dato hoc angulo datur b. Si velocitas cum quâ corpus è loco V projicitur ſit v, & f, altitudo ex quâ corpus urgente vi conſtante g, in ſpatio non reſiſtente cadendo acquirit velocitatem illam v, erit $2gf=vv$ (30. lib 1.) ſed (30) $vv=-\frac{gds^2}{ddy}$, ideoque $2gf=-\frac{gds^2}{ddy}$, & $2f=-\frac{ds^2}{ddy}$; Eſt autem $ds^2=dx^2+dy^2=dx^2+bbdx^2$, & $ddy=-2cdx^2$ in loco V, (ex dem.). Quarè erit $2f=\frac{1+bb}{2c}$, & hinc $c=\frac{1+bb}{4f}$. Cum igitur quantitates b, & f, datæ ſint data erit c. Invenietur quantitas tertia e, per æquationem $ad^3y=dsddy$ (129) & per æquationes ſuprà repertas $ds=dx\sqrt{1+bb}$, $ddy=-2cdx^2$, & $d^3y=-6edx^3$; ex quibus eruitur $-6aedx^3=-2cdx^3\sqrt{1+bb}$, & hinc $e=\frac{c\sqrt{1+bb}}{3a}=\frac{1+bb\times\sqrt{1+bb}}{12af}$. Tota igitur æquatio aſſumpta $y=bx-cx^2-ex^3$ fit $y=bx-x^2\times\left(\frac{1+bb}{4f}\right)-$

$x^3 \times \left(\overline{\frac{1+bb}{12af}}\right)^{\frac{3}{2}}$ in quâ datâ velocitate terminali datur a, (130). Poterit etiam linea a, per experimentum reperiri; Nam si è loco V sub angulo dato T V B datâ cum velocitate projiciatur corpus in medio supposito & observetur amplitudo jactûs V B, quæ dicatur A, in æquatione ad trajectoriam V P B, loco x, scribatur A, & loco y, scribatur o, quia ordinata CP, seu y evanescit in B invenierur $o = bA - AA \times \frac{(1+bb)}{4f} - A^3 \times \frac{(1+bb)^{\frac{3}{2}}}{12af}$; undè deducitur $a = AA \times \frac{(1+bb)^{\frac{3}{2}}}{12fb - 3A \times (1+bb)}$.

132. Coroll. 5. Jactûs amplitudo VB, invenitur, factâ $y = o$, undè eruitur $xx \times \frac{(1+bb)^{\frac{3}{2}}}{12af} + x \times \frac{(1+bb)}{4f} = b$, & $VB = x = -\frac{3a}{2\sqrt{1+bb}} + \sqrt{\left(\frac{9a^2}{4+4bb} + \frac{12afb}{(1+bb)^{\frac{3}{2}}}\right)}$.

133. Coroll. 6. Maxima jactûs altitudo DG reperitur, sumptâ æquationis ad trajectoriam V P B, fluxione & factâ $dy = o$ (48); fit enim $o = bdx - 2xdx \times \frac{1+bb}{4f} - 3x^2dx \times \frac{(1+bb)^{\frac{3}{2}}}{12af}$ undè deducitur $VD = x = -\frac{a}{\sqrt{1+bb}} + \sqrt{\frac{aa}{1+bb} + \frac{4afb^{\frac{3}{2}}}{1+bb}}$. Quo valore loco x, in æquatione ad trajectoriam substituto, obtinebitur y, seu maxima altitudo DG.

134. Coroll. 7. Ut determinetur tangens anguli T V B, sub quo corpus datâ celeritate projectum, per datum punctum P transibit, loco x & y in æquatione ad trajectoriam scribantur datæ V C & V P, atque hinc eruatur valor tangentis b; dicatur $VC = p$, $CP = q$, & erit $q = bp - pp \times \frac{\sqrt{1+bb}}{4f} - p^3 \times \frac{\overline{1+bb}^{\frac{3}{2}}}{12af}$. Si medii densitas infinitè parva esset, altitudo a foret infinita (130); & idcircò $q = bp - pp \times \frac{1+bb}{4f}$. Inveniatur per hanc æquationem valor tangentis b qui dicatur k, & in æquatione superiori loco $(1+bb)^{\frac{3}{2}}$, scribatur $(1+bb) \times \sqrt{1+kk}$ & illa in hanc abibit $q = bp - pp \times \frac{(1+bb)}{4f} - p^3 \times \overline{1+bb} \times \frac{\sqrt{1+kk}}{12af}$, quæ cum sit duarum dimensionum facilè suppeditabit valorem ipsius b, quamproximè.

135. Coroll. 8. Datâ celeritate jactûs, invenitur angulus maximæ omnium amplitudini conveniens, si in æquatione corollarii 5. in quâ x exponit quamlibet amplitudinem V B, sumatur tangens b variabilis & sumptis fluxionibus ponatur $dx = o$ (48). Calculo enim inito invenietur $4f \times (1-2bb)^2 = 3ab \times (1-bb) \times \sqrt{1+bb}$. Quoniam verò tangens anguli projectionis est b, sinus totus 1, & proindè secans $\sqrt{1+bb}$; si ejusdem anguli sinus dicatur s, erit $\sqrt{1+bb}:b = 1:s$, adeóque $1+bb:bb = 1:ss$, & dividendo $1:bb = 1-ss:ss$, atquè ità $bb = \frac{ss}{1-ss}$, & $b = \frac{s}{\sqrt{1-ss}}$. Loco b substituatur $\frac{s}{\sqrt{1-ss}}$ in æquatione modo inventâ & illa in hanc mutabitur, $4f \times \frac{(1-3ss)^2}{(1-ss)^2} = 3as \times \frac{(1-2ss)}{(1-ss)^2}$, hoc est, $4f \times (1-3ss)^2 = 3as \times (1-2ss)$. Ex quâ æquatione, si eruatur valor sinûs s dabitur angulus quæsitus. Per approximationem ità potest obtineri. Scribatur in æquatione $3as = 3a\sqrt{\frac{1}{2}}$; Nam si trajectoria in medio non resistente describeretur, angulus T V B foret semirectus, & proindè sinus ejus $\sqrt{\frac{1}{2}}$, cum sit sinus totus $= 1$; & ideò in medio valdè raro est ferè $s = \sqrt{\frac{1}{2}}$; æquatio igitur erit $4f \times (1-3ss)^2 = (1-2ss) \times 3a\sqrt{\frac{1}{2}}$; quæ facillimè resolvetur ad instar æquationis duarum dimensionum. Hinc autem invenitur s paulò minor quam $\sqrt{\frac{1}{2}}$, adeòque angulus projectionis semirecto paulò minor.

De Motu Corporum.

136. Coroll. 9. Si medium esset paulò densius, assumenda foret æquatio ad trajectoriam, $y = bx - xx \times \frac{(1+bb)}{4f} - x^3 \times \frac{(1+bb)^{\frac{3}{2}}}{12af} - hx^4$; aut etiam alia plurium terminorum. In illâ autem ità determinatur valor coefficientis h. Pro coefficientibus datis $\frac{1+bb}{4f}$, $\frac{(1+bb)^{\frac{3}{2}}}{12af}$, scribantur c, e, ut sit æquatio $y = bx - cx^2 - ex^3 - hx^4$, & sumptis ut suprà (131) fluxionibus primis, secundis & tertiis, factâ dx, constante, invenietur $\frac{ad^3y}{dsddy} = 1 = \frac{6ae + 24ahx}{(2c+6ex+12hx^2)} \times \frac{1}{\sqrt{1+bb-4bcx+4ccx^2-6bex^2 \&c.}}$ $= \frac{6ae+24ahx}{2c+6ex \times \sqrt{1+bb} - \frac{2bcx}{\sqrt{1+bb}}}$ neglectis terminis ubi x^2 occurrit & extracta Radice per formulam Newtonianam. Ut autem hæc quantitas constans sit & æqualis unitati, termini homologi in numeratore $6ae+24ahx$, & denominatore $2c\sqrt{1+bb}+6ex\sqrt{1+bb}-\frac{4bccx}{\sqrt{1+bb}}$ ponendi sunt æquales, id est, $6ae = 2c\sqrt{1+bb}$, & $24ahx = 6ex\sqrt{1+bb} - \frac{4bccx}{\sqrt{1+bb}}$. Ex his suppositionibus eruitur $e = \frac{c\sqrt{1+bb}}{3a} = \frac{(1+bb)^{\frac{3}{2}}}{12af}$, & $h = e\frac{\sqrt{1+bb}}{4a} - \frac{bcc}{6a\sqrt{1+bb}} = \frac{(1+bb)^2}{48a^2f} - \frac{b\times(1+bb)^{\frac{3}{2}}}{96aff}$. Quarè æquatio assumpta erit $y = bx - x^2\times\frac{(1+bb)}{4f} - x^3\times\frac{(1+bb)^{\frac{3}{2}}}{12af} - x^4\times\frac{(1+bb)^2}{48a^2f} + x^4 b\times\frac{(1+bb)^{\frac{3}{2}}}{96aff}$. Et eodem modo determinarentur coefficientes in æquationibus plurium terminorum seu ad parabolas superiorum generum.

137. Coroll. 10. Si resistentia medii uniformis, partim constans supponeretur & partim velocitatis quadrato proportionalis, posset etiam trajectoria VPB quamproximè definiri. Sit enim resistentiæ pars uniformis $=\frac{1}{2}kg$, & resistentia tota $r = \frac{kg}{2}+\frac{v^2}{2a}$, & erit (28) $gdy + \frac{kgds}{2} + \frac{v^2ds}{2a} = -vdv$ & (30) $v^2 = -\frac{gds^2}{ddy}$ adeóque (127) $vdv = -gdy + \frac{gds^2d^3y}{2ddy^2}$, his valoribus loco v^2 & vdv, in priori æquatione substitutis fit $gdy + \frac{kgds}{2} - \frac{gds^3}{2addy} = gdy - \frac{gds^2d^3y}{2ddy^2}$, ideóque $k = \frac{ds^2}{addy} - \frac{dsd^3y}{ddy^2}$. Jam si resistentia tota r, exigua fuerit, ponatur æquatio ad trajectoriam VPB, $y = bx - cx^2 - ex^3$, & factâ dx, constante, capiantur fluxiones primæ, secundæ & tertiæ quæ coincidente puncto C, cum V, erunt $dy = bdx$, $ddy = -2cdx^2$, & $d^3y = -6edx^3$ (131); undè invenitur ut (in coroll. 4. 131.) b, tangens anguli projectionis, existente sinu toto 1, & $c = \frac{1+bb}{4f}$, ubi f est altitudo ex quâ corpus urgente vi constante g cadendo in spatio non resistente acquirit jactûs velocitatem. Quantitas e determinabitur per æquationem $k = \frac{ds^2}{addy} - \frac{dsd^3y}{ddy^2}$. Nam si in illâ loco ds, ddy, d^3y, substituantur ipsorum valores $dx\times(1+bb)^{\frac{1}{2}}$, $-2cdx$, & $-6edx^3$; erit $k = -\frac{(1+bb)}{2ac} + \frac{3e\times(1+bb)^{\frac{1}{2}}}{2cc}$; undè eruitur $e = \frac{2kcc}{3\times(1+bb)^{\frac{1}{2}}} + \frac{c\times(1+bb)^{\frac{1}{2}}}{3a} = \frac{k\times(1+bb)^{\frac{3}{2}}}{24ff} + \frac{(1+bb)^{\frac{3}{2}}}{12af}$. Quapropter æquatio assumpta in hanc abit $y = bx - \frac{xx\times(1+bb)}{4f} - x^3\times\frac{(1+bb)^{\frac{3}{2}}}{12af}$,

LIBER SECUND. SECT. III. PROP. XI. THEOR. VIII.

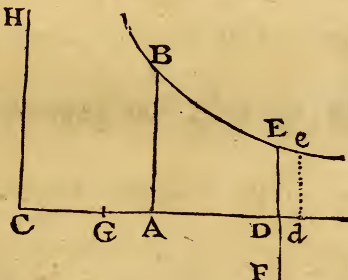
SECTIO III.

De motu corporum quibus resistitur partim in ratione velocitatis, partim in ejusdem ratione duplicatâ.

PROPOSITIO XI. THEOREMA VIII.

Si corpori resistitur partim in ratione velocitatis, partim in velocitatis ratione duplicatâ, & idem solâ vi insitâ in medio similari movetur: sumantur autem tempora in progressione arithmeticâ; quantitates velocitatibus reciprocè proportionales, datâ quâdam quantitate auctæ, erunt in progressione geometricâ.

Centro C, asymptotis rectangulis $CADd$ & CH, describatur hyperbola BEe, & asymptoto CH parallelæ sint AB, DE, de. In asymptoto CD dentur puncta A, G: Et si tempus exponatur per aream hyperbolicam $ABED$ uniformiter crescentem; dico quod velocitas exponi potest per longitudinem DF, cujus reciproca GD unâ cum datâ CG componat longitudinem CD in progressione geometricâ crescentem.



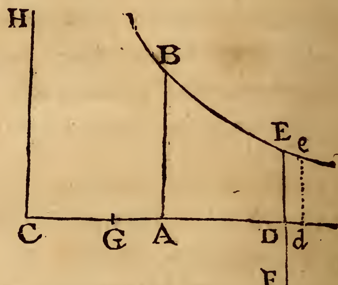
Sit enim areola $DEed$ datum temporis incrementum quam minimum, & (a) erit Dd reciprocè ut DE, ideoque directè ut CD. Ipsius autem $\frac{1}{GD}$ decrementum, quod (b) per hujus

$-x^3 k \times \frac{(1+bb)^{\frac{3}{2}}}{24ff}$, & quantitates a & k, ex phænomenis poterunt determinari ut suprà (131.).

(a) * *Et erit Dd reciprocè ut DF.* Est enim areola evanescens DEed æqualis rectangulo DE×Dd, quod, ob datum temporis incrementum, erit ut quantitas data, & ideò Dd, est ut quantitas data divisa per DE, id est, reciprocè ut DE; sed (per theor. 4. de hyperb.) datum est rectangulum CD×DE, proindè CD, est reciprocè ut DE; quare erit Dd directè ut CD. 137.

(b) * *Per hujus Lemma* 2. Cas. 4.

hujus lem. 11.) eſt $\frac{Dd}{GDq}$, erit ut $\frac{CD}{GDq}$ ſeu $\frac{CG+GD}{GDq}$, id eſt, ut $\frac{1}{GD}+\frac{CG}{GDq}$. Igitur tempore *ABED* per additionem datarum particularum *EDde* uniformiter creſcente, decreſcit $\frac{1}{GD}$ in eâdem ratione cum velocitate. Nam (c) decrementum velocitatis eſt ut reſiſtentia, hoc eſt (per hypotheſin) ut ſumma duarum quantitatum, quarum una eſt ut velocitas, altera ut quadratum velocitatis; & ipſius $\frac{1}{GD}$ decrementum eſt ut ſumma quantitatum $\frac{1}{GD}$ & $\frac{CG}{GDq}$, quarum prior eſt ipſa $\frac{1}{GD}$, & poſterior $\frac{CG}{GDq}$ eſt ut $\frac{1}{GDq}$: (d) proinde $\frac{1}{GD}$, ob analogum decrementum, eſt ut velocitas. Et ſi quantitas *GD*, ipſi $\frac{1}{GD}$ reciprocè proportionalis, quantitate datâ *CG* augeatur; ſumma *CD*, tempore *ABED* uniformiter creſcente, (e) creſcet in progreſſione geometricâ. *Q. E. D.*



Corol. 1. Igitur ſi, datis punctis *A*, *G*, exponatur tempus per aream hyperbolicam *ABED*, exponi poteſt velocitas per ipſius *GD* (f) reciprocam $\frac{1}{GD}$.

Co-

(c) *Nam decrementum velocitatis*, dato temporis momento, *eſt ut reſiſtentia* (15).

(d) * $\frac{1}{GD}$. *Ob analogum decrementum eſt ut velocitas.* Si enim duarum quantitatum fluentium incrementa vel decrementa dato tempuſculo producta analoga ſint, eorum incrementorum vel decrementorum ſummæ ſeu fluentes ipſæ ab eodem initio ſumptæ, ſunt analogæ (per Cor. Lem. 4. lib. 1.).

(e) * *Creſcet in progreſſione geometricâ.* (380. lib. 1.).

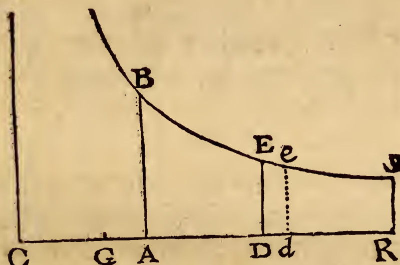
(f) * *Exponi poteſt velocitas per ipſius GD*

(g) *Corol.* 2. Sumendo autem GA ad GD ut velocitatis reciproca ſub initio, ad velocitatis reciprocam in fine temporis cujuſvis $ABED$, invenietur punctum G. Eo autem invento, velocitas ex dato quovis alio tempore inveniri poteſt.

LIBER SECUND. SECT. III. PROP. XII. THEOR. IX.

PROPOSITIO XII. THEOREMA IX.

Iiſdem poſitis, dico quod ſi ſpatia deſcripta ſumantur in progreſſione arithmeticâ, velocitates datâ quâdam quantitate auctæ erunt in progreſſione geometricâ.



In aſimptoto CD detur punctum R, & erecto perpendiculo RS, quod occurrat hyperbolæ in S, exponatur deſcriptum ſpatium per aream hyperbolicam $RSED$; & velocitas erit ut longitudo GD, quæ cum data CG componit longitudinem CD in progreſſione geometricâ decreſcentem, interea dum ſpatium $RSED$ augetur in arithmeticâ.

(h) Etenim ob datum ſpatii incrementum $EDde$, lineola Dd, quæ decrementum eſt ipſius GD, erit reciprocè ut ED, ideoque directè ut CD, hoc eſt, ut ſumma ejuſdem GD & lon-

---

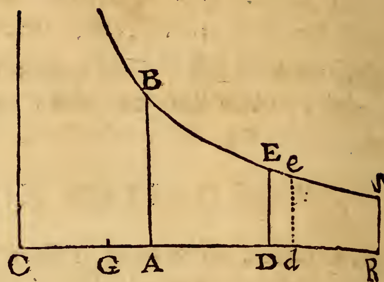
GD *reciprocam* $\frac{1}{GD}$. Undè patet velocitatem nonniſi tempore infinito extingui poſſe, * erit enim $\frac{1}{GD} = 0$, ſive velocitas nulla ubi GD erit infinita, tunc autem area BADE quæ tempus exprimit infinita etiam eſt, ex naturâ Hyperbolæ.

(g) * *Coroll.* 2. Punctum A ad arbitrium aſſumitur in aſymptoto C R & aſſumpto etiam quovis puncto D ut area A B E D tempus datum exponat, ità determinandum eſt punctum G, ut ſit G A ad G D, ut velocitatis reciproca ſub initio ad velocitatis reciprocam in fine temporis cujuſvis ABED, quod per coroll. 1. liquet. Invento autem puncto G, ex dato quovis alio tempore quod v. gr. ſit ad tempus primò datum ut area A B S R, ad aream A B E D, dabitur velocitas quæ erit reciprocè ut G R, ſeu quæ erit ad velocitatem ſub initio in A, ut G A ad G R datam.

(h) * *Etenim ob datum ſpatii incrementum*, per hypotheſim quâ ſpatia ſupponuntur in arithmeticâ progreſſione creſcere.

DE MOTU CORPORUM.

longitudinis datæ *CG*. Sed velocitatis decrementum, tempore sibi reciprocè proportionali, quo data spatii particula *DdeE* describitur, est (i) ut resistentia & tempus conjunctim, id est directè ut summa duarum quantitatum, quarum una est ut velocitas, altera ut velocitatis quadratum, & inversè ut velocitas; ideoque directè ut summa duarum quantitatum, quarum una datur, altera est ut velocitas. Decrementum igitur tam velocitatis quam lineæ *GD*, est ut quantitas data & quantitas decrescens conjunctim, & propter analoga decrementa, (k) analogæ semper erunt quantitates decrescentes; nimirum velocitas & linea *G D*. *Q. E. D.*



Corol. 1. Si velocitas exponatur per longitudinem *GD*, spatium descriptum erit ut area hyperbolica *DESR*.

Corol. 2. Et si utcunque assumatur punctum *R*, invenietur punctum *G* capiendo *GR* ad *GD*, ut est velocitas sub initio ad velocitatem post spatium quodvis *RSED* descriptum. (l) Invento autem puncto *G*, datur spatium ex datâ velocitate, & contra.

Corol. 3. Unde cum (per prop. XI.) detur velocitas ex dato tempore, & per hanc propositionem detur spatium ex datâ velocitate; dabitur spatium ex dato tempore: & contra.

PRO-

(i) * *Est ut resistentia & tempus conjunctim.* Velocitatis decrementum est ut resistentia & tempus conjunctim (15), tempus verò est ut incrementum spatii directè & velocitas inversè, adeóque dato spatii incremento ut velocitas inversè. Quarè dato spatii incremento, velocitatis decrementum est ut resistentia directè & velocitas inversè, id est, directè ut summa duarum quantitatum &c.

(k) * *Analogæ semper erunt* &c. (Per cor. lem. 4. lib. 1.).

(l) * *Invento autem puncto G, &c.* Si enim velocitas data, sit ad velocitatem sub initio ut GA ad GR, dabitur punctum A, & hinc dabitur area ABSR, seu spatium descriptum. Et contrà dato spatio, sivè datâ areâ ABSR, dabitur punctum A, & indè velocitas GA. Ex his autem patet spatium finitum infinito tempore describi; ubi enim punctum D coincidit cum puncto G, velocitas omnis extinguitur, & spatium descriptum exponitur per aream finitam quam ordinata RS.

PROPOSITIO XIII. THEOREMA X.

Posito quod corpus ab uniformi gravitate deorsum attractum rectâ ascendit vel descendit; & quod eidem resistitur partim in ratione velocitatis, partim in ejusdem ratione duplicatâ: dico quod, si circuli & hyperbolæ diametris parallelæ rectæ per conjugatarum diametrorum terminos ducantur, & velocitates sint ut segmenta quædam parallelarum à dato puncto ducta; tempora erunt ut arearum sectores, rectis à centro ad segmentorum terminos ductis abscissi: & contra.

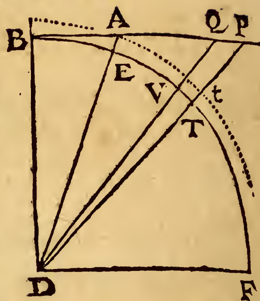
Cas. 1. Ponamus primo quod corpus ascendit, centroque D & semidiametro quovis DB describatur circuli quadrans $BETF$, & per semidiametri DB terminum B agatur infinita BAP, semidiametro DF parallela. In eâ detur punctum A, & capiatur segmentum AP velocitati proportionale. Et cum resistentiæ pars altera sit ut velocitas & pars altera ut velocitatis quadratum; sit resistentia tota ut AP *quad.* + 2 BAP. Jun-

RS abscindit cum alterâ ordinatâ per G ductâ; velocitas verò nonnisi infinito tempore potest evanescere (per cor. 1. prop. XI.).

138. Schol. Eadem per analysim facilè inveniuntur. Dicantur resistentia r celeritas initialis c, spatium descriptum s, tempus t, velocitas residua v, ponaturque $r = \frac{av + vv}{b}$, erit (16, 17) $r\,ds = -v\,dv$, seu $av\,ds + vv\,ds = -bv\,dv$, & hinc $ds = -\frac{b\,dv}{a+v}$, atquè adeò $s = Q - b \times L.\overline{a+v}$; quia verò ubi $s = 0$, fit $v = c$, invenitur constans $Q = b \times L.\overline{a+c}$, & ideò $s = b \times L.\frac{a+c}{a+v}$. Sit $L.h = 1$, & erit $\frac{s \times L.h}{b} = L.\frac{a+c}{a+v}$, ac $h^{\frac{s}{b}} = \frac{a+c}{a+v}$; undè eruitur $v = \frac{a+c}{h^{\frac{s}{b}}} - a$; Quarè dato spatio datur velocitas & contrà. Cum autem sit 138.
(13) $dt = \frac{ds}{v} = -\frac{b\,dv}{av+vv} = \frac{b}{a} \times \frac{dv}{a+v} - \frac{b}{a} \times \frac{dv}{v}$, erit $t = Q + \frac{b}{a} \times L.\overline{a+v} - \frac{b}{a} \times L.v = Q + \frac{b}{a} \times L.\frac{a+v}{v}$, & posito $t = 0$ & $v = c$, fit $Q = -\frac{b}{a} \times L.\frac{a+c}{c}$, adeòque $t = \frac{b}{a} \times L.\frac{a+v}{v} - \frac{b}{a} \times L.\frac{a+c}{c}$, & hinc $t = \frac{b}{a} L.\frac{ac+cv}{av+cv}$, & $h^{\frac{at}{b}} = \frac{ac+cv}{av+cv}$; unde eruitur $v = \frac{ac}{ah^{\frac{at}{b}} + ch^{\frac{at}{b}} - c}$. Dato igitur tempore dabitur velocitas & spatium ac contrà.

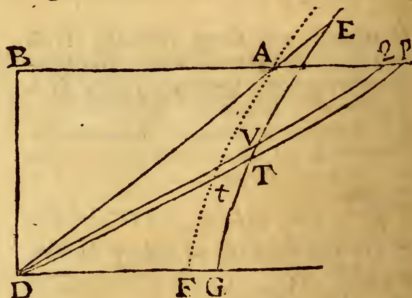
De Motu Corporum.

Jungantur DA, DP circulum ſecantes in E ac T, & (m) exponatur gravitas per DA *quad.* ita ut ſit gravitas ad reſiſtentiam in P ut DAq ad $APq+2BAP$: & tempus aſcenſus totius erit ut circuli ſector EDT.



Agatur enim DVQ, abſcindens & velocitatis AP momentum PQ, & ſectoris DET momentum DTV dato temporis momento reſpondens; & velocitatis decrementum illud PQ erit ut (n) ſumma virium gravitatis DAq & reſiſtentiæ $APq+2BAP$, id eſt (per prop. 12. lib. 2. elem.) ut DP *quad.* Proinde area DPQ, (o) ipſi PQ proportionalis, eſt ut DP *quad.* & area DTV, quæ eſt ad aream DPQ ut (p) DTq ad DPq, eſt ut datum DTq. Decreſcit igitur area EDT uniformiter ad modum temporis futuri, per ſubductionem datarum particularum DTV, & propterea tempori aſcenſus totius proportionalis eſt. *Q. E. D.*

Caſ. 2. Si velocitas in aſcenſu corporis exponatur per longitudinem AP ut prius, & reſiſtentia ponatur eſſe ut $APq+2BAP$, & ſi vis gravitatis minor ſit quam quæ per DAq exponi poſſit; capiatur BD ejus longitudinis, ut ſit $ABq-BDq$ gravitati proportionale, ſitque DF ipſi DB perpendicularis & æqualis, & per verticem F deſcribatur hyperbola $FTVE$, cujus ſemidiametri conjugatæ ſint DB & DF, quæque ſecet DA in E, & DP, DQ in T & V; & erit tempus aſcenſus totius ut hyperbolæ ſector TDE.



(m) * *Et exponatur gravitas per DAq.* Corpore aſcendente ratio gravitatis uniformis ad reſiſtentiam vel major eſt ratione quadrati dati AB^2 ad quantitatem $AP^2 + 2BAP$, vel minor vel æqualis. In 1°. caſu gravitas exponi ſemper poterit per quadratum ſecantis AD quæ quantumvis magna aſſumi poteſt; In 2°. caſu per differentiam $AB^2 - BD^2$ quæ quantumvis parva eſſe poteſt; & in 3°. caſu per quadratum AB^2.

(n) * *Ut ſumma virium* (18).

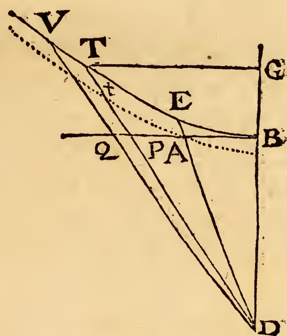
(o) * *Ipſi PQ proportionalis.* Nam area DPQ eſt $\frac{1}{2}BD \times PQ$, & ideò ob datam $\frac{1}{2}BD$ eſt ut PQ.

(p) * *Ut DTq ad DPq.* Triangu-

Nam velocitatis decrementum PQ, in datâ temporis particulâ factum, est ut summa resistentiæ $APq + 2BAP$ & gravitatis $ABq - BDq$, (q) id est, ut $BPq - BDq$. Est autem area DTV ad aream DPQ ut DTq ad DPq; ideoque, si ad DF demittatur perpendiculum GT, ut GTq seu $GDq - DFq$ ad BDq, utque GDq ad BPq, & divisim ut DFq ad $BPq - BDq$. Quare cum area DPq sit ut PQ, id est, ut $BPq - BDq$; erit area DTV ut datum DFQ. Decrescit igitur area EDT uniformiter singulis temporis particulis æqualibus, per subductionem particularum totidem datarum DTV, & propterea tempori proportionalis est. *Q. E. D.*

LIBER SECUND. SECT. III. PROP. XIII. THEOR. X.

Cas. 3. Sit AP velocitas in descensu corporis, & $APq + 2BAP$ resistentia, & $BDq - ABq$ vis gravitatis, existente angulo DBA recto. Et si centro D, vertice principali B, describatur hyperbola rectangula $BETV$ secans productas DA, DP & DQ in E, T & V; erit hyperbolæ hujus sector DET ut tempus totum descensus.



Nam velocitatis incrementum PQ, eique proportionalis area DPQ, est ut excessus gravitatis supra resistentiam, id est, ut $BDq - ABq - 2BAP - APq$ seu $BDq - BPq$. Et area DTV est ad aream DPQ ut DTq ad DPq, ideoque ut (r) GTq seu $GDq - BDq$ ad BPq, utque GDq ad BDq, & divisim ut BDq ad $BDq - BPq$. Quare cum area DPQ sit ut $BDq - BPq$, erit area DTV ut datum BDq. Crescit igitur area EDT

lum evanescens D P q, non differt a sectore circuli centro D & radio D Q descripti, inter lineas D Q & D P; hic verò sector est ad similem sectorem D T V, ut DP^2 ad DT^2, quarè area D T V, est ad aream D P Q, ut DT^2 ad DP^2, & permutando, area D T V est ad DT^2, ut area D P Q ad DP^2. Cum igitur (ex dem.) area D P Q sit ut DP^2, erit etiam area D T V ut DT^2, seu ut datum quadratum DB^2; ergo, tempore dato, data est area D T V, & ideò temporibus æqualibus *æqualiter decrescit area* E D T, *ad modum temporis futuri &c.* 138

(q) * *Id est ut* $BPq - BDq$. Est enim $APq + 2BAP + ABq = BPq$:

(r) *Ut* GTq. Nam ob similitudinem triangulorum D G T, P B D est D T q ad D P q ut $GTq = GDq - DFq$ (ex conic. vid. not. in cas. prop. 9.) ad B D q, *utque* G D q *ad* B D q, *& divisim &c.*

De Motu Corporum.

EDT uniformiter ſingulis temporis particulis æqualibus, per additionem totidem datarum particularum *DTV*, & propterea tempori deſcenſus proportionalis eſt. *Q. E. D.*

Corol. Si centro *D* ſemidiametro *DA* per verticem *A* ducatur arcus *At* ſimilis arcui *ET*, & ſimiliter ſubtendens angulum *ADT*: velocitas *AP* erit ad velocitatem, quam corpus tempore *EDT*, in ſpatio non reſiſtente, aſcendendo amittere vel deſcendendo acquirere poſſet, ut area trianguli *DAP* ad aream ſectoris *DAt*; ideoque ex dato tempore datur. (ſ) Nam velocitas, in medio non reſiſtente, tempori, atque ideo ſectori huic proportionalis eſt; in medio reſiſtente eſt ut triangulum; & in medio utroque, ubi quam minima eſt, accedit ad rationem æqualitatis, pro more ſectoris & trianguli.

Scho-

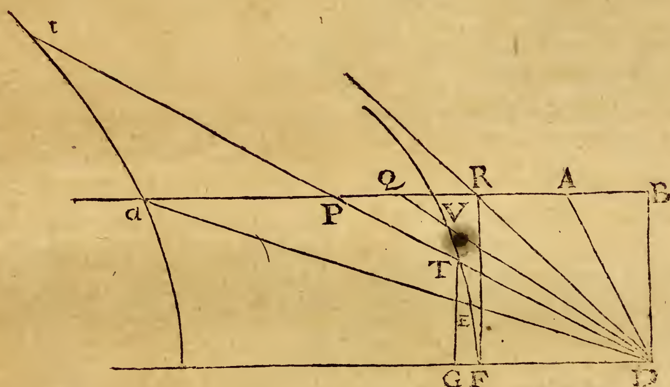
(ſ) * *Nam velocitas in medio non reſiſtente* (25. lib. 1.) *tempori* atquè adeò ſectori E D T, & proindè *ſectori D At, proportionalis eſt;* in medio reſiſtente eſt ut A P, ſeu ob datam B D ut $\frac{1}{2}$ B D × A P; ſivè ut triangulum A D P; & in medio utroque ubi quam minima eſt, nempè initio deſcensûs è quiete vel in fine aſcensûs accedit ad rationem æqualitatis ob reſiſtentiam evaneſcentem, evaneſcente velocitate, pro more, ſectoris D A t & trianguli D A P coeuntibus punctis t & P cum puncto A.

139. Quoniam ubi in corporis deſcenſu BP fit = B D, angulus B D P ſemirectus evadit, & recta D P aſymptotus hyperbolæ æquilateræ B E T; manifeſtum eſt quod corpus è quiete cadendo nonniſi finitam velocitatem infinito tempore poſſit acquirere. Erit enim velocitas tempore infinito acquiſita B D − A B. Si verò corpus verticaliter deorſum datâ cum velocitate projiciatur, vel illa velocitas maximæ ſeu terminali B D − A B æqualis eſt, & in hoc caſu corpus motu uniformi deſcendit ob reſiſtentiam gravitati æqualem; vel terminali minor eſt, & corporis cadentis motus perpetuò acceleratur, donec infinito tempore velocitatem maximam acquirat; vel tandem terminali major eſt, tumque corporis motus perpetuò retardatur, donec infinito tempore elapſo ad velocitatem terminalem reducatur; hoc autem caſu ſic abſolvitur conſtructio.

Sit A a velocitas datæ projectionis terminali major, A P velocitas perpetuò decreſcens, A P² + 2 B A P reſiſtentia, & B D² − A B² vis gravitatis, exiſtente angulo D B A recto; & ſi capiatur BR = BD, compleaturque quadratum D B R F, ac centro D & vertice principali F deſcribatur hyperbola rectangula F E T V, ſecans rectas D a, D P & D Q, in E, T, V; tempus deſcensûs ab initio uſquequò reſidua corpori velocitas ſit A p, erit ut ſector hyperbolicus D E T; nam velocitatis decrementum P Q, in datâ temporis particulâ factum eique proportionalis area D P Q

Scholium.

Demonſtrari (†) etiam poſſet caſus in aſcenſu corporis, ubi vis gravitatis minor eſt quam quæ exponi poſſit per *DAq* ſeu *ABq* + *BDq*, & major quam quæ exponi poſſit per *ABq* − *BDq*, & exponi debet per *ABq*. (†) Sed propero ad alia.



DPQ eſt ut exceſſus reſiſtentiæ ſuprà gravitatem (13), id eſt, ut $AP^2 + 2BAP + AB^2 - BD^2$, ſeu $BP^2 - BD^2$; & area DTV eſt ad aream DPQ, ut DT^2 ad DP^2, ideoque ut GT^2, (ſeu $GD^2 - BD^2$) ad BD^2. Quarè cum area DPQ, ſit ut $BP^2 - BD^2$, erit area DTV ut datum BD^2. Creſcit igitur area EDT, uniformiter ſingulis temporis particulis æqualibus per additionem totidem datarum particularum DTV, & propterea tempori deſcensûs proportionalis eſt. Coincidente verò puncto P, cum R, & ideò rectâ DP, cum aſymptoto DR, velocitas AP terminali AR ſeu BD − AD æqualis evadit, & ſector DET infinitus, proindèque tempus etiam infinitum fit. Q. E. D.

140. Hinc etiam ſi centro D, ſemidiametro Da, per verticem a, ducatur arcus Hyperbolicus at ſimilis arcui ET, & ſimiliter ſubtendens angulum aDT; velocitas aP, in medio reſiſtente tempore EDT, extincta, erit ad velocitatem quam corpus eodem tempore in ſpatio non reſiſtente è quiete deſcendendo acquirere poſſet ut area trianguli DaP, ad aream ſectoris Dat, ideòque ex dato tempore datur, & hinc datur quoque velocitas reſidua AP. Nam velocitas in medio non reſiſtente acquiſita tempori atquè ideò ſectori DET, & proinde ſectori ſimili Dat proportionalis eſt; velocitas in medio reſiſtente extincta eſt ut triangulum DaP, & in medio utroque ubi quam minima eſt, accedit ad rationem æqualitatis pro more ſectoris Dat, & trianguli DaP. 140.

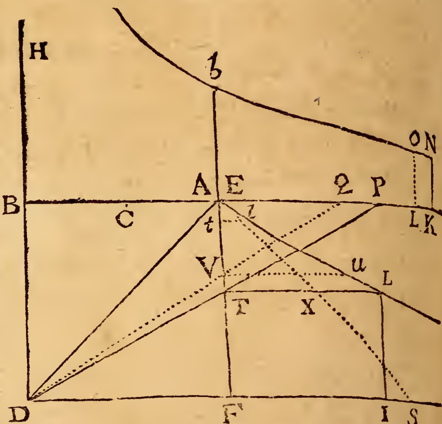
(†) 141. *Demonſtrari poſſet caſus in aſcen-*

DE MOTU CORPORUM.

ascensu corporis, ubi vis gravitatis..... exponi debet per ABq. * Velocitas in ascensu exponatur per AP ut prius, sit resistentia ut APq + 2BAP, exponatur vis gravitatis per ABq capiatur BD & DF = BA erectoque perpendiculo FTA erit tempus ascensus totius ut sector sive Triangulum DTA, agatur enim DVQ abscindens & velocitatis momentum PQ & sectoris DTA momentum DTV, velocitatis decrementum PQ est ut summa resistentiæ & gravitatis sive ut APq + 2BAP + ABq id est (per 4. 2ⁱ. Elem.) ut BPq; est autem area DTV ad aream DPQ ut DTq ad DPq, sive ob Triangula similia DTF, DPB, ut DFq ad BPq, est ergo area DTV ut datum DFq. *Decrescit igitur area DTA ad modum temporis futuri per subductionem particularum DTV, & propterea tempori ascensus totius proportionalis est.* *

Si itaque resistentia ponatur esse ut $AP^2 + 2BAP$, vis autem gravitatis ut AB^2; tempus ascensûs totius erit ut AT & etiam ut $\frac{AP}{BP}$. Nam triangulum DTA, ob altitudinem constantem DF, est ut basis ATBP & propter Triangula similia DTF, ATP est DF : TF = AP : AT; & jungendo terminos secundæ rationis cum terminis primæ est DF + AP (sive BP) : TF + AT (sive BD) = AP : AT, est ergo $AT = \frac{AP \times BD}{BP}$ sive ob datum BD, AT est ut $\frac{AP}{BP}$.

142. In isto casu velocitas AP est ad velocitatem quam corpus tempore DAT sive $\frac{AP}{BP}$, in spatio non resistente ascendendo amittere vel amittere descendendo acquirere posset, ut BP ad AB. Nam velocitas in medio non resistente tempori atquè ideò areæ DAT sive rectæ AT proportionalis est; in medio resistente est ut AP, & in medio utroque ubi quam minima est, accedit ad rationem æqualitatis; sed cum capiatur BD = AB, ratio linearum AP, AT, in puncto A ubi quam minima est, accedit ad rationem linearum AF, FD quæ est æqualitatis. Quare velocitas AP, in medio resistente erit ad velocitatem in medio non resistente eodem tempore PN amissam vel acquisitam ut AP ad AT; hoc est ob Triangula similia APT, BPD ut BP ad BD



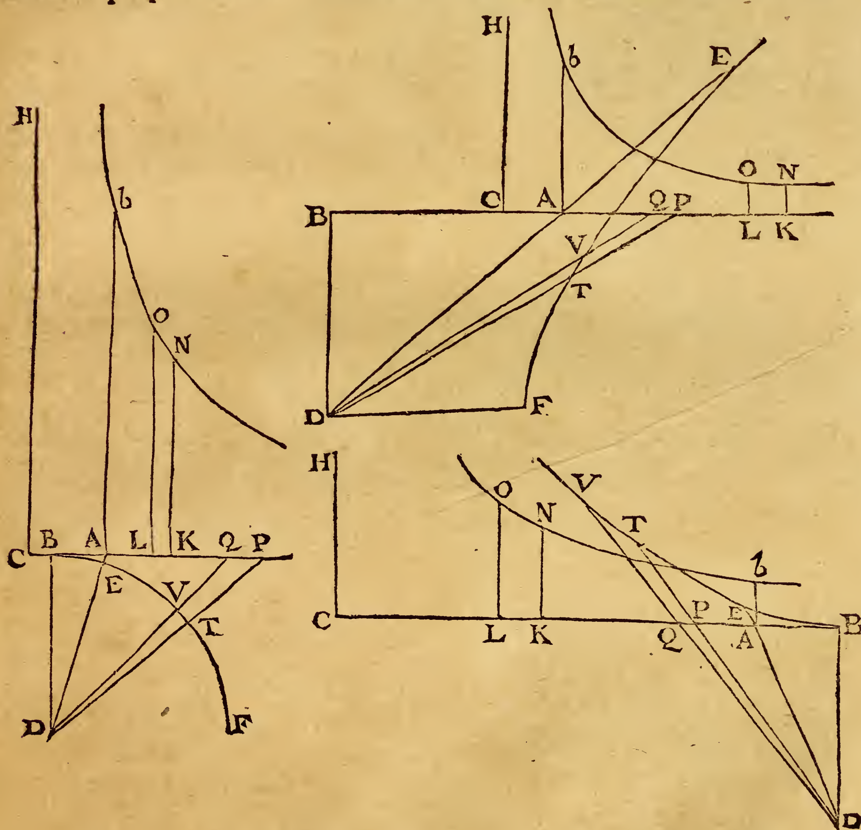
vel AB. Q. E. D.

143. Ex formulis quas (19) dedimus facile intelligitur quomodo ad hoc Theorema X. deveniatur. Nam si dicatur gravitas g, velocitas v, resistentia $2av + vv$, & tempus t; corpore ascendente erit (16. 17) $gdt + 2avdt + vvdt = -dv$, & ideò $dt = \frac{-dv}{vv + 2av + g}$. Ponatur $v + a = x$, & ideò $dv = dx$, & $vv + 2av = xx - aa$, fiet $dt = \frac{-dx}{xx + g - aa}$. Undè si fuerit $g = aa$, erit $dt = \frac{-dx}{xx}$; si $g - aa = bb$, erit $dt = \frac{-dx}{xx + bb}$. Si $g - aa = -bb$ erit $dt = \frac{-dx}{xx - bb}$. Fluens quantitatis $-\frac{dx}{xx}$, est $\frac{1}{x}$, fluens quantitatis $\frac{-dx}{xx + bb}$, pendet a quadraturâ sectoris circularis (107), fluens quantitatis $\frac{-dx}{xx - bb}$, à quadraturâ sectoris hyperbolici; atquè hi sunt tres casus pro corporis ascensu; pro descensu verò est (19) $gdt - 2avdt - vvdt = dv$, & ideò $dt = \frac{dv}{g - 2av - vv} = \frac{dx}{g + aa - xx} = \frac{dx}{bb - xx}$, ponendo $v + a = x$ & $g + aa = bb$, fluens autem quantitatis $\frac{dx}{bb - xx}$, pendet a quadraturâ hyperbolæ.

PROPOSITIO XIV. THEOREMA XI.

Iisdem positis, dico quod spatium ascensu vel descensu descriptum, est ut differentia areæ per quam tempus exponitur, & areæ cujusdam alterius quæ augetur vel diminuitur in progressione arithmeticâ; si vires ex resistentiâ & gravitate compositæ sumantur in progressione geometricâ.

Capiatur AC in (fig. tribus ultimis) gravitati, & AK resistentiæ proportionalis. Capiantur autem ad easdem partes pun-



cti A si corpus descendit, aliter ad contrarias. Erigatur Ab, quæ sit ad DB ut DBq ad $4BAC$: & descriptâ ad asymp-

 totos

DE MOTU CORPORUM.

totos rectangulas CK, CH hyperbolâ bN, erectaque KN ad CK perpendiculari, (t) area $AbNK$ augebitur vel diminuetur in progressione arithmeticâ, (u) dum vires CK in progressione geometricâ sumuntur. (x) Dico igitur quod distantia corporis ab ejus altitudine maximâ sit ut excessus areæ $AbNK$ supra aream DET.

Nam cum AK sit ut resistentia, id est, ut $APq + 2BAP$; assumatur data quævis quantitas Z, & ponatur AK æqualis $\frac{APq + 2BAP}{Z}$; & (per hujus lemma 11.) erit ipsius AK momentum KL æquale $\frac{2APQ + 2BA \times PQ}{Z}$ seu $\frac{2BPQ}{Z}$, & areæ $AbNK$ momentum $KLON$ æquale $\frac{2BPQ \times LO}{Z}$ (z) seu $\frac{BPQ \times BD\ cub.}{2Z \times CK \times AB}$.

Cas. 1. Jam si corpus acendit, (a) sitque gravitas ut $ABq + BDq$ existente BET circulo (in figurâ primâ) linea (b) AC, quæ gravitati proportionalis est, erit $\frac{ABq + BDq}{Z}$, & (c) DPq seu $APq + 2BAP + ABq + BDq$ erit $AK \times Z +$

(t) * *Area AbNK augebitur vel &c.* (380. Lib. 1.).

(u) * *Dum vires CK &c.* Sunt enim vires acceleratrices vel retardatrices ut CK, siquidem in corporis ascensu vis retardatrix est $AC + AK$, seu summa virium gravitatis & resistentiæ, & in descensu vis acceleratrix est $AC - AK = CK$ seu excessus vis gravitatis supra resistentiam (18).

(x) * *Dico igitur quod distantia corporis ascendentis ab ejus altitudine maximâ & distantia descendentis à puncto quetis ex quo decidit sit ut excessus* &c.

(z) * *Seu &c.* Nam (per theor. 4. de hyp.) est $LO : Ab = CA : CK$, & (per constr.) $Ab : DB = DB^2 : 4BA \times AC$, ideoque (ex æquo) $LO : DB = DB^2 : 4BA \times CK$, & hinc $LO = \frac{DB^3}{4KC \times BA}$. Quare momentum $KLON = LO \times KL = \frac{2BPQ \times LO}{Z} = \frac{BPQ \times BD^3}{2Z \times CK \times AB}$.

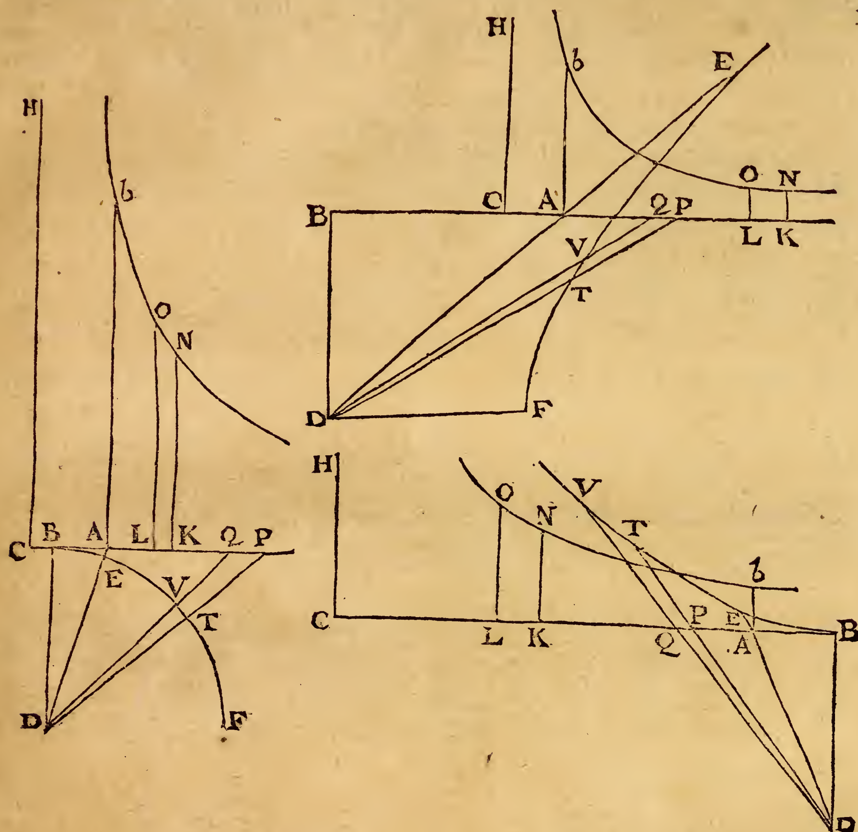
(a) * *Sitque gravitas &c.* In cas. 1°. prop. 13. gravitas erat ut $DA^2 = AB^2 + BD^2$.

(b) * *Linea AC &c.* Est enim in cas. 1°. prop. 13. gravitas ad resistentiam ut $AB^2 + BD^2$ ad $AP^2 + 2BAP$, & (per hyp.) ut AC ad AK, seu $\frac{AP^2 + 2BAP}{Z}$. Quarè erit $AB^2 + BD^2$ ad $AP^2 + 2BAP$ ut AC ad $\frac{AP^2 + 2BAP}{Z}$, & hinc habetur $AC = \frac{AB^2 + BD^2}{Z}$, & $AC \times Z = AB^2 + BD^2$.

(c) * *Et DPq &c.* Ob angulum DBP rectum, & quia $AK \times Z = AP^2 + 2BAP$, atque $AC \times Z = AB^2 + BD^2$, ut ex superioribus patet.

$AC \times Z$ seu $CK \times Z$; ([d]) ideoque area DTV erit ad aream DPQ ut DTq vel DBq ad $CK \times Z$.

Cas. 2. Sin corpus ascendit, & gravitas sit ut $ABq - BDq$,



([e]) linea AC (in figurâ secundâ) erit $\frac{ABq - BDq}{Z}$, & ([f]) DTq erit ad DPq ut DFq seu DBq ad $BPq - BDq$ seu $APq + 2BAP + ABq - BDq$, id est, ad $AK \times Z +$

(d) * *Ideóque area DTV &c.* Nam (ex dem.) in 1°. casu prop. 13.) area DTV est ad aream DPQ, ut DT^2 vel DB^2 ad DP^2, & est $DP^2 = CK \times P$.

(e) * *Linea AC &c.* Patet ut in primo casu hujus.

(f) *Et DTq erit ad DPq.* Patet (ex dem. in cas. 2°. prop. 13.)

De Motu Corporum.

$AC \times Z$ ſeu $CK \times Z$. (g) Ideoque area DTV erit ad aream DPQ ut DBq ad $CK \times Z$.

Caſ. 3. Et eodem argumento, ſi corpus deſcendit, & propterea gravitas ſit ut $BDq - ABq$, & linea AC (in figurâ tertiâ) æquetur $\frac{BDq - ABq}{Z}$ (h) erit area DTV ad aream DPQ ut DBq ad $CK \times Z$: ut ſupra.

Cum igitur areæ illæ ſemper ſint in hâc ratione; ſi pro areâ DTV, quâ momentum temporis ſibimet ipſi ſemper æquale exponitur, ſcribatur determinatum quodvis rectangulum, putà $BD \times m$, erit area DPQ, id eſt, $\frac{1}{2}BD \times PQ$; ad $BD \times m$ ut $CK \times Z$ ad BDq. Atque inde fit $PQ \times BD\,cub.$ æquale $2BD \times m \times CK \times Z$, & areæ $AbNK$ (i) momentum $KLON$ ſuperius inventum fit $\frac{BP \times BD \times m}{AB}$. Auferatur areæ DET momentum DTV ſeu $BD \times m$, & reſtabit $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$. Eſt igitur differentia momentorum, id eſt, momentum differentiæ arearum, æqualis $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$; & propterea ob datum $\frac{BD \times m}{AB}$ ut velocitas AP, id (k) eſt, ut momentum ſpatii quod corpus aſcendendo vel deſcendendo deſcribit. Ideoque differentia arearum & ſpatium illud proportionalibus momentis creſcentia vel decreſcentia & ſimul incipientia vel ſimul evaneſcentia, (l) ſunt proportionalia. *Q. E. D.*

Co-

(g) * *Ideoque area DTV &c.* Nam (ex dem. in 2°. caſ. prop. 13.) area DTV, eſt ad aream DPQ, ut BD^2 ad $BD^2 - BP^2 = BD^2 - AB^2 - 2BAP - AP^2 = AC \times Z - AK \times Z = CK \times Z$.

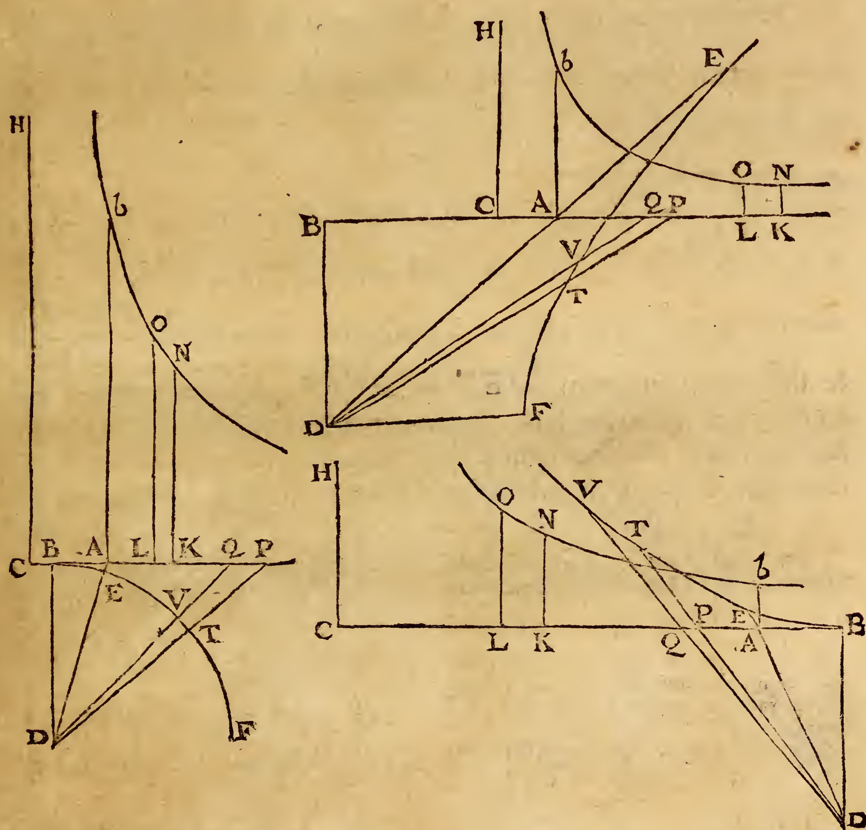
(h) * *Erit area DTV.* (Ex demonſtratis in 3°. caſ. prop. 13.) area DTV eſt ad aream DPQ, ut BD^2 ad $BD^2 - BP^2 = BD^2 - AB^2 - 2BAP - AP^2 = AC \times Z - AK \times Z = CK \times Z$.

(i) * *Momentum KLON ſuperius inventum* eſt $\frac{BPQ \times BD^3}{2Z \times CK \times AB} = \frac{BP \times PQ \times BD^2}{2Z \times CK \times AB}$. Quarè cum ſit $PQ \times BD^3 = 2BD \times m \times CK \times Z$, erit $KLON = \frac{BP \times BD \times m}{AB}$.

(k) * *Id eſt ut momentum ſpatii.* Nam dato temporis momento, momentum ſpatii eſt ut velocitas (11.).

(l) * *Sunt proportionalia.* (Per coroll. Lem. 4. Lib. 1.) Dum autem evaneſcit AP, ſeu velocitas, evaneſcit quoque reſiſtentia AK, cum areâ AbNK, & tempore DTE.

Corol. Si longitudo, quæ oritur applicando aream DET ad lineam BD, dicatur M; & longitudo alia V ſumatur in eâ ratione ad longitudinem M, quam habet linea DA ad lineam DE: ſpatium, quod corpus aſcenſu vel deſcenſu toto in medio reſiſtente deſcribit, erit ad ſpatium, quod corpus in medio



non reſiſtente è quiete cadendo eodem tempore deſcribere poteſt, ut arearum prædictarum differentia ad $\frac{BD \times V^2}{AB}$: ideoque ex dato tempore datur. Nam ſpatium in medio non reſiſten-

stente est in duplicatâ ratione temporis, sive (m) ut V^2; & ob datas BD & AB ut $\frac{BD \times V^2}{AB}$. (n) Hæc area æqualis est areæ $\frac{DAq \times BD \times M^2}{DEq \times AB}$, & (o) ipsius M momentum est m; & propterea hujus areæ momentum est $\frac{DAq \times BD \times 2M \times m}{DEq \times AB}$. Hoc autem momentum est ad momentum differentiæ arearum prædictarum DET & $AbNK$, viz. ad $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$, ut $\frac{DAq \times BD \times M}{DEq}$ ad $\frac{1}{2} BD \times AP$, sive (p) ut $\frac{DAq}{DEq}$ in DET ad DAP; ideoque, ubi areæ DET & DAP quam minimæ sunt, (q) in ratione æqualitatis. Area igitur $\frac{BD \times V^2}{AB}$, & differentia arearum DET & $AbNK$, quando omnes hæ areæ quam minimæ sunt, æqualia habent momenta; (r) ideoque sunt æquales. Unde cum velocitates, & propterea etiam spatia in medio utroque in principio descensus vel fine ascensus simul de-

(m) * *Sivè ut* V^2. Nam ob datas BD, DA, DE, longitudo quæ æquatur $DET \times \frac{DA}{BD \times DE}$ (per hyp.) est ut area DET, seu ut tempus. Spatium autem in medio non resistente est in duplicatâ ratione temporis (27. Lib. 1.) ideoque ut V^2.

(n) * *Hæc area.* Quoniam (per hyp.) $V : M = DA : DE$, erit $V = \frac{DA \times M}{DE}$ & $V^2 = \frac{DA^2 \times M^2}{DE^2}$, adeoque $\frac{BD \times V^2}{AB} = \frac{DA^2 \times BD \times M^2}{DE^2 \times AB}$.

(o) * *Et ipsius M momentum est m.* Cum enim sit (per hyp.) $M = \frac{DET}{BD}$, momentum ipsius M, erit $\frac{DTV}{BD}$, sed superiùs supponebatur $DTV = BD \times m$; Quarè momentum ipsius M, est m; Et ideò momentum quadrati M^2 est $2 M \times m$ (per cas. 3. Lem. hujus) & *propterea* ob datas DA, BD, DE & AB, *hujus areæ momentum* &c.

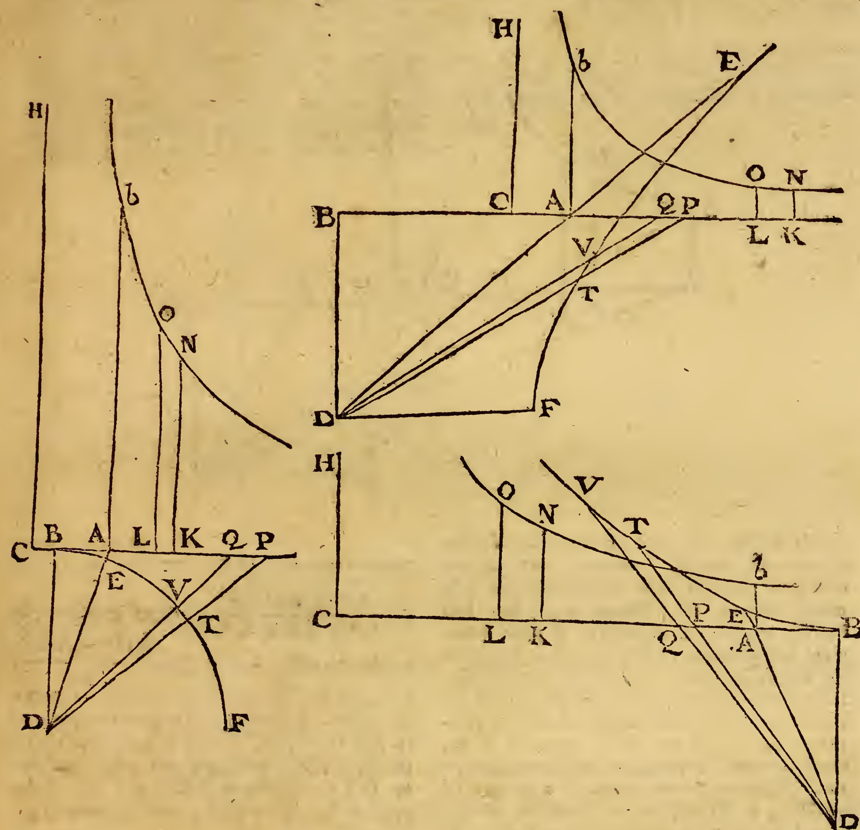
(p) * *Sivè ut* $\frac{DAq}{DEq}$ *in DET &c.* Ob $M = \frac{DET}{BD}$, ideoque $M \times BD = DET$, & $\frac{1}{2} BD \times AP = DAP$.

(q) * *In ratione æqualitatis.* Ubi enim areæ DET & DAP quam minimæ sunt, fit $DET : DAP = DE^2 : DA^2$, ideóque $\frac{DA^2}{DE^2} \times DET = DAP$.

(r) *Ideóque sunt æquales.* Quandò sunt quam minimæ.

descripta accedant (f) ad æqualitatem; ideoque tunc sint ad invicem ut area $\frac{BD \times V^2}{AB}$, & arearum DET & $AbNK$ differentia; & præterea cum spatium in medio non resistente sit perpetuò ut $\frac{BD \times V^2}{AB}$, & spatium in medio resistente sit perpetuo ut arearum DET & $AbNK$ differentia: necesse est, ut

LIBER SECUND. SECT. III. PROP. XIV. THEOR. XI.



(f) *Accedant ad æqualitatem.* Ob resistentiam cum velocitate nascentem vel evanescentem, manente gravitate.

144. Constructione casûs 3ⁱ. proposi-

 tio-

DE MOTU CORPORUM.

spatia in medio utroque, in æqualibus quibuscunque temporibus descripta, sint ad invicem ut area illa $\frac{BD \times V^2}{AB}$, & arearum DET & $AbNK$ differentia. *Q. E. D.*

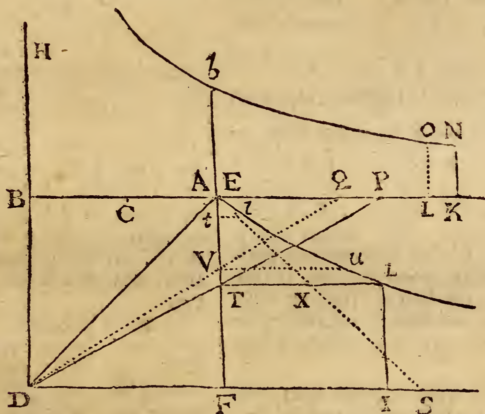
tionis hujus 14æ. uti possumus ad determinandum motum corporis verticaliter deorsum projecti cum velocitate quæ terminali minor est. Nam si æqualis ipsi fuerit, motus est æquabilis; si verò celeritas projectionis terminali major sit, paulò mutanda erit casus tertii constructio. Iisdem enim positis quæ (in not. 139.) capiatur A C gravitati & A K resistentiæ proportionalis, ità ut sit C inter A & K, quod resistentia gravitate major supponatur. Erigatur perpendicularis a b, quæ sit ad DB, ut DB^2, ad $4 AB \times Ca$, & descriptâ ad asymptotos rectangulas CK, CH hyperbolâ bN, erectâque KN ad CK, perpendiculari, area a b N K augebitur in progressione arithmeticâ, dum vires C K in progressione geometricâ minuuntur. Spatium autem tempore DET descriptum erit ut excessus areæ abNK, supra aream DET; nam ponatur, (ut in demonstratione prop. 14.) $AK = \frac{AP^2 + 2BAP}{Z}$, & ideò $KL = \frac{2BPQ}{Z}$ atque areæ abNK momentum KLON, $= \frac{2BPQ \times LO}{Z} = \frac{BPQ \times DB^3}{2Z \times AB \times CK}$. Cum gravitas sit ut $BD^2 - AB^2$, erit $AC = \frac{BD^2 - AB^2}{Z}$, & area DTV ad aream DPQ ut BD^2 ad $BP^2 - BD^2$ (139) sive $AP^2 + 2BAP + AB^2 - BD^2$, sive $AK \times Z - AC \times Z$, vel $CK \times Z$. Si itaquè pro areâ constante DTV, scribatur $BD \times m$, erit area DPQ, id est, $\frac{1}{2} BD \times PQ$ ad $BD \times m$, ut $CK \times Z$ ad BD^2, atquè indè fit $PQ \times BD^3 = 2BD \times m \times CK \times Z$, & areæ abNK momentum KLON superiùs inventum fit $\frac{BP \times BD \times m}{AB}$ auferatur areæ DET momentum DTV seu $BD \times m$ & restabit $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$. Est igitur differentia momentorum, id est, momentum differentiæ arearum ut velocitas AP, id est

est, ut momentum spatii quod corpus describit, ideóque differentia arearum ut spatium descriptum.

145. Hinc spatium tempore DET, velocitate uniformi Aa descriptum est ad spatium eodem tempore descriptum in medio resistente ut factum $Aa \times DET$ ad arearum abNK & DET differentiam in AB ductam. Nam spatium tempore DET, velocitate uniformi Aa descriptum, est ut $Aa \times DET$ (5. lib. 1.) & spatii hujus momentum est ut $Aa \times DTV$; momentum autem spatii in medio resistente descripti est ut $AP \times DTV$, seu ut velocitas in momentum temporis ducta (12) & quia evanescente DET, fit $AP = Aa$, hæc momenta $Aa \times DTV$, $AP \times DTV$, initio temporis æqualia sunt, sicut & spatia initio descripta. Sed $AP \times DTV = AP \times BD \times m$ & momentum differentiæ arearum abNK & DET; est $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$ (144). Ergo $AP \times DTV$ æquale est momento differentiæ arearum abNK & DET per AB ducto, unde manifestum est propositum.

LIBER SECUNDUS. SECT. III. PROP. XIV. THEOR. XI.

145.



146. Si corporis ascendentis velocitas exponatur per longitudinem AP, & resistentia per AK quæ ponatur esse ut $AP^2 + 2BAP$. ita ut assumptâ datâ quâvis quantitate Z, sit $AK = \frac{AP^2 + 2BAP}{Z}$; vis autem gravitatis exponatur per AC, quæ sit semper ut AB^2, ita ut sit $AC = \frac{AB^2}{Z}$ eademque constructio fiat quæ (not. 141.) * & in A erigatur perpendiculum $Ab = \frac{AB^2}{4CA}$. Denique erecto perpendiculo in C describatur ad Asymptotos Rectangulos CK, CH hyperbolâ bN, erectâque KN ad CK perpendiculari, area AbNK diminuetur in progressione Arithmeticâ dum vires CK in progressione Geometricâ decrescente sumuntur. Et distantia corporis ab ejus altitudine maximâ erit ut excessus areæ AbNK supra Triangulum DET.

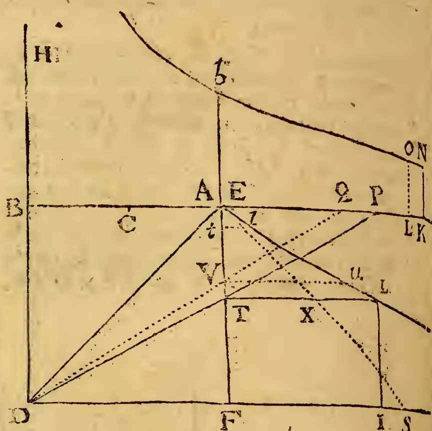
Cum enim sit $AK = \frac{AP^2 + 2BAP}{Z}$ erit ipsius AK momentum KL (per lib. 2. Lem. II.) $= \frac{2APQ + 2BA \times PQ}{Z} = \frac{2BPQ}{Z}$ & areæ AbNK momentum $KLoN = \frac{2BPQ \times LO}{Z}$, & quia, per naturam hyp. est $CK : CA = Ab \left(\text{sive } \frac{AB^2}{4CA}\right) : LO$, est $LO = \frac{AB^2}{4CK}$, ideoque KLON=

De Motu Corporum.

$\frac{BP \times AB^2 \times PQ}{2Z \times CK}$. Est verò area DTV ad aream DPQ ut DT^2 ad DP^2, sive etiam ob Triangula similia TDF, BDP, ut DF^2, sive AB^2 ad BP^2, seu $AP^2 + 2BAP + AB^2$ (per 4. 2. El.) hoc est (quia ex hypothesi est $AP + 2BAP = AK \times Z$, & $AB^2 = CA \times Z$) ad $CK \times Z$.

Hinc si pro area DPQ scribatur ejus valor $\frac{1}{2} BD \times PQ = \frac{1}{2} AB \times PQ$, erit area $DTV = \frac{AB \times AB^2 \times PQ}{2Z \times CK}$, quæ valorem constantem exprimere debet, quia momentum temporis sibi semper æquale exponit, ejus itaque loco scribatur Rectangulum $AB \times m$ in quo m erit momentum constans, est $m = \frac{AB^2 \times PQ}{2Z \times CK}$, erit ergo areæ AbNK momentum superius inventum $\frac{BP \times AB^2 \times PQ}{2Z \times CK} = BP \times m$, igitur differentia momentorum KLON & DTV, est $BP \times m - AB \times m = AP \times m$ & propterea ob datum m ut velocitas AP, id est, ut momentum spatii quod corpus ascendendo describit, & quo minuitur corporis distantia ab ejus altitudine maximâ. Ideoque differentia arearum & spatium illud proportionalibus momentis decrescentia, simulque evanescentia sunt proportionalia.

Verùm in isto casu facilius quam per methodum Newtonianam obtinetur spatium à corpore ascendente usque ad quietem in medio resistente descriptum, & ejus relatio ad spatium in medio non resistente eodem tempore percurrendum: Etenim per punctum A asymptotis DB, DF describatur hyperbola, & ex puncto T ducatur perpendiculum TL ad Hyperbolam usque, Trilineum ATL erit ut spatium quæsitum. Ducatur LI ad asymptotum perpendicularis, erit $FI = TL$ & $TF = LI$, sed ex natura Hyperbolæ est $DF : DI = LI$ (sive TF) : AF, & dividendo $DF : FI$ (sive TL) $= TF : AT$, hoc est alternando $DF : TF = TL : AT$ (sed per 141) est $DF : TF = AP : AT$, ergo est $AP = TL$, itaque ducta ex V parallela



Vu, erit VTLu, momentum areæ ATL $= VT \times TL$, est autem VT momentum temporis, & $TL = AP$ ipsa velocitas eo momento, ergo $VT \times T$ est ut momentum spatii eo momento descripti, ergo tota area ATL est ut spatium descriptum.

Ducatur præterea tangens AS & designet At ultimum temporis momentum, & ducta tl, Trilineum evanescens ATL æquale fiet Triangulo Atl, & eo ultimo momento spatia tam in medio resistente quam in non resistente descripta erunt æqualia, ideoque per idem triangulum Atl exprimentur; spatia vero in medio non resistente descripta sunt ut Quadrata temporum, ideoque spatium tempore At in medio non resistente descriptum erit ad spatium tempore AT in eodem medio descriptum sicut $\overline{At}^2$ ad $\overline{AT}^2$, sive ut area trianguli Atl ad aream ATX; spatium verò in medio resistente descriptum tempore At erit ad spatium tempore AT in eodem medio descriptum ut Atl ad trilineum ATL, unde liquet quod spatium in medio non resistente descriptum, ascendendo ad quietem usque, erit ad spatium in medio resistente descriptum, ut ATX ad ATL.

Scho-

Scholium.

(t) Reſiſtentia corporum ſphæricorum in fluidis oritur partim ex tenacitate, partim ex frictione, & partim ex denſitate medii. Et reſiſtentiæ partem illam, quæ oritur ex denſitate fluidi, diximus eſſe in duplicatâ ratione velocitatis; pars altera, quæ oritur ex tenacitate fluidi, eſt uniformis, ſive ut momentum temporis: ideoque jam pergere liceret ad motum corporum, quibus reſiſtitur partim vi uniformi ſeu in ratione momentorum temporis, & partim in ratione duplicatâ velocitatis. Sed ſufficit aditum patefeciſſe ad hanc ſpeculationem in propoſitionibus VIII. & IX. quæ præcedunt, & eorum corollariis. In (u) iiſdem utique pro corporis aſcendentis reſiſtentiâ uniformi, quæ ex ejus gravitate oritur ſubſtitui poteſt reſiſtentia uniformis, quæ oritur ex tenacitate medii, quando corpus ſolâ vi inſitâ movetur; & corpore rectâ aſcendente addere licet hanc uniformem reſiſtentiam vi gravitatis; eandemque ſubducere, quando corpus rectâ deſcendit. Pergere etiam liceret ad motum corporum, quibus reſiſtitur partim uniformiter, partim in ratione velocitatis, & partim in ratione duplicatâ velocitatis. Et viam aperui in propoſitionibus præcedentibus XIII. & XIV. in (x) quibus etiam reſiſtentia uniformis, quæ oritur ex tenacitate medii pro vi gravitatis, ſubſtitui poteſt, vel cum eâdem, ut prius, componi. Sed propero ad alia.

SEC-

(t) (*) *Reſiſtentia corporum.* (Vid. Lemnum. 1.).

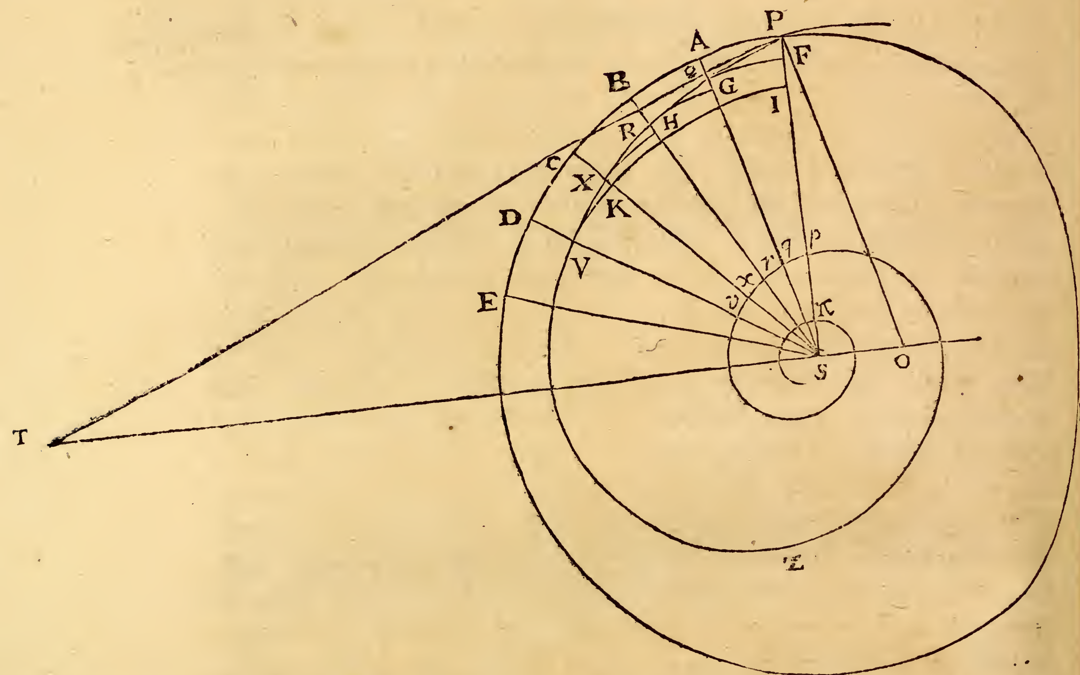
(u) (*) *In iiſdem utique* (105).

(x) * *In quibus etiam reſiſtentia uniformis*, hoc eſt, ſi corpus ſolâ vi inſitâ feratur, in conſtructionibus prop. 13. & 14., quæ ſunt pro corporis aſcenſu, loco gravitatis ſubſtituenda eſt reſiſtentia uniformis quæ oritur ex tenacitate medii; ſi corpus aſcendens vi gravitatis etiam urgeatur, quantitas illa quæ ſolam gravitatem exponebat, ſummam gravitatis & reſiſtentiæ uniformis in prædictis conſtructionibus exponet. Tandem ſi corpus vi gravitatis deſcendat, eadem quantitas quæ ſolam gravitatem exponebat, exceſſum gravitatis ſuprà reſiſtentiam uniformem in conſtructionibus quæ ſunt pro deſcenſu repræſentabit (cæteris manentibus). 146.

De Motu Corporum.

SECTIO IV.

De corporum circulari motu in mediis resistentibus (†).



(†) Newtonus in hâc sectione præcipuas supponit Logarithmicæ spiralis proprietates, postulat igitur instituti nostri ratio ut de illâ curvâ aliquid præmittamus.

147. Circulus P A E L, centro S, & radio quovis S P descriptus divisus sit in arcus quotlibet æquales P A, A B, B C, C D &c., sintque radiorum P S, A S, B S, C S &c., partes PS, Q S, R S, X S &c. in continuâ progressione geometricâ, puncta P, Q, R, X &c., erunt in *Spirali Logarithmicâ* in quâ proindè si radii Q S, R S, X S &c., sint numeri, arcus circuli P A, P B, P C &c., sicut & anguli P S Q, PSR, P S X &c., erunt ut illorum numerorum Logarithmi, prorsùs ut in vulgari Logarithmicâ axis partes sunt ut Logarithmi ordinatarum correspondentium.

148. Quoniam autem progressio geometrica in infinitum decrescere & crescere potest, manifestum est spiralem Logarithmicam utrinquè tam ad centrum S accedendo quam ab eodem versùs M recedendo per gyros infinitos continuari posse, continuatâ progressione radiorum decrescentium vel crescentium circà centrum S, ad quod idcircò curva decrescentibus radiis proportionalibus, magis magisque accedit, licet numquam illud possit attingere, sive ut loqui amant, licet illud centrum non attingat nisi post infinitas revolutiones.

149. Angulus S Q R, quem radius quilibet S Q, cum curvâ ad easdem partes constituit constans est; si quidem evanescentibus arcubus æqualibus P A, A B, B C &c., triangula evanescentia P S Q, Q S R, R S X &c., similia fiunt propter latera circà æquales ad centrum angulos proportionalia (147) & ideò alii anguli homologi

gi SPQ, SQR, SRX &c., & PQS, QRS, RXS, æquales ſunt.

150. Quoniam itaquè ſpira quælibet PQR Z p, p q r z π &c., totidem triangulis PQS & pqS, QRS & q r S &c. ſimilibus ſimiliterque poſitis diviſa eſt, ſpiræ omnes quæ à radio poſitione dato SP, ad eundem radium ductæ ſunt, inter ſe ſimiles radiiſque correſpondentibus proportionales erunt, id eſt PS : pS = PQRZp : pqrzπ &c. Atquè hinc ſequitur (147) tam ſpiras omnes quam radios ipſis correſpondentes ad centrum uſquè in progreſſione geometricâ decreſcere, ſunt enim PS, pS, πS, &c. progreſſionis geometricæ termini æquidiſtantes ob æqualem angulorum æqualium PSQ, QSR, pSq, qSr, &c. numerum in ſingulis ſpiris comprehenſum undè radiorum quoque differentiæ Pp, pπ &c. in eâdem geometricâ progreſſione decreſcunt.

151. Ductâ rectâ PT ſpiralem tangente in P, & rectâ PO ad eandem perpendiculari, per centrum S erigatur ad radium SP perpendiculum TSO rectis PT & PO occurrens in T & O, longitudo ſpiralis PZpzπS, ad centrum uſque S, æquabitur tangenti PT, eritque proindè ad radium SP in datâ ratione PT ad SP, vel OP ad OS. Nam centro S, radiis SQ, SR, SX, SV &c. infinitè propinquis deſcripti ſint arcus circulares QF, RG, XH, VK &c., & ob angulos QFP, RGQ, XHR rectos, anguloſque QPF, RQG, XRH &c. æquales (149), triangula evaneſcentia PFQ, QGR, RHX &c. ſimilia ſunt triangulo PST, eſt igitur PT : PS = PQ : PF = QR : QG = RX : RH &c. & compoſite PT : PS = PQ + QR + RX &c. : PF + QG + RH &c. id eſt, ut longitudo ſpiralis ad totum radium PS. Quarè longitudo ſpiralis æquatur tangenti PT. Eſt autem ubique tangens PT ad radium correſpondentem PS, in ratione datâ, ob triangulum PTS ſpecie datum (149) & ob triangula TPS, POS, (per Conſtr.) ſimilia, eſt etiam OP : OS = PT : PS, ſeu ut longitudo ſpiralis ad radium.

152. Hinc quoque patet quod ſi centro S & radio quovis VS deſcribatur circulus ſecans ſpiralem in V & radium PS, in I, pars ſpiralis PV erit ad partem PI, radii PS ut tangens PT ad totum radium PS. Quarè ſi, manentibus circulorum radiis SP, SI, mutetur utcumque angulus TPS, quem ſpiralis ſeu ipſius tangens continet cum radio PS, longitudo ſpiralis tota ad centrum uſquè S, ſicut & longitudo inter duos circulos radiis SP & SI deſcriptos comprehenſa, erit ut ſpiralis tangens PT, ſeu ut ſecans anguli TPS. Oſtendimus (151) longitudinem ſpiralis æqualem eſſe tangenti PT, & partem ſpiralis PV, inter prædictos circulos contentam, eſſe ad tangentem PT, in ratione PI ad PS, quæ (per hyp.) data eſt; manente autem radio ſeu ſinu toto PS, eſt PT ſecans anguli PTS.

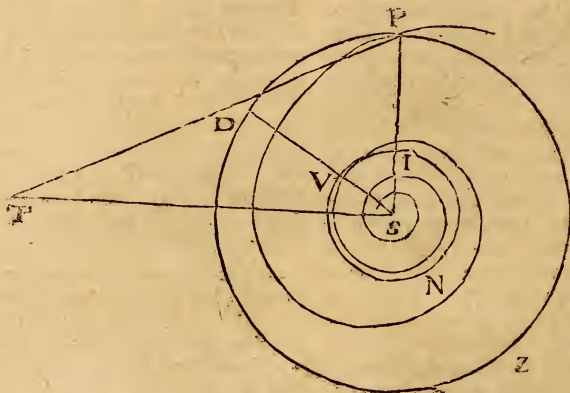
153. Dicantur radius conſtans PS = a, ſubtangens ST = b, arcus quilibet circuli PC vel PCLP + PC, vel 2 PCLP + PC = x, correſpondens ſpiralis radius SX = y, qui creſcente arcu x decreſcit, erit ob triangulorum XKV, PST ſimilitudinem PS : ST = XK : VK, & ob ſectores SVK, SDC ſimiles SK ſive SX : SC ſeu PS = VK : DC, ideoque ex æquo SX : ST = XK : DC; id eſt, $y : b = -dy : dx = -\frac{b\,dy}{y}$, hinc ſumptis fluentibus $x = Q - b L. y$, & quia ubi $x = 0$, fit $y = a$, erit $Q = b L. a$, & ideò $x = b L. a - b L. y = b L. \frac{a}{y}$; ſi itaque datus fuerit radius y cum arcu circulari x, ſeu angulo PSC dabitur b ſubtangens anguli ſpiralis, eſt enim $b = \frac{x}{L. \frac{a}{y}}$. 153.

Si verò datus ſit tum arcus x tum ſubtangens b dabitur radius y; Ponatur enim $L. h = 1$ & erit $\frac{x}{b} \times L. h = L. \frac{a}{y}$, adeòque $h^{\frac{x}{b}} = \frac{a}{y}$; $y = \frac{a}{h^{\frac{x}{b}}}$, & hinc etiam $a = y \times h^{\frac{x}{b}}$.

154. Hinc ſi manentibus radiis SP ſeu a, & SV vel SI ſeu y, adeòque & $L. \frac{a}{y}$, mutetur utcumque angulus TPS, quem ſpiralis cum radio continet, arcus circularis PD vel x, comprehenſus inter radios SP & SVD, erit ſemper ut ſubtangens ſpiralis ST, ſeu b, quæ, manente radio ſeu ſinu toto PS, eſt ut anguli TPS tangens.

155.

DE MOTU CORPORUM.



155 Iisdem positis, hoc est, manentibus radiis SP sive a, & SI sive y, & utcumque mutato angulo TPS, numerus revolutionum spiralis inter circulos PDZP, & IVNI centro S & radiis datis SPSV vel SI descriptos est ut tangens ST anguli TPS, quem spiralis cum radio continet. Sit enim c circumferentia circuli PTZP, & n numerus integer vel fractus revolutionum spiralis a puncto P ad punctum V inter circulos PDZP, & IVNI erit (153) $nc = x = bL.\frac{a}{y}$; & hinc $n = \frac{b}{c} \times L.\frac{a}{y}$. Quarè ob datas c, a & y, (per hyp.) erit n ut b, id est numerus revolutionum inter circulos datos ut subtangens spiralis ST, seu ut tangens anguli TPS, quem spiralis cum radio continet.

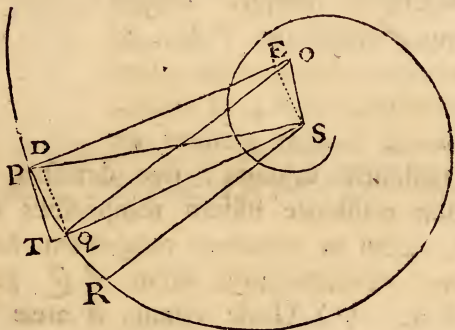
156. Spiralis post infinitos sibi super impositos gyros comprehendit cum radio PS spatium duplum trianguli PST. Iisdem enim positis quæ num. 153, cum sit (fig. 14.) PS (a) : ST (b) = XK $(-dy)$: VK $= -\frac{bdy}{a}$, erit sector SVK seu SVX $= -\frac{ybdy}{2a}$, & sumptis fluentibus, sector SPV $= Q - \frac{by^2}{4a}$; quia verò evanescente sectore SPV, fit $y = a$, erit $Q = \frac{ba^2}{4a}$, & hinc SPV $= \frac{baa - byy}{4a}$. Quare ubi radius $y = o$, fiet area SPV $= \frac{ba}{4} = \frac{PS \times ST}{4} = \frac{1}{2}$ Triang. PST.

LEMMA III.

LIBER SECUND. SECT. IV. LEM. III.

Sit PQR *spiralis quæ secet radios omnes* SP, SQ, SR, *&c. in æqualibus angulis. Agatur recta* PT *quæ tangat eandem in puncto quovis* P, *secetque radium* SQ *in* T; *& ad spiralem erectis perpendiculis* PO, QO *concurrentibus in* O, *jungatur* SO. *Dico quod si puncta* P *&* Q *accedant ad invicem & coeant, angulus* PSO *evadet rectus, & ultima ratio rectanguli* TQ × 2PS *ad* PQ *quad. erit ratio æqualitatis.*

Etenim de angulis rectis *OPQ*, *OQR* subducantur anguli æquales *SPQ*, *SQR*, & manebunt anguli æquales *OPS*, *OQS*. Ergo circulus qui transit per puncta O, S, P transibit (y) etiam per punctum *Q*. Coeant puncta *P* & *Q*, & hic circulus in loco coitus *PQ* tanget spiralem, (z) ideoque perpendiculariter secabit rectam *OP*. Fiet igitur *OP* diameter circuli hujus, & angulus *OSP* in semicirculo rectus. *Q. E. D.*



Ad *OP* demittantur perpendicula *QD*, *SE*, & (a) linearum rationes ultimæ erunt hujusmodi: *TQ* ad *PD* ut *TS* vel *PS* ad *PE*, seu 2*PO* ad 2*PS*; item *PD* ad *PQ* ut *PQ* ad 2*PO*; & ex æquo perturbatè *TQ* ad *PQ* ut *PQ* ad 2*PS*. Unde fit *PQq* æquale *TQ* × 2*PS*. *Q. E. D.*

PRO-

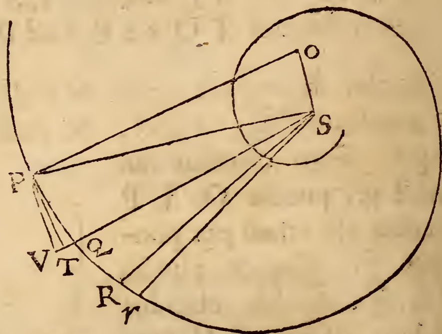
(y) * *Transibit etiam per punctum Q.* (per prop. 21. lib. 3. Elem.)

(z) *Ideóque perpendiculariter secabit rectam OP,* quæ (per hyp.) perpendicularis est ad arcum QP, fiet igitur OP diameter circuli hujus (per prop. 19. lib. 3. Elem.) & angulus OSP in semicirculo rectus (per prop. 31. lib. 3. Elem.).

(a) * *Et linearum rationes ultimæ.* Quoniam lineæ PT, DQ, ES ad PO normales, sunt parallelæ, erit (per prop. 10. lib. 6. Elem.) TQ : PD = TS vel PS : PE, & ob similitudinem triangulorum PSO, PES, PS : PE = PO : PS, seu 2PO : 2PS, ideoque TQ : PD = 2PO : 2PS. Quia verò radii OP, OQ sunt ad arcum eva- 156

PROPOSITIO XV. THEOREMA XII.

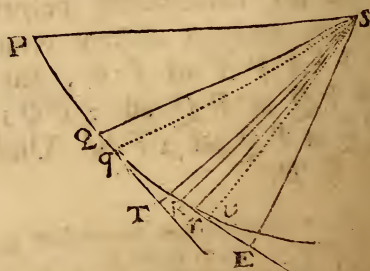
Si medii denſitas in locis ſingulis ſit reciprocè ut diſtantia locorum à centro immobili, ſitque vis centripeta in duplicatâ ratione denſitatis: dico quod corpus gyrari poteſt in ſpirali, quæ radios omnes à centro illo ductos interſecat in angulo dato.



Ponantur quæ in ſuperiore lemmate, & producatur SQ ad V, ut ſit SV æqualis SP. Tempore quovis, in medio reſiſtente, deſcribat corpus arcum quam minimum PQ, & tempore duplo arcum quam minimum PR; & decrementa horum arcuum ex reſiſtentiâ oriunda, ſive defectus ab arcubus, qui in medio non reſiſtente iiſdem temporibus deſcriberentur, (b) erunt ad invicem ut quadrata temporum in quibus generantur: Eſt itaque decrementum arcus PQ pars quarta decrementi arcus PR. (c) Unde etiam, ſi areæ PSQ æqualis capiatur area QSr,

evaneſcentem PQ perpendiculares, punctum O eſt centrum, P O radius & 2 P O diameter circuli ſpiralem oſculantis in P (121. lib. 1.) & (per lem. 7. lib. 1.) P Q hujus circuli arcus vel chordæ; atque adeo (ex naturâ circuli) abſciſſa P D eſt ad chordam P Q ut P Q ad diametrum 2 P O. Quare *ex æquo perturbatè* &c.

(b) * *Erunt ad invicem.* Cùm enim reſiſtentia per arcum P R conſiderari poſſit tanquam vis retardatrix (4) decrementa arcuum minimorum P Q, P R ex reſiſtentiâ oriunda ſunt ut ſpatia quæ urgente vi acceleratrice reſiſtentiæ æquali corpus deſcriberet iiſdem temporibus quibus deſcribit arcus illos P Q, P R; Quarè decrementa illa ſunt ut quadrata temporum quibus generantur (per Lem. X. lib. 1.).



(c) * *Undè etiam ſi areæ.* Corpus ea velocitate quam habet in loco P, temporibus æqualibus deſcribat arcus quam minimos P q, q v, in medio non reſiſtente,

QSr, erit decrementum arcus PQ æquale dimidio lineolæ Rr; ideoque vis resistentiæ & vis centripeta sunt ad invicem ut lineolæ $\frac{1}{2}Rr$ & TQ quas simul generant. Quoniam vis centripeta, quâ corpus urgetur in P, (d) est reciprocè ut SPq, & (per (e) lem. x. lib. 1.) lineola TQ, quæ vi illâ generatur, est in ratione compositâ ex ratione hujus vis & ratione duplicatâ temporis quo arcus PQ describitur (nam resistentiam in hoc casu, ut infinitè minorem quam vis centripeta, negligo) erit $TQ \times SPq$, id est (per lemma novissimum) $\frac{1}{2}PQq \times SP$, in ratione duplicatâ temporis, (g) ideoque tempus est ut ut $PQ \times \sqrt{SP}$; & (h) corporis velocitas, quâ arcus PQ illo tempore describitur, ut $\frac{PQ}{PQ \times \sqrt{SP}}$ seu $\frac{1}{\sqrt{SP}}$, hoc est, in subduplicatâ ratione ipsius SP reciprocè. Et simili argumento, velocitas quâ arcus QR describitur, est in subduplicata ratione ipsius SQ reciprocè. Sunt autem arcus illi PQ & QR ut (i) velocitates descriptrices ad invicem, id est, in subduplicatâ ratione SQ ad SP, sive ut SQ ad $\sqrt{SP \times SQ}$; &

te, & arcus PQ, QR in medio resistente, & erit (ex dem.) $4Qq = Rv$, sunt autem areæ PSq & qSv æquales (per prop. 1. Lib. 1.) ideóque ob areas PSQ, & QSr, etiam æquales (per hyp.) erit $PSq - PSQ$ seu area QSq æqualis $qSV - QSv$, seu $rSv - QSq$, & hinc area rSv æqualis est $2QSq$; sed demissis ex centro S ad tangentes QT & rt per puncta Q & r ductas perpendiculis ST & st, areæ evanescens QSq est $\frac{1}{2}ST \times Qq$, & area rSv, est $\frac{1}{2}St \times rv$. Quarè $ST \times Qq$ æquatur $\frac{1}{2}St \times rv$, & coeuntibus punctis P & v, fit $= St = ST$ atquè adeo $Qq = \frac{1}{2}rv$, & $2Qq = rv$. Cum igitur suprà invenerimus $4Qq = Rv$, erit $4Qq - 2Qq$, seu $2Qq = Rv - rv = Rr$, & ideò $Qq = \frac{1}{2}Rr$. Itaque eodem tempore quo resistentia generat decrementum Qq, seu $\frac{1}{2}Rr$, vis centripeta quâ corpus a tangente PT (vid. fig. text) ad punctum Q arcûs PQ retrahitur generat decrementum TQ, & ideò vis resistentiæ est ad vim centripetam ut $\frac{1}{2}Rr$ ad TQ, (per cor. 4. Lem. X.) atque hæc omnia generaliter obtinent, quæcumque fuerit tum curva PQR, cujus proprietates nondum adhibuimus, tum vis centripeta, tum resistentia, tum velocitas corporis. 156.

(d) * *Est reciprocè ut SPq* (per hyp.).

(e) * *Per Lem. X.* (cor. 3.).

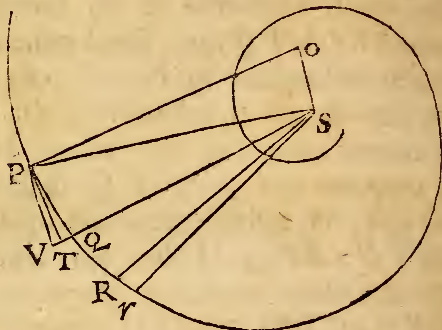
(g) * *Ideoque tempus.* (Neglectâ fractione datâ $\frac{1}{2}$) *est ut* &c.

(h) * *Et corporis velocitas.* (14).

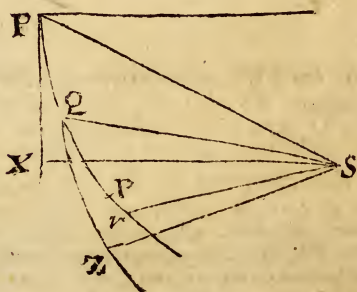
(i) * *Ut velocitates descriptrices ad invicem* (11), quia arcus illi PQ, & QR, æqualibus temporibus describuntur (per Hyp.).

DE MOTU CORPORUM.

& ([k]) ob æquales angulos SPQ, SQr & æquales areas PSQ, QSr, eſt arcus PQ ad arcum Qr ut SQ ad SP. ([l]) Sumantur proportionalium conſequentium differentiæ, & fiet arcus PQ ad arcum Rr ut SQ ad $SP - \sqrt{SP \times SQ}$, ſeu $\frac{1}{2} VQ$. Nam punctis P & Q coeuntibus, ratio ultima $SP - \sqrt{SP \times SQ}$, ad $\frac{1}{2} VQ$ eſt ([m]) æqualitatis.



Quoniam decrementum arcus PQ, ex reſiſtentiâ oriundum, ſive hujus duplum Rr, ([n]) eſt ut reſiſtentia & quadratum temporis conjunctim; ([o]) erit reſiſtentia ut $\frac{Rr}{PQq \times SP}$. Erat autem PQ ad Rr, ut SQ ad



(k) * *Et ob æquales angulos.* Ex centro S ad tangentes P X, Q Z demiſſa ſint perpendicula S X, S Z, & areæ æquales P S Q & Q S r, erunt $\frac{1}{2}$ S X × P Q, & $\frac{1}{2}$ S Z × Q r, ideòque S X ad S Z ut Q r ad P Q; ſed ob angulos rectos ad X & Z, & angulos æquales X P S & Z Q S (per lem. 3.) ſimilia ſunt triangula S X P & S Z Q, & ideò S X : S Z = S P : S Q, quare fit Q r : P Q = S P : S Q.

(l) * *Sumantur proportionalium* &c. Cum enim ſit (per dem.) $PQ : SQ = QR : \sqrt{SP \times SQ}$, & $PQ : SQ = Qr : SP$, erit etiam $Qr : SP = QR : \sqrt{SP \times SQ}$, unde erit $PQ : SQ = Qr - QR$ ſeu $Rr : SP - \sqrt{SP \times SQ}$, & hinc $PQ : Rr = SQ : SP - \sqrt{SP \times SQ}$.

(m) * *Eſt æqualitatis.* Eſt enim $SQ = SP - vQ$, & proindè $SP \times SQ = SP^2 - SP \times vQ$, ideoque extrahendo radicem quadratam (per formulam lib. 1. 551.) fit $\sqrt{SP \times SQ} = SP - \frac{1}{2} vQ - \frac{vQ^2}{8SP}$ — &c., in infinitum; cæteri verò termini poſt ſecundum negligi poſſunt, quia coeuntibus P & Q, evaneſcunt reſpectu vQ, & ideò erit $\sqrt{SP \times SQ} = SP - \frac{1}{2} vQ$, ac proindè $\frac{1}{2} vQ = SP - \sqrt{SP \times SQ}$.

(n) * *Eſt ut reſiſtentia & quadratum temporis conjunctim.* (Per cor. 3. Lem. X. lib. 1.)

(o) *Erit reſiſtentia &c.* Nam tempus eſt ut $PQ \times \sqrt{SP}$ (ex Dem.).

ad $\frac{1}{2}VQ$, & inde $\frac{Rr}{PQq \times SP}$ fit ut $\frac{\frac{1}{2}VQ}{PQ \times SP \times SQ}$ five ut $\frac{\frac{1}{2}OS}{OP \times SPq}$. Namque punctis P & Q coeuntibus, SP & SQ coincidunt, & angulus PVQ fit rectus; & (p) ob similia triangula PVQ, PSO, fit PQ ad $\frac{1}{2}VQ$ ut OP ad $\frac{1}{2}OS$. Est igitur $\frac{OS}{OP \times SPq}$ ut resistentia, (q) id est, in ratione densitatis medii in P & ratione duplicatâ velocitatis conjunctim. Auferatur duplicata ratio velocitatis, nempe ratio $\frac{1}{SP}$, & manebit medii densitas in P ut $\frac{OS}{OP \times SP}$. Detur spiralis, & (r) ob datam rationem OS ad OP, densitas medii in P erit ut $\frac{1}{SP}$. In medio igitur cujus densitas est reciprocè ut distantia à centro SP, corpus gyrari potest in hâc spirali. *Q. E. D.*

Corol.

(p) * *Et ob similia triangula PVQ, PSO*, angulus PSO (per Lemma novissimum) rectus est & ideò æqualis angulo etiam recto PVQ, & prætereà si ex angulis rectis QPO & VPS subducatur communis angulus QPS, remanent æquales VPQ & SPO; Quarè triangula PVQ & PSO sunt similia.

(q) * *Id est in ratione &c.* (per Hyp.)

(r) * *Ob datam rationem OS ad OP.* Datâ spirali datur angulus QPS & hinc in Triangulo SPO datur angulus SPO cum isto QPS rectum faciens, datur etiam rectus PSO (per Lem. 3.) atquè ideò trianguli POS anguli omnes dantur, & proindè datur ratio OS ad OP.

DE MOTU CORPORUM.

Corol. 1. (ſ) Velocitas in loco quovis *P* ea ſemper eſt, quâcum corpus in medio non reſiſtente eâdem vi centripetâ gyrari poteſt in circulo, ad eandem à centro diſtantiam *SP*.

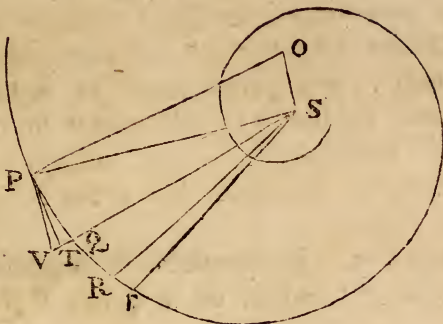
Corol. 2. Medii denſitas, ſi datur diſtantia *SP*, eſt ut $\frac{OS}{OP}$, ſin diſtantia illa non datur, ut $\frac{OS}{OP \times SP}$. Et (t) inde ſpiralis ad quamlibet medii denſitatem aptari poteſt.

Corol. 3. Vis reſiſtentiæ in loco quovis *P*, eſt ad vim centripetam in eodem loco ut $\frac{1}{2}$ *OS* ad *OP*. Nam vires illæ ſunt

(ſ) * *Velocitas in loco quovis P &c.* * Gyretur corpus in medio non reſiſtente in circulo P W radio PS deſcripto, in eoque retineatur vi centripetâ quæ ſit eadem cum illâ qua corpus urgetur in puncto P ſpiralis (vide fig. textûs). Sumatur in radio P S particula PX æqualis TQ, ſive ſpatio quod generatur per vim centripetam quâ corpus retinetur in ſpirali in P, ductâque tangente P Z, e puncto Y ducatur per centrum linea S Y y ad Tangentem uſque, Yy erit ſpatium quod generatur per vim centripetam quâ corpus in circulo retinetur, ſed coeuntibus punctis P & Y, linea yY fit ultimò parallela lineæ PS, ideoque yY fit æqualis particulæ PX, ſive TQ, cum ergo eadem ſit vis centripeta tam in Circulo quam in ſpirali & ſpatia æqualia yY & TQ ab illâ vi centripeta generentur, æquali tempore utrinque generabuntur, unde eodem tempore quo corpus in ſpirali in Q pervenerit eo ipſo tempore perveniet in Y in circulo, velocitas ergo in ſpirali erit ad velocitatem in hoc circulo ut eſt arcus PQ ad arcum PY, ſed ex natura ſpiralis per Lemma III. eſt $PQ = \sqrt{TQ \times 2PS}$, & ex natura circuli eſt $PY = \sqrt{PX \times 2PS}$ & ex conſtructione cum ſit $PX = TQ$ erit $PY = \sqrt{TQ \times 2PS}$ ergo $PQ = PY$, ergo velocitas in loco quovis ſpiralis ea eſt quâcum corpus eâdem vi centripetâ in medio non reſiſtente ad eandem à centro diſtantiam gyrari poteſt.

(t) * *Et inde ſpiralis &c.* * Fingantur duo media diverſæ denſitatis talia tamen ut in ſingulo medio denſitas in locis diverſis ſit reciproce ut diſtantia locorum à centro. Sumptâ verò in utroque æquali à centro diſtantiâ SP, ſit ratio denſitatis prioris medii ad denſitatem poſterioris in eo loco ut *a* ad *b*, ea ratio eadem erit in aliâ quâcumque diſtantiâ à centro, putà in diſtantiâ SX. Nam in utroque medio denſitas in P erit ad denſitatem in X ut $\frac{1}{SP}$ ad $\frac{1}{SX}$; Itaque ſi in priore medio denſitas in P fuerit ut *a*, denſitas in X erit ut $\frac{a \times SP}{SX}$, & ſi in ſecundo medio denſitas in P fuerit ut

LIBER SECUND. SECT. IV. PROP. XV. THEOR. XII.



ſunt ad invicem ut $\frac{1}{2} Rr$, & TQ ſive (u) ut $\frac{\frac{1}{2}VQ \times PQ}{SQ}$ & $\frac{\frac{1}{2}PQq}{SP}$, hoc eſt, ut $\frac{1}{2}VQ$ & PQ, ſeu (x) $\frac{1}{2}OS$ & OP. (y) Datâ igitur ſpirali datur proportio reſiſtentiæ ad vim centripetam, & vice verſâ ex datâ illâ proportione datur ſpiralis.

Corol. 4. Corpus itaque gyrari nequit in hâc ſpirali, (z) niſi ubi vis reſiſtentiæ minor eſt quam dimidium vis centripetæ.

ut b denſitas in X erit ut $\frac{b \times SP}{SX}$, eſt verò $\frac{aSP}{SX}$ ad $\frac{b \times SP}{SX}$ ut a ad b, ergo in his duobus mediis denſitates erunt ubique in datâ ratione a ad b, in æqualibus à centro diſtantiis.

Si itaque data ſit ſpiralis quæ in medio priore deſcribitur, inveniri poterit illa quæ in poſteriore medio deſcribi poſſet; nam ſumpta diſtantia quâvis SP, fiat a ad b ut $\frac{OS}{OP}$ ad $\frac{b \times OS}{a \times OP}$ hæc erit ratio quæ in hâc novâ ſpirali intercedet inter lineas, lineis OS & OP correſpondentes, ſive quia angulus S in Triangulo OSP eſt rectus, hæc erit ratio inter ſinum anguli quem facit linea PS cum perpendiculari ad curvam, & Radium; quo ſinu dato ejuſque angulo, ſpiralis obtinetur ad hanc medii denſitatem aptata.

Ex quibus illuſtratur quod præcedit in hoc ipſo Corollario, ſi duæ ſpirales in diverſis mediis deſcribantur, mediorum denſitates in eadem diſtantia erunt ut $\frac{OS}{OP}$, ſed ſi diſtantiæ a Centro diverſæ ſumantur Ratio inverſa diſtantiarum eſt huic conjungenda, eruntque ideo mediorum denſitates ut $\frac{OS}{OP \times SP}$.

(u) * *Sive ut &c.* Nam (per Dem.) $PQ : Rr = SQ : \frac{1}{2} VQ$, & (per Lem. 3.) $TQ = \frac{PQ^2}{2\,PS}$, & punctis Q & P coeuntibus, eſt $SQ = SP$. 156.

(x) * *Seu $\frac{1}{2}$ OS & OP.* Quia triangula PVQ, PSO ſimilia ſunt (ex Dem.) eſt $\frac{1}{2} VQ : PQ = \frac{1}{2} OS : OP$.

(y) * *Datâ igitur ſpirali.* Nam datâ ſpirali datur ſpecie triangulum PSO (ex Dem.) & indè datur ratio OS ad OP, & viceverſâ datâ hâc ratione, datur ſpecie triangulum rectangulum PSO, & hinc datur angulus POS æqualis angulo QPS quem ſpiralis cum radio continet, ideóque datur ſpiralis. Iis enim datis & aſſumpto ut libet radio SP, dabitur ſubtangens ſpiralis Logarithmicæ, ſeu tangens anguli QPS, & hinc dato angulo quovis PSR, dabitur radius SR cum puncto R in ſpirali (153).

(z) * *Niſi ubi vis reſiſtentiæ minor eſt &c.* Cum enim vis reſiſtentiæ ſit ad vim centripetam ut $\frac{1}{2}$ OS ad OP, & ad dimidium vis centripetæ ut $\frac{1}{2}$ OS ad $\frac{1}{2}$ OP, ſeu ut OS ad OP, ſitque trianguli rectanguli PSO (Lem. 3.) crus OS minus hypothenusâ OP, manifeſtum eſt vim reſiſtentiæ minorem eſſe dimidiâ vi centripetâ.

De Motu Corporum.

tæ. (a) Fiat reſiſtentia æqualis dimidio vis centripetæ, & ſpiralis conveniet cum lineâ rectâ PS, inque hâc rectâ corpus deſcendet ad centrum eâ cum velocitate, quæ ſit ad velocitatem, quâ probavimus in ſuperioribus in caſu parabolæ (theor. x. lib. 1.) deſcenſum in medio non reſiſtente fieri, in (b) ſubduplicatâ ratione unitatis ad numerum binarium. (c) Et tempora deſcenſus hic erunt reciprocè ut velocitates, atque ideo dantur.

Corol. 5. Et quoniam in æqualibus à centro diſtantiis velocitas (d) eadem eſt in ſpirali PQR atque in rectâ SP, & lon-

(a) * *Fiat reſiſtentia æqualis dimidio vis centripetæ &c.* Ideóque O S æqualis O P, & puncto O in infinitum abeunte, fiet O P perpendicularis ad S P, & angulus P O S ipſique æqualis angulus Q P S quem ſpiralis continet cum radio P S evaneſcet, convenietque proindè ſpiralis cum lineâ rectâ P S.

(b) * *In ſubduplicatâ ratione unitatis.* Nam (in theor. X. lib. 1.) corporis in medio non reſiſtente rectâ cadentis velocitas in loco quovis P æqualis eſt velocitati quâ corpus ad diſtantiam dimidiam a centro, ſeu ad diſtantiam $\frac{1}{2}$ S P circulum deſcribere poteſt, & (per cor. 1. hujus) corporis in medio reſiſtente ſpiralem ſeu rectam P S cum quâ ſpiralis convenire ſupponitur deſcribentis velocitas in eodem loco P æqualis eſt velocitati quâcum corpus in medio non reſiſtente gyrari poteſt in circulo ad integram diſtantiam S P. Sed velocitates corporum diverſos circulos deſcribentium (in hypotheſi quod vires centripetæ ſunt reciprocè ut quadrata radiorum) ſunt inter ſe reciprocè in Radiorum ratione ſubduplicatâ (per converſ. cor. 6. prop. 4. lib. 1.) adeóque velocitas in circulo cujus radius S P eſt ad velocitatem in circulo cujus radius $\frac{1}{2}$ S P, ut $\sqrt{\frac{1}{2}}$ ad $\sqrt{1}$, ſive ut 1. ad $\sqrt{2}$, erit ergo velocitas corporis in medio reſiſtente per rectam P S deſcendentis ad velocitatem deſcendentis in medio non reſiſtente per rectam eandem & in eodem loco P exiſtentis, ut 1 ad $\sqrt{2}$. Q. E. D.

* Obſervandum verò quod velocitates initiales utrinque debent eſſe ſecundum Legem quæ in reliquo motu obtinet, hoc eſt velocitas initialis in medio reſiſtente eſſe debet æqualis celeritati quâ corpus ad eamdem à centro diſtantiam in medio non reſiſtente circulum deſcriberet, & velocitas initialis in medio non reſiſtente æqualis eſſe debet velocitati quâ corpus ad dimidiam a centro diſtantiam in medio non reſiſtente in circulo revolveretur.

Quoniam itaque velocitas corporis in medio non reſiſtente deſcendentis datur (per theor. X. lib. 1.) dabitur etiam velocitas in medio reſiſtente deſcendentis.

(c) * *Et tempora deſcensûs, hic erunt reciprocè ut velocitates, atquè ideò dantur.* Nam momenta temporis quibus corpora duo in medio reſiſtente & in eodem non reſiſtente deſcribunt ſpatium idem quam minimum R r, ſunt ut corporum velocitates reciprocè (12) id eſt ut $\sqrt{2}$ & 1 directè (per modo demonſtrata) adeóque in datâ ratione. Quare (per cor. Lem. 4. lib. 1.) tempora tota quibus corpora illa idem ſpatium quodvis P R deſcribunt, ſunt etiam in eâdem datâ ratione $\sqrt{2}$ ad 1, ſeu ut velocitates reciprocè. Cum igitur (per prop. 36. & 37. lib. 1.) detur tempus quo corpus in medio non reſiſtente cadendo ſpatium quodlibet deſcribit, dabitur quoque tempus quo corpus in medio reſiſtente ſpatium quodvis datum cadendo percurrit.

(d) *Eadem eſt in ſpirali.* (Per cor. 1. hujus).

longitudo ſpiralis ad longitudinem rectæ PS eſt in datâ ratione, (e) nempe in ratione OP ad OS; tempus deſcenſus in ſpirali erit ad tempus deſcenſus in rectâ SP in (f) eâdem illâ datâ ratione, proindeque datur.

Corol. 6. Si centro S intervallis duobus quibuſcunque datis deſcribantur duo circuli; & manentibus hiſce circulis, mutetur utcunque angulus quem ſpiralis continet cum radio PS: numerus revolutionum quas corpus intra circulorum circumferentias, pergendo in ſpirali à circumferentiâ ad circumferentiam, complere poteſt, eſt ut (g) $\frac{PS}{OS}$, ſive ut tangens anguli illius quem ſpiralis continet cum radio PS; (h) tempus vero revolutionum earundem ut $\frac{OP}{OS}$, id eſt, ut ſecans anguli ejuſdem, vel etiam reciprocè ut medii denſitas.

Co-

(e) * *Nempè in ratione OP ad OS* (151).

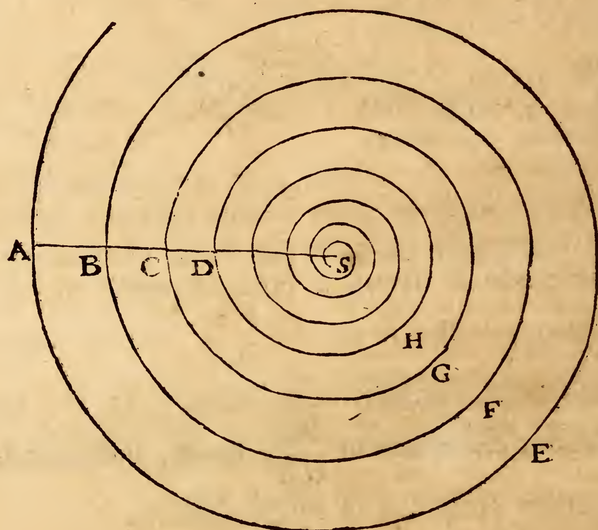
(f) * 157. *In eâdem illâ ratione.* Spatia enim velocitatibus æqualibus & uniformibus deſcripta ſunt ut tempora quibus deſcribuntur; undè ſi ſpiralis PQR & recta PS, diviſæ intelligantur in partes quam minimas totis proportionales, quod fit dum puncta diviſionum in ſpirali & in radio PS à centro S æquidiſtant (152) tempora quibus partes illæ quam minimæ in ſpirali & in rectâ PS homologæ deſcribuntur, erunt ut eædem partes, ſeu in datâ ratione, ſiquidem velocitas in ſpirali & in recta PS in iis punctis à centro æquidiſtantibus ſunt æquales eidem, nempe celeritati corporis circa idem centrum ad eandem diſtantiam in circulo revolventis; ideóque (per cor. lem. 4. lib. 1.) totum tempus deſcenſûs in ſpirali erit ad totum tempus deſcenſûs in rectâ PS per ſpatia homologa in datâ illâ ratione longitudinis nempe ſpiralis ad longitudinem PS, ſeu in ratione OP ad OS. 157.

(g) * *Eſt ut* $\frac{PS}{OS}$, *ſivè ut tangens anguli &c.* (155). Si autem ſinus totus ſit 1, cum ſit OS, ad PS, ut ſinus totus ad tangentem anguli POS, ſeu anguli æqualis QPS, erit tangens illa $\frac{PS}{OS}$.

(h) * *Tempus verò revolutionum earumdem ut* $\frac{OP}{OS}$, *id eſt, ut ſecans &c.* Eſt enim tempus illud revolutionum inter circulos duos datos, ad tempus deſcenſûs per partem datam rectæ PS inter circulos contentam ut longitudo revolutionum illarum ad partem hanc rectæ PS, circulis duobus interceptam (157); ſed mutato utcumquè angulo quem ſpiralis continet cum

De Moto Corporum.

Corol. 7. Si corpus in medio, cujus denſitas eſt reciprocè ut diſtantia locorum à centro, revolutionem in curvâ quâcunque *AEB* circa centrum illud fecerit, & radium primum *AS* in eodem angulo ſecuerit in *B* quo prius in *A*, idque cum velocitate quæ fuerit ad velocitatem ſuam primam in *A* reci-



procè in ſubduplicatâ ratione diſtantiarum à centro (id eſt, ut *AS* ad mediam proportionalem inter *AS* & *BS*) (i) corpus illud perget innumeras conſimiles revolutiones *BFC*, *CGD*, &c. facere, & interſectionibus diſtinguet radium *AS* in partes

cum radio P S longitudo revolutionum inter duos circulos datos comprehenſa eſt ut ſecans anguli illius (152). Quarè cum datum ſit tempus deſcenſûs per partem datam rectæ P S inter circulos datos contentam, erit tempus revolutionum inter circulos ut ſecans anguli quem ſpiralis continet cum radio P S ſeu ut $\frac{OP}{OS}$; Si enim ſinus totus ſit 1 erit O S ad O P ut 1, ad ſecantem anguli P O S ſeu Q P S, & ideò ſecans eſt $\frac{OP}{OS}$. Porrò datâ rectâ P S, denſitas eſt ut $\frac{OP}{OS}$ reciprocè (per cor. 2. hujus). Ergò &c.

(i) * *Corpus illud perget &c.* Centro S & radio dato S A deſcripta intelligatur ſpiralis Logarithmica quæ primâ revolutione abſolutâ, tranſeat per punctum B datum in radio S A (153) & ſpiralis illa ſuis ſemper ſimilibus revolutionibus diſtinguet radium A S in partes A S, B S, C S, D S &c. continuè proportionales (150). Fingamus etiam quod iiſdem poſitis quæ (in-

tes AS, BS, CS, DS, &c. continuè proportionales. Revolutionum vero tempora erunt ut perimetri orbitarum AEB, BFC, CGD, &c. directè, & velocitates in principiis A, B, C, inversè; id est, ut $AS^{\frac{3}{2}}$, $BS^{\frac{3}{2}}$, $CS^{\frac{3}{2}}$. Atque tempus totum, quo corpus perveniet ad centrum, erit ad tempus revolutionis primæ, ut summa omnium continuè proportionalium $AS^{\frac{3}{2}}$, $BS^{\frac{3}{2}}$, $CS^{\frac{3}{2}}$, pergentium in infinitum, ad terminum primum $AS^{\frac{3}{2}}$; id est, ut terminus ille primus $AS^{\frac{3}{2}}$ ad differentiam duorum primorum $AS^{\frac{3}{2}} - BS^{\frac{3}{2}}$, sive ut $\frac{1}{3}AS$ ad AB quam proximè. Unde tempus illud totum expeditè invenitur.

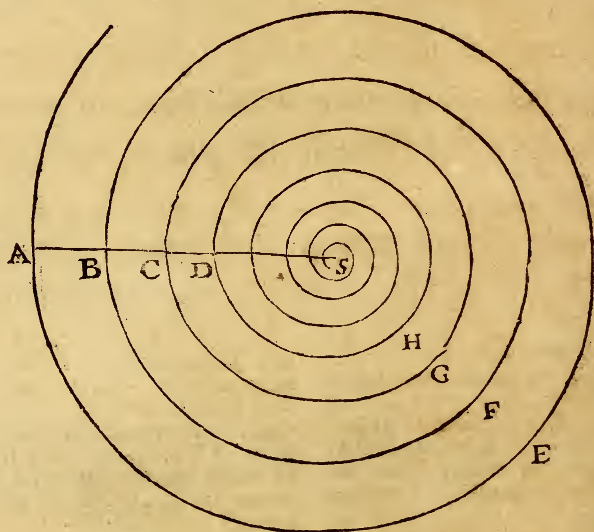
LIBER SECUNDUS. SECT. IV. PROP. XV. THEOR. XII.

Co-

(in prop. 15.) corpus aliquod P in medio justæ densitatis spiralem illam Logarithmicam describat, dum corpus aliud Q in alio medio describit curvam AEBFCS & in iisdem à centro S distantiis densitates duorum mediorum erunt in datâ ratione, cum in utroque medio sit (per hyp. cor. hujus & per prop. 15) densitas in loco A ad densitatem in loco B, ut SB ad SA. Simili modo velocitates corporum P & Q in loco B, erunt ut eorumdem velocitates in loco A, (per prop. 15. & hyp. coroll. hujus) ideóque in datâ ratione; vires autem centripetæ quibus corpora P & Q urgentur, sunt in utroque medio iisdem in locis eædem (per hyp.), & tandem ob angulos datos quos tam spiralis Logarithmica, quam curva AEB continet cum radio AS, directiones motuum in utrâque curvâ pares sunt in locis A & B; Quarè postquam corpus Q primâ revolutione AEB absolutâ, pervenit in B, per quod punctum transit etiam spiralis Logarithmica, eodem modo determinatur ad æmulandum motum corporis P secundam suam revolutionem absolventis, quo determinatum fuerat in loco A ut æmularetur motum corporis ejusdem P primam suam revolutionem perficientis; cum (per dem.) omnia paria sint in locis B & A videlicet mediorum densitates, corporum velocitates, directiones, viresque centripetæ. Quoniam igitur secunda spiralis Logarithmicæ revolutio à puncto B ad punctum C priori à puncto A ad punctum B absolutæ similis est (150), necessum est ut secunda quoque curvæ revolutio BFC priori AEB sit similis; Et simili modo ostendetur revolutiones omnes BFC, CGD &c. & motus corporis Q eas absolventis esse inter se similes. Erunt igitur revolutiones AEB, BFC, CGD &c. ut radii AS, BS, CS &c. id est, continuè proportionales, & ob similitudinem motuum in similibus revolutionibus AEB, BFC &c. si ex centro S ductus intelligatur radius revolutiones illas secans in F, E, G &c. quæ erunt in revolutionibus AEB, BFC &c. loca homologa, erit velocitas corporis Q in loco E ad velocitatem ejus in loco A ut velocitas in F ad velocitatem in B, & proindè velocitas in E ad velocitatem in F, ut velocitas in A ad velocitatem in B, id est, (per hyp. cor. hujus) ut $BS^{\frac{1}{2}}$ ad $AS^{\frac{1}{2}}$; sed tempora quibus spatia homologa quam minima in locis E & F describuntur sunt ut spatia illa directè & velocitates inversè (12); Quarè cum spatia homologa in locis E & F sint ut radii AS & BS, & velocitates ibidem ut $AS^{\frac{1}{2}}$ & $BS^{\frac{1}{2}}$ inversè (ex dem.) tempus quo spatium minimum revolutionis AEB describitur est ad tempus quo describitur spatium homo- 157.

 lo-

Corol. 8. Ex his etiam præter propter colligere licet motus corporum in mediis, quorum densitas aut uniformis est, aut aliam quamcunque legem assignatam observat. Centro *S*, in-



tervallis continuè proportionalibus *SA*, *SB*, *SC*, &c. describe circulos quotcunque, & statue tempus revolutionum inter peri-

logum revolutionis similis BFC ut AS× $AS^{\frac{1}{2}}$, ad BS×$BS^{\frac{1}{2}}$, id est, ut $AS^{\frac{3}{2}}$ ad $BS^{\frac{3}{2}}$, ideóque in datâ ratione. Undè (per cor. lem. 4. lib. 1.) tempus totum quo corpus Q primam suam revolutionem AEB absolvit est ad tempus quo secundam revolutionem BFC, perficit in eâdem ratione $AS^{\frac{3}{2}}$ ad $BS^{\frac{3}{2}}$. Et simili argumento liquet tempora revolutionum BFC, CGD &c. esse inter se ut sunt $BS^{\frac{3}{2}}$, $CS^{\frac{3}{2}}$ &c. Cum igitur revolutionum tempora sicut quantitates $AS^{\frac{3}{2}}$, $BS^{\frac{3}{2}}$, $CS^{\frac{3}{2}}$, $DS^{\frac{3}{2}}$, &c. progressionem geometricam in infinitum decrescentem constituant, tempus totum quo corpus Q, perveniet ad centrum S erit ad tempus revolutionis primæ AEB ut summa omnium continuè proportionalium $AS^{\frac{3}{2}}$, $BS^{\frac{3}{2}}$, $CS^{\frac{3}{2}}$, $DS^{\frac{3}{2}}$ &c. pergentium in infinitum, ad terminum primum $AS^{\frac{3}{2}}$; porrò summa illa est ad terminum primum $AS^{\frac{3}{2}}$ ut hic terminus primus ad differentiam duorum priorum, nempè $AS^{\frac{3}{2}} - BS^{\frac{3}{2}}$. Nam scribatur sic terminorum series, $AS^{\frac{3}{2}} : BS^{\frac{3}{2}} = BS^{\frac{3}{2}} : CS^{\frac{3}{2}}$ $= CS$

perimetros duorum quorumvis ex his circulis, in medio (k) de quo egimus, esse ad tempus revolutionum inter eosdem in medio proposito, ut (l) medii propositi densitas mediocris inter hos circulos ad medii, de quo egimus, densitatem mediocrem inter eosdem quam proximè: Sed & in eadem quoque ratione esse secantem anguli quo spiralis præfinita, in medio de quo egimus, secat radium *A S*, ad secantem anguli quo spiralis nova secat radium eundem in medio proposito: (m) Atque etiam ut sunt eorundem angulorum tangentes ita esse numeros revolutionum omnium inter circulos eosdem duos quam proximè. Si (n) hæc fiant passim inter circulos binos, continuabitur motus per circulos omnes. Atque hoc pacto haud difficulter imaginari possumus quibus modis ac temporibus corpora in medio quocunque regulari gyrari debebunt.

Corol. 9. Et quamvis motus excentrici in spiralibus ad (o) formam ovalium accedentibus peragantur; tamen conci-

$= CS^{\frac{3}{2}} : DS^{\frac{3}{2}}$, &c. in infinitum, & ultimo progressionis termino evanescente, erit summa antecedentium, id est, summa omnium terminorum quæ dicatur *S* ad summam consequentium, seu summam omnium terminorum dempto primo, ut primus ad secundum, hoc est $S : S - AS^{\frac{3}{2}} = AS^{\frac{3}{2}} : BS^{\frac{3}{2}}$; undè habetur dividendo $S : AS^{\frac{3}{2}} = AS^{\frac{3}{2}} : AS^{\frac{3}{2}} - BS^{\frac{3}{2}}$; Est autem $BS = AS - AB$, & ideò $BS^{\frac{3}{2}} = (AS - AB)^{\frac{3}{2}} = AS^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} AS^{\frac{1}{2}} \times AB + \frac{3}{8} \times \frac{AB^2}{AS^{\frac{1}{2}}} - \&c.$ in infinitum (551. lib. 1.). Quapropter si distantia AB minima fuerit, respectu radii AS, fiet $BS^{\frac{3}{2}} = AS^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} AS^{\frac{1}{2}} \times AB$, quam proximè, neglectis nimirum cæteris terminis fere evanescentibus; erit igitur $S : AS^{\frac{3}{2}} = AS^{\frac{3}{2}} : \frac{3}{2} AS^{\frac{1}{2}} \times AB = \frac{2}{3} AS : AB$ quam proximè; Et hinc dato tempore revolutionis primæ A E B, tempus totum quo corpus pervenit ad centrum expeditè invenitur. Sit, exempli causâ, A S ad A B ut 300000 ad 1, & tempus primæ revolutionis = 1, erit tempus totum = 2000000, quam proximè. 157.

(k) * *In medio de quo egimus.* (In prop. 15. & cor. ejus), cujus nimirum densitas est reciproce ut distantia locorum à centro.

(l) * *Ut medii propositi densitas*, (per cor. 6. hujus) supponendo spirales Logarithmicas, per puncta A, B, C, D, in utroque medio descriptas.

(m) * *Atquè etiam ut sunt &c.* Per cor. 6. hujus.

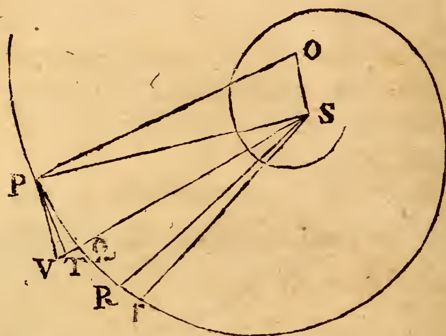
(n) * *Si hæc fiant passim inter circulos binos*, invenietur in medio regulari lex quâ motus continuabitur per circulos omnes, seu, inter circulos omnes, quemadmodum inventis prioribus seriei regularis terminis, cognoscitur lex quâ illa progreditur, *atquè hoc pacto &c.*

(o) * *Ad formam ovalium accedentibus &c.* Sunt enim spirales quarum revo-

cipiendo ſpiralium illarum ſingulas revolutiones iiſdem ab invicem intervallis diſtare, iiſdemque gradibus ad centrum accedere cum ſpirali ſuperius deſcriptâ, (p) intelligemus etiam quomodo motus corporum in hujuſmodi ſpiralibus peragantur.

PROPOSITIO XVI. THEOREMA XIII.

Si medii denſitas in locis ſingulis ſit reciprocè ut diſtantia locorum à centro immobili, ſitque vis centripeta reciprocè ut dignitas quælibet ejuſdem diſtantiæ: dico quod corpus gyrari poteſt in ſpirali quæ radios omnes à centro illo ductos interſecat in angulo dato.



Demonſtratur eâdem methodo cum propoſitione ſuperiore. Nam ſi vis centripeta in P ſit reciprocè ut diſtantiæ SP, dignitas quælibet SP^{n+1} cujus index eſt $n+1$: (q) colligetur ut ſupra, quod tempus, quo corpus deſcribit arcum quemvis PQ; erit ut $PQ \times PS^{\frac{1}{2}n}$; & reſiſtentia in P ut $\frac{Rr}{PQq \times SP^{n}}$, ſive ut $\frac{\overline{1-\frac{1}{2}n} \times VQ}{PQ \times SP^{n} \times SQ}$, ideoque ut $\frac{\overline{1-\frac{1}{2}n} \times OS}{OP \times SP^{n+1}}$, hoc eſt, ob datum $\frac{\overline{1-\frac{1}{2}n} \times OS}{OP}$, reciprocè ut SP^{n+1}. Et propterea, cum velocitas ſit reciprocè ut $SP^{\frac{1}{2}n}$, denſitas in P erit reciprocè ut SP.

Co-

volutiones ſingulæ ferè concentricæ ſunt & ad formam circulorum accedunt; aliarum revolutiones accedunt ad formam ovalium centro ſpiralis pro ellipſeos vel ovalis foco accepto.

(p) * *Intelligemus etiam* (ut in cor. 8°.) *quomodò &c.*

(q) * *Colligetur ut ſuprà &c.* Quæcumque enim ſit vis centripeta, illa eſt ad vim reſiſtentiæ ut TQ ad $\frac{1}{2}$ Rr (per dem. prop. 15). Quoniam igitur vis centripeta quâ corpus urgetur in P, eſt reciprocè ut SP^{n+1}, & (per cor. Lem. X. lib. 1.) lineola TQ quæ vi illâ generatur, eſt in ratione compoſitâ ex ratione hujus vis & ratione duplicatâ temporis quo arcus PQ deſcribitur; erit $TQ \times SP^{n+1}$, id

Corol. 1. (r) Resistentia est ad vim centripetam ut $1-\frac{1}{2}n \times OS$ ad OP. LIBER SECUND. SECT. IV. PROP. XVI. THEOR. XIII.

Corol. 2. Si vis centripeta sit reciprocè ut *SP cub.* (s) erit $1-\frac{1}{2}n=0$; ideoque resistentia & densitas medii nulla erit, ut in propositione nonâ libri primi.

Corol. 3. Si vis centripeta sit reciprocè ut dignitas aliqua radii *SP* cujus index est major numero 3, resistentia affirmativa (t) in negativam mutabitur.

Scho-

id est, (per Lem. 3.) $\frac{1}{2}PQ^2 \times SP^n$, in ratione duplicatâ temporis, ideóque tempus est ut $PQ \times SP^{\frac{n}{2}}$, & corporis velocitas quâ arcus PQ illo tempore describitur ut $\frac{PQ}{PQ\times SP^{\frac{n}{2}}}$, seu $\frac{1}{SP^{\frac{n}{2}}}$; & simili argumento velocitas quâ arcus QR describitur est ut $\frac{1}{SQ^{\frac{n}{2}}}$; sunt autem arcus illi PQ & QR ut velocitates descriptrices ad invicem, id est, in ratione $SQ^{\frac{n}{2}}$ ad $SP^{\frac{n}{2}}$, & (per dem. prop. 15.) arcus Qr, est ad arcum PQ ut SP ad SQ; Quarè (per compositionem rationum & ex æquo) $Qr : QR = SP\times SQ^{\frac{n}{2}} : SQ\times SP^{\frac{n}{2}} = SQ^{\frac{1}{2}n-1} : SP^{\frac{1}{2}-1}$, & sumptis terminorum differentiis $Qr : Rr = SQ^{\frac{1}{2}n-1} : SQ^{\frac{1}{2}n-1} - SP^{\frac{n}{2}-1}$. Quia verò $SP = SQ + VQ$, ideòque (549 lib. 1.) $SP^{\frac{1}{2}n-1} = SQ^{\frac{1}{2}n-1} + \frac{1}{2}\overline{n-1}\times VQ\times SQ^{\frac{1}{2}n-2}$ + &c., neglectis reliquis terminis respectu priorum evanescentibus, erit $SQ^{\frac{1}{2}n-1} - SP^{\frac{1}{2}n-1} = (1-\frac{1}{2}n)\times VQ\times SQ^{\frac{1}{2}n-2}$, atque adeò $Qr : Rr = SQ : (1-\frac{1}{2}n)VQ$. Erat autem $PQ : Qr = SQ : SP$; undè (ex æquo) fit $PQ : Rr = SQ^2 : (1-\frac{1}{2}n)VQ\times SP$, & hinc $Rr = (1-\frac{1}{2}n)\frac{VQ\times SP\times PQ}{SQ^2} = \frac{(1-\frac{1}{2}n)\times VQ\times PQ}{SQ}$, ob $SP=SQ$, ubi puncta Q & P coeunt. Quoniam decrementum arcûs PQ ex resistentiâ oriundum, sivè hujus duplum Rr, est ut resistentia & quadratum temporis conjunctim, erit resistentia ut $\frac{Rr}{PQ^2\times SP^n}$, id est, ut $\frac{(1-\frac{1}{2}n)VQ}{PQ\times SP^n\times SQ}$. Sivè ut $\frac{(1-\frac{1}{2}n)OS}{OP\times SP^{n+1}}$ (quia $VQ:PQ=OS:OP$ ex dem. prop. 15.) hoc est, ob datum $\frac{(1-\frac{1}{2}n)\times OS}{OP}$ ut $\frac{1}{SP^{n+1}}$. Et proptereà cum velocitas (ex dem.) sit ut $\frac{1}{SP^{\frac{1}{2}n}}$, si ex resistentiâ auferatur duplicata velocitatis ratio $\frac{1}{SP^n}$, manebit medii densitas in P, ut $\frac{1}{SP}$, seu reciprocè ut SP. 157.

(r) * *Resistentia est ad vim centripetam.* Nam vires illæ sunt ad invicem ut $\frac{1}{2}Rr$ & TQ, sivè ut $\frac{(1-\frac{1}{2}n)VQ\times PQ}{2SQ}$ & $\frac{PQ^2}{2SP}$, hoc est, ut $(1-\frac{1}{2}n)VQ$ & PQ, seu $(1-\frac{1}{2}n)OS$ & OP.

(s) * *Erit* $1-\frac{1}{2}n=0$. Cum enim (per hyp.) sit $n+1=3$, erit $n=2$, $\frac{1}{2}n=1$ & $1-\frac{1}{2}n=0$.

(t) * *In negativam mutabitur.* Tum enim $n+1$, erit numerus ternario major, & ideò n binario major, & hinc $1-\frac{1}{2}n$, numerus negativus.

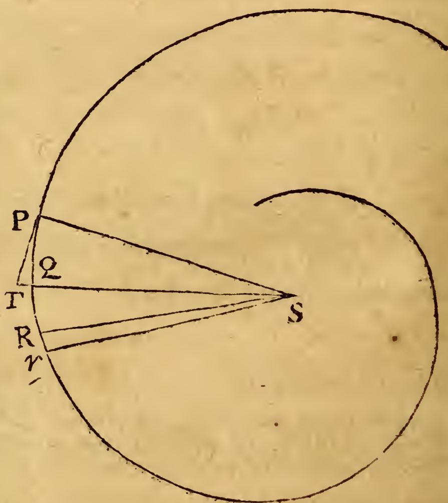
Co-

Scholium.

Cæterum hæc propoſitio & ſuperiores, quæ ad media inæqualiter denſa ſpectant, intelligendæ ſunt de motu corporum adeo parvorum, ut medii ex uno corporis latere major denſitas quam ex altero non conſideranda veniat. Reſiſtentiam quoque cæteris paribus denſitati proportionalem eſſe ſuppono. Unde in mediis, quorum vis reſiſtendi non eſt ut denſitas, debet denſitas eo uſque augeri vel diminui, ut reſiſtentiæ vel tollatur exceſſus vel defectus ſuppleatur.

PROPOSITIO XVII. PROBLEMA VI.

Invenire & vim centripetam & medii reſiſtentiam, quâ corpus in datâ ſpirali, datâ velocitatis lege, revolvi poteſt.



Sit ſpiralis illa *P Q R*. Ex velocitate, quâ corpus percurrit arcum quam minimum *PQ*, dabitur tempus, & ex altitudine *TQ*, quæ eſt ut vis centripeta & quadratum temporis, dabitur vis. Deinde ex arearum, æqualibus temporum particulis confectarum *P S Q* & *Q S R*, differentia

Coroll. 4. Medii denſitas, ſi datur diſtantia SP, eſt ut $\frac{(1-\frac{1}{2}n)\,OS}{OP}$; ſin diſtantia illa non datur ut $\frac{(1-\frac{1}{2}n)\,OS}{OP \times SP}$, ſeu ob datum numerum $1-\frac{1}{2}n$, ut $\frac{OS}{OP}$, vel $\frac{OS}{OP \times SP}$.

Coroll. 5. Quoniam (per cor. 1. prop. 15.) mutato utcumque ſpiralis angulo, ita ut

RSr, dabitur corporis retardatio, & ex retardatione invenietur resistentia ac (u) densitas medii.

LIBER SECUND. SECT. IV. PROP. XVIII. PROB. V.

PROPOSITIO XVIII. PROBLEMA V.

Datâ lege vis centripetæ, invenire medii densitatem in locis singulis, quâ corpus datam spiralem describet.

Ex vi centripetâ invenienda est velocitas in locis singulis, deinde ex velocitatis retardatione quærenda medii densitas; ut (x) in propositione superiore.

Methodum vero tractandi hæc problemata aperui in hujus propositione decimâ, & lemmate secundo; & lectorem in hujusmodi perplexis disquisitionibus diutius detinere nolo. Addenda jam sunt aliqua de viribus corporum ad progrediendum, deque densitate & resistentiâ mediorum, in quibus motus hactenus expositi & his affines peraguntur.

ut etiam evanescat, & spiralis cum radio conveniat, velocitas corporis in loco quovis P ea semper est quâcum corpus in medio non resistente eâdem vi centripetâ gyrari potest in circulo ad eandem à centro distantiam SP (per Const. 1. Cor. 7. Prop. IV. lib. 1.) liquet (per cor. 5. prop. 15. & 152.) tempora descensûs a puncto dato P ad centrum usquè S, fore etiam (in hyp. prop. 16.) ut spiralium variarum longitudines; quod observavit Joannes Bernoullius in actis eruditorum Lipf. an. 1713. ubi hanc materiam eleganter tractat.

(u) * *Ac densitas medii.* Sit, exempli causâ, curva PQR spiralis Logarithmica & velocitas in loco quovis P ut $\frac{1}{SP^m}$, erit tempus quo describitur arcus PQ, ut $PQ \times SP^m$ (12); vis autem centripeta quæ (per cor. 4. Lem. X. lib. 1.) est ut Lineola TQ directè & quadratum temporis inversè erit ut $\frac{TQ}{PQ^2 \times SP^{2m}}$, id est, (per Lem. 3. hujus) ut $\frac{1}{SP^{2m+1}}$. Inventis tempore & velocitate, invenietur (ut in not. ad prop. 16.) resistentia ut $\frac{(1-m)VQ}{SQ \times PQ \times SP^{2m}}$, sivè ut $\frac{(1-m)OS}{OP \times SP^{2m+1}}$, & auferendo duplicatam velocitatis rationem $\frac{1}{SP^{2m}}$ erit densitas ut $\frac{(1-m)OS}{OP \times SP}$, sive ut $\frac{1}{SP}$. 157.

(x) * *Ut in propositione superiore.* Sit vis centripeta in P ut $\frac{1}{SP^{n+1}}$ & quoniam TQ est ut vis centripeta & quadratum temporis quo describitur arcus PQ, erit $TQ \times SP^{n+1}$, id est, (per Lem. 3.) $PQ^2 \times SP^n$ ut quadratum temporis, ideoque tempus ut $PQ \times SP^{\frac{1}{2}n}$, & corporis velocitas quâ arcum PQ illo tempore describit ut $\frac{1}{SP^{\frac{1}{2}n}}$ (11); determinatis autem tempore & velocitate, invenietur resistentia & densitas ut in notâ superiore.

PROBLEMA.

Vis centripeta tendens ad datum punctum C sit in loco quovis P ut distantiæ CP dignitas CP^n reciprocè, & medii resistentia sit ut medii densitas & velocitatis dignitas quælibet conjunctim, requiritur tum medii densitas in locis singulis quæ faciat ut corpus in datâ quâvis lineâ curvâ V, P, Z moveatur, tum corporis velocitas & medii resistentia in locis singulis.

158. Dicantur vis centripeta in loco P, g, resistentia r, medii densitas k, velocitas corporis v, distantia P C, y, radius P O circuli curvam osculantis in P, R, arcus V P s; perpendiculum CT in tangentem PT ductum p, & a, b, n, m, quantitates datæ, erit (per hyp.) $g = \frac{a}{y^n}$, & $r = \frac{kv^m}{b}$, sed est semper (27) $vv = \frac{Rpg}{y} = \frac{aRp}{y^{n+1}} = \frac{apdy}{y^n dp}$. Velocitas igitur per alterutram ex his æquationibus dabitur. Porrò (26) $r = \frac{-vdv - gdy}{ds} = \frac{-vdv}{ds} - \frac{ady}{y^n ds}$, vel etiam (ibid.) $\pm r = \frac{-v\,dv \times \sqrt{yy-pp} - g\,dy \times \sqrt{yy-pp}}{ydy} = \frac{-vdv \times \sqrt{yy-pp}}{ydy} - \frac{a\sqrt{yy-pp}}{y^{n+1}}$. Quarè si in alterutrâ harum æquationum loco vdv scribatur ipsius valor, qui reperitur capiendo fluxionem æquationis $v.v = \frac{aRp}{y^{n+1}} = \frac{apdy}{y^n dp}$, obtinebitur resistentia r, seu $\frac{kv^m}{b}$, ejusque valore diviso per $\frac{v^m}{b}$ quod datum est inventâ velocitate v, dabitur medii densitas k. Q. E. I.

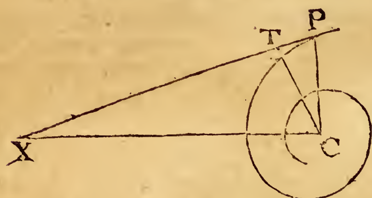
159. Exemplo sit spiralis Logarithmica. In illâ ob datum angulum TPC datur ratio PC ad CT seu y ad p; sit ergò $c : a = y : p$, & ideò $p = \frac{ay}{c}$; atque $dp = \frac{ady}{c}$, & erit $vv = \frac{apdy}{y^n dp} = \frac{pc}{y^n} = \frac{a}{y^{n-1}}$. Ex his verò habetur $\sqrt{yy-pp} = \frac{y\sqrt{cc-aa}}{c}$, & $vdv = \frac{(1-n)ady}{2y^n}$; undè pro corporis descensu invenitur $r = \frac{(3-n)a\sqrt{cc-aa}}{2cy^n}$; & pro ascensu $r = \frac{(n-3)a\sqrt{cc-aa}}{2cy^n}$, ideoque resistentia est reciprocè ut y^n. Cum autem (per hyp.) sit $r = \frac{kv^m}{b} = \frac{ka^{\frac{m}{2}}}{by^{\frac{mn-m}{2}}}$, erit densitas k ut $ry^{\frac{mn-m}{2}}$, seu ut $\frac{y^{\frac{mn-m}{2}}}{y^n} = y^{\frac{mn-m-2n}{2}}$, & hinc si ponatur $m=2$, erit densitas k, ut y^{-1}, seu ut $\frac{1}{y}$, prorsus ut (in prop. 16.) demonstratum est.

160. Coroll. 1. Per superiores æquationes (158) ex datâ corporis velocitate invenitur tum vis centripet, atum resistentia.

LIBER SECUND. SECT. IV. PROP. XVIII. PROB. V.

161.

tia & medii densitas. Est enim $g=\frac{vvy}{Rp}=\frac{vvdp}{pdy}$; undè habetur vis centripeta g; datis autem vi centripetâ & celeritate, invenitur tum resistentia r, tum medii densitas k, ut supra (158).



161. Exemplum sit in spirali hyperbolicâ cujus hæc est proprietas ut si per centrum C erigatur ad radium CP, perpendicularis CX tangenti PX per P ductæ occurrens in X sit subtangens illa CX constans. Velocitas sit ut tangens PX, & resistentia r ut densitas medii & quadratum velocitatis conjunctim, hoc est $r=\frac{kv^2}{b}$, dicaturque CX, c, & ideò $PX=\sqrt{yy+cc}$, atquè (per hyp.) $v=\frac{e\sqrt{yy+cc}}{c}$, & e, quantitas data. Erit ob triangula CPT, XPC similia, $PX(\sqrt{yy+cc}):CX(c)=PC(y):CT(p)$, & ideò $p=\frac{cy}{\sqrt{yy+cc}}$, $dp=\frac{c^3dy}{yy+cc^{\frac{3}{2}}}$, & $\sqrt{yy-pp}=\frac{yy}{\sqrt{yy+cc}}$. Quare fiet (160) $g=\frac{vvdp}{pdy}=\frac{e^2}{y}$; id est, vis centripeta ut distantia PC reciprocè. Quia verò $vv=\frac{ee}{cc}\times(yy+cc)$ erit $vdv=\frac{eeydy}{cc}$ & propterea pro corporis descensu $r=\frac{vdv\sqrt{yy-pp}}{ydy}+\frac{g\sqrt{yy-pp}}{y}=\frac{eeyy}{cc\sqrt{yy+cc}}+\frac{e^2}{\sqrt{yy+cc}}=\frac{e^2\times yy+cc}{cc\sqrt{yy+cc}}$ $=\frac{e^2}{c^2}\times\sqrt{yy+cc}$, adeóque resistentia ut tangens PX, seu ut velocitas. Cum igitur sit $r=kv^2=\frac{ke^2}{cc}\times(yy+cc)=\frac{e^2}{cc}\times\sqrt{yy+cc}$, erit densitas medii $k=\frac{1}{\sqrt{yy+cc}}$, seu reciprocè ut tangens PX sivè reciprocè ut velocitas.

162. Coroll. 2. Datâ medii densitate & concessis figurarum quadraturis, datur vis centripeta & corporis velocitas. Est enim (27. & 160.) $vdv+\frac{vvdp}{p}=-rds=\frac{kv^m ds}{b}$ (158) & dividendo per v^m, & multiplicando per p^{2-m}, fit $p^{2-m}v^{1-m}dv+v^{2-m}p^{1-m}dp=\frac{-kp^{2-m}ds}{b}$, & sumptis utrinque fluentibus habetur, $\frac{1}{2-m}\times p^{2-m}\times v^{2-m}=-S.\frac{kp^{2-m}ds}{b}$, ideòque $v^{2-m}=(m-2)\frac{S.kp^{2-m}ds}{b\times p^{2-m}}$. Quare si densitas medii k, sit ut functio quævis distantiæ PC à centro C, inveniri poterit fluens $S.kp^{2-m}ds$ aut algebraicè aut per figurarum quadraturas, & loco ds, scribi potest $\pm\frac{ydy}{\sqrt{yy-pp}}$ (26). Inventâ autem velocitate v, obtinetur vis centripeta g per æquationem $g=\frac{vvdp}{pdy}=\frac{vvy}{Rp}$ (160).

163. Cor. 3. Si in superiori corollario sit $m=2$, id est, resistentia ut densitas & quadratum velocitatis conjunctim, erit $2-m=0$, & æquatio $p^{2-m}v^{1-m}dv+v^{2-m}p^{1-m}dp=-\frac{kp^{2-m}ds}{b}$, in hanc mutabitur $\frac{dv}{v}+\frac{dp}{p}=-\frac{kds}{b}$; unde sumptis fluentibus, habetur $L.v+L.p=-S.\frac{kds}{b}$, & $L.v=-S.\frac{kds}{b}-L.p$, ex quâ æquatione invenitur v, & hinc habetur g ut suprà.

DE MOTU CORPORUM.

164. Cor. 4. Sit in Hypothesi coroll. 3. densitas medii k uniformis, velocitas corporis in loco dato $v=c$, & perpendiculum p in eodem loco $=q$ datæ, erit $L.v=-\frac{ks}{b}-L.p+Q$, & quia in loco V, fit $s=0$, $v=c$, $p=q$, erit $Q=L.c+L.q=L.cq$. Et hinc $L.v=L\frac{cq}{p}-\frac{ks}{p}$. Ponatur $L.h=1$, ut fit $L.v=L.\frac{cq}{p}-\frac{ks}{b}\times L.h=L.\frac{cq}{ph^{\frac{ks}{b}}}$. Undè deducitur $v=\frac{cq}{ph^{\frac{ks}{b}}}$, $vv=\frac{c^2q^2}{p^2h^{\frac{2ks}{b}}}$, & hinc $g=\frac{vvy}{Rp}=\frac{c^2q^2y}{Rp^3h^{\frac{2ks}{b}}}$, vel $g=\frac{vvdp}{pdy}=\frac{c^2q^2dp}{p^3h^{\frac{2ks}{b}}dy}$.

165. Cor. 5. In his autem omnibus inveniri potest tempus per æquationem $dt=\frac{ds}{v}$, seu $t=S.\frac{ds}{v}$ (13).

166. Cor. 6. Datâ vi centripetâ & resistentiâ ac densitate medii, inveniri potest æquatio ad trajectoriam Z P V quam corpus projectile circà centrum virium C describit. Sit, exempli gratiâ, medium uniforme, resistentia ut quadratum velocitatis & vis centripeta $=\frac{a}{y^n}$ & (164) erit $\frac{a}{y^n}=\frac{c^2q^2dp}{p^3h^{\frac{2ks}{b}}dy}$, ideoque $h^{\frac{2ks}{b}}=\frac{c^2q^2y^ndp}{ap^3dy}$, & $L.h^{\frac{2ks}{3}}=\frac{2ks}{b}=L.\frac{c^2q^2y^ndp}{ap^3dy}$, capiantur utrinque fluxiones, factâ dy constante, & fiet (26) $\frac{2kds}{b}\left(=\pm\frac{2kydy}{b\sqrt{yy-pp}}\right)=\frac{ndy}{y}+\frac{ddp}{dp}-\frac{3dp}{p}$ (Notum supponimus (40) quantitatis cujusvis Logarithmicæ $L.z$ fluxionem esse $\frac{dz}{z}$). Hinc verò habetur $\frac{2ks}{b}=L.y+L.dp-3L.p-\frac{L.dy}{Q}$, ubi $\frac{dy}{Q}$, est quantitas constans, ideoque fit $\frac{2ks}{b}=L.y^n+L\frac{Qdp}{dy}-L.p^3=L.\frac{Qy^ndp}{p^3dy}$, & hinc $h^{\frac{2ks}{b}}=\frac{Qy^ndp}{p^3dy}$, æquatio ad trajectoriam.

167. Schol. Si curva V P Z sit sectio conica cujus umbilicus C axis major c semiaxis minor e, erit (276. lib. 1.) pro ellipsi $pp=\frac{eey}{c-y}$; pro hyperbolâ $pp=\frac{eey}{c+y}$, & pro parabolâ, si latus rectum axis dicatur $4e$, erit (per Lem. 14. lib. 1.) $pp=ey$. Undè facile est superioris problematis solutiones ad sectiones conicas transferre. Sit V P Z parabola, vis centripeta $g=\frac{a}{y^n}$, resistentia $r=\frac{kv^2}{b}$, & quæratur tum corporis velocitas tum resistentia & medii densitas in loco quovis P. Quoniam $pp=ey$, erit $2pdp=edy$, $dp=\frac{edy}{2p}$, $\frac{p}{dp}=\frac{2pp}{edy}=\frac{2y}{dy}$; undè fit (158) $vv=\frac{apdy}{y^ndp}=\frac{2a}{y^{n-1}}$; Hinc verò habetur $vdv=\frac{(1-n)ady}{y^n}$, atquè ideò pro corporis descensu (158) $r=\frac{vdv\sqrt{yy-pp}}{ydy}+\frac{a\sqrt{yy-pp}}{y^{n+1}}=\frac{(2a-na)\sqrt{yy-ey}}{y^{n+1}}$; & pro ascensu $r=\frac{(na-2a)\sqrt{yy-ey}}{y^{n+1}}$; resistentia igitur est semper ut $\frac{PT}{PC^{n+1}}$; porrò est (per hyp.) $r=\frac{kv^2}{b}=\frac{2ak}{by^{n+1}}=(2a-na)\frac{\sqrt{yy-ey}}{y^{n+1}}$, vel $=(na-2a)\frac{\sqrt{yy-ey}}{y^{n+1}}$; Quarè erit medii densitas k, ut $\frac{\sqrt{yy-ey}}{y^2}$, seu ut $\frac{PT}{PC^2}$. Et simili modo in ellipsi & hyperbolâ invenitur medii densitas ut $\frac{PT}{PC^2}$. At in circulo fit $PT=0$, ideóque medii densitas & resistentia nulla.

Eva-

SECTIO V.

De densitate & compressione fluidorum, deque hydrostaticâ. (†)

Definitio Fluidi.

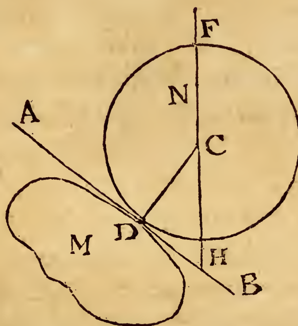
Fluidum est corpus omne, cujus partes cedunt vi cuicunque illatæ, & cedendo facile moventur inter se.

Evanescit quoque resistentia, si $n=2$, id est, si vis centripeta sit ut quadratum distantiæ reciprocè, quo casu sectiones conicæ, ut lib. 1°. demonstratum est, in medio non resistente describuntur. Si n est numerus binario minor, sectiones conicæ per descensum describi possunt; per ascensum verò si n, binario major. Tandem ubi est $n=1$, hoc est, vis centripeta distantiæ PC, reciprocè proportionalis, velocitas in parabolâ sicut & in spirali Logarithmicâ uniformis est.

(†) 168. *Hydrostatica* est scientia pressionum quas fluida vel ipsorum partes in se mutuò vel in corpora solida exercent.

169. *Fluidum homogeneum* dicitur, cujus densitas est uniformis, adeò ut nimirum æqualis materiæ quantitas sub voluminibus æqualibus ubique per totam fluidi massam contineatur, *fluidum heterogeneum* appellatur cujus densitas uniformis non est.

170. *Gravitas specifica* corporis est ratio ponderis ejusdem ad volumen; ità ut corpora ejusdem gravitatis specificæ dicantur quæ sub æqualibus voluminibus æquale pondus habent; specificè graviora vel leviora quæ sub æqualibus voluminibus majus vel minus pondus continet; Quarè cum densitas sit ratio massæ ad volumen corporis (2. lib. 1.) ubi pondera sunt ut massæ, gravitates specificæ sunt ut densitates.

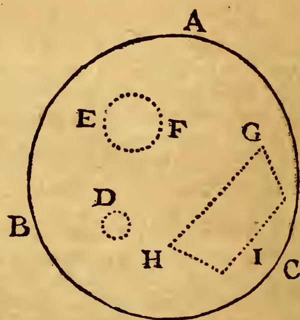


171. Lemma. *Pressiones quas corpora quævis in se mutuò exercent, fiunt juxtà directiones communi plano contingenti perpendiculares, & per punctum contingentiæ eorumdem corporum transeunt.* 171.

Corpus N vi quâlibet secundum directionem FC urgeatur, tangaturque in D à corpore M; producatur FC ut plano AB quod utrumque corpus contingit in D occurrat in H, ductâ per D rectâ DC ad planum AB perpendiculari, vis quâ corpus N urgetur, exponatur per lineam CH, & hæc (per leg. mot. cor. 2.) resolvi poterit in vires æquipollentes CD & DH. Sed corpus M minimè premitur vi DH secundum directionem plani contactûs agente; quarè solâ vi CD ad planum AB normali & per punctum contactûs D transeunte premitur. Q. E. D.

PROPOSITIO XIX. THEOREMA XIV.

Fluidi homogenei & immoti, quod in vase quocunque immoto clauditur & undique comprimitur, partes omnes (sepositâ condensationis, gravitatis, & virium omnium centripetarum consideratione) æqualiter premuntur undique, & sine omni motu à pressione illâ orto permanent in locis suis.



Cas. 1. In vase sphærico *ABC* claudatur & uniformiter comprimatur fluidum undique: dico quod ejusdem pars nulla ex illâ pressione movebitur. Nam si pars aliqua *D* moveatur, necesse est ut omnes hujusmodi partes ad eandem à centro distantiam undique consistentes, simili motu simul moveantur; atque hoc ideo quia similis & æqualis est omnium pressio, & motus omnis exclusus supponitur, nisi qui à pressione illâ oriatur. Atqui non possunt omnes ad centrum propius accedere, nisi fluidum ad centrum condensetur; contra hypothesin. Non possunt longiùs ab eo recedere, nisi fluidum ad circumferentiam condensetur; etiam contra hypothesin. Non possunt servatâ suâ à centro distantiâ moveri in plagam quamcunque, quia pari ratione movebuntur in plagam contrariam; in plagas autem contrarias non potest pars eadem, eodem tempore, moveri. Ergo fluidi pars nulla de loco suo movebitur. *Q. E. D.*

Cas. 2. Dico jam, quod fluidi hujus partes omnes sphæricæ æqualiter premuntur undique. Sit enim *EF* pars sphærica fluidi, & si hæc undique non premitur æqualiter, augeatur pressio minor, usque dum ipsa undique permatur æqualiter; & partes ejus, per casum primum, permanebunt in locis suis. Sed ante auctam pressionem permanebant in locis suis, per casum eundem primum, & additione pressionis novæ movebuntur de locis suis,

per

per definitionem fluidi. Quæ duo repugnant. Ergo falsò dicebatur quod sphæra $E F$ non undique premebatur æqualiter. *Q. E. D.* LIBER SECUND. SECT. V. PROP. XIX. THEOR. XIV.

Cas. 3. Dico prætcrea quod diversarum partium sphæricarum æqualis sit pressio. Nam partes sphæricæ contiguæ se mutuo premunt æqualiter in puncto contactus, per motus legem III. Sed &, per casum secundum, undique premuntur eâdem vi. Partes igitur duæ quævis sphæricæ non contiguæ, ([a]) quia pars sphærica intermedia tangere potest utramque, prementur eâdem vi. *Q. E. D.*

Cas. 4. Dico jam quod fluidi partes omnes ubique premuntur æqualiter. Nam partes duæ quævis tangi possunt à partibus sphæricis in punctis quibuscunque, & ibi partes illas sphæricas æqualiter premunt, per casum 3. & vicissim ab illis æqualiter premuntur, per motus legem tertiam. *Q. E. D.*

Cas. 5. Cum igitur fluidi pars quælibet GHI in fluido reliquo tanquam in vase claudatur, & undique prematur æqualiter, partes autem ejus se mutuo æqualiter premant & quiescant inter se; manifestum est quod fluidi cujuscunque GHI, quod undique premitur æqualiter, partes omnes se mutuo premunt æqualiter, & quiescunt inter se. *Q. E. D.*

Cas. 6. Igitur si fluidum illud in vase non rigido claudatur, & undique non prematur æqualiter; cedet idem pressioni fortiori, per definitionem fluiditatis.

Cas. 7. Ideoque in vase rigido fluidum non sustinebit pressionem fortiorem ex uno latere quàm ex alio, sed eidem cedet, idque in momento temporis, quia latus vasis rigidum non persequitur liquorem cedentem. Cedendo autem urgebit latus oppositum, & sic pressio undique ad æqualitatem verget. Et quoniam fluidum, quam primum à parte magis pressâ recedere conatur, inhibetur per resistentiam vasis ad latus oppositum; redu-

(a) * *Quia pars sphærica intermedia tangere potest utramque.* Nam pars illa intermedia duas alias partes sphæricas in punctis contactûs premet atque ab illis premetur æqualiter, (ex dem.). 171.

DE MOTU CORPORUM. reducetur preſſio undique ad æqualitatem, in momento temporis, ſine motu locali: & ſubinde partes fluidi, per caſum quintum, ſe mutuò prement æqualiter, & quieſcent inter ſe. *Q. E. D.*

Corol. Unde nec motus partium fluidi inter ſe, per preſſionem fluido ubivis in externâ ſuperficie illatam, mutari poſſunt, niſi quâtenus aut figura ſuperficiei alicubi mutatur, aut omnes fluidi partes intenſiùs vel remiſſiùs ſeſe premendo difficiliùs vel faciliùs labuntur inter ſe.

PROPOSITIO XX. THEOREMA XV.

Si (b) *fluidi ſphærici, & in æqualibus à centro diſtantiis homogenei, fundo ſphærico concentrico incumbentis partes ſingulæ verſus centrum totius gravitent; ſuſtinet fundum pondus cylindri, cujus baſis æqualis eſt ſuperficiei fundi, & altitudo eadem quæ fluidi incumbentis.*



Sit *DHM* ſuperficies fundi, & *AEI* ſuperficies ſuperior fluidi. Superficiebus ſphæricis innumeris *BFK*, *CGL* diſtinguatur fluidum in orbes concentricos æqualiter craſſos; & concipe vim gravitatis agere ſolummodo in ſuperficiem ſuperiorem orbis cujuſque, & æquales eſſe actiones in æquales partes ſuperficierum omnium. Premitur ergo ſuperficies ſuprema *AE* vi ſimplici gravitatis propriæ, quâ & omnes

(b) 172. *Si fluidi ſphærici &c.* Fluidi quieſcentis ſuperficies ad gravitatis directionem perpendicularis eſt ubique, & ideo ſi vis gravitatis ad centrum unum dirigatur, ſphærica eſt. Si enim ſuperficiei fluidi pars aliqua ad gravitatis directionem inclinata ſit, reſolvatur vis gravitatis in duas vires quarum una directionem habeat ſuperficiei fluidi perpendicularem, altera parallelam; & (ex definitione) fluidum ſecundum hanc directionem movebitur, contra hyp. Erit igitur pars quælibet

nes orbis ſupremi partes & ſuperficies ſecunda *BFK* (per prop. XIX.) pro (c) menſurâ ſuâ æqualiter premuntur. Premitur præterea ſuperficies ſecunda *BFK* vi propriæ gravitatis, quæ addita vi priori facit preſſionem duplam. Hâc preſſione, pro menſurâ ſuâ, & inſuper vi propriæ gravitatis, id eſt, preſſione triplâ urgetur ſuperficies tertia *CGL*. Et ſimiliter preſſione quadruplâ urgetur ſuperficies quarta, quintuplâ quintâ, & ſic deinceps. Preſſio igitur quâ ſuperficies unaquæque urgetur, non eſt ut quantitas ſolida fluidi incumbentis, ſed ut numerus orbium ad uſque ſummitatem fluidi; & æquatur gravitati orbis infimi multiplicatæ per numerum orbium: hoc eſt, gravitati ſolidi cujus ultima ratio ad cylindrum præfinitum (ſi modo orbium augeatur numerus & minuatur craſſitudo in infinitum, ſic ut actio gravitatis à ſuperficie infimâ ad ſupremam continua reddatur) fiet ratio æqualitatis. Suſtinet ergo ſuperficies infima pondus cylindri præfiniti. *Q. E. D.* (d) Et ſimili argumentatione patet propoſitio, ubi gravitas decreſcit in ratione quâvis aſſignatâ diſtantiæ à centro, ut & ubi fluidum ſurſum rarius eſt, deorſum denſius. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur fundum non urgetur à toto fluidi incumbentis pondere, ſed eam ſolummodo ponderis partem ſuſtinet quæ in propoſitione deſcribitur; pondere reliquo à fluidi figurâ fornicatâ ſuſtentato.

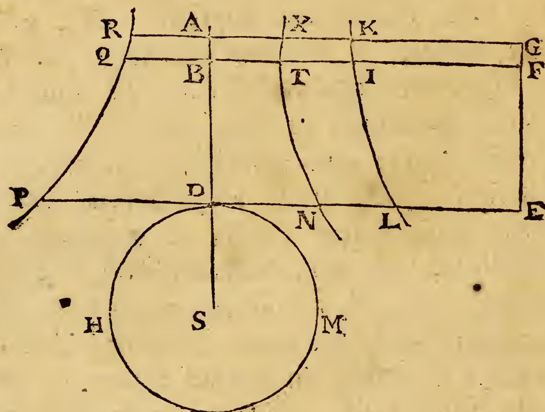
Co-

libet ſuperficiei ad gravitatis directionem perpendicularis: & quoniam nulla eſt alia ſuperficies, præter ſphæricam, quæ hanc habeat proprietatem, ut lineæ omnes ipſi perpendiculares ad centrum unum concurrant, ſuperficies illa fluidi ſphærica erit. Q. E. D.

(c) * *Pro menſurâ ſuâ æqualiter premuntur.* Singulæ, nimirum, ſuperficiei ſecundæ partes, ſemotâ partium illarum propriâ gravitate, æque premuntur ac partes æquales ſuperficiei ſupremæ; quod per Prop. XIX. manifeſtum fit, ſi ſpatium quod illas ſuperficies continet tanquam vas aliquod conſideretur quod fluidum æqualiter undique compreſſum complectitur. 172.

(d) * *Et ſimili argumentatione &c.* Patet ut in ſuperiori demonſtratione, quod pondus partium omnium æqualium D, C, B, A in totâ rectâ DA exiſtentium ſuſtineatur à parte D correſpondente fundi ſphærici DHM. Hoc igitur fundum ſuſtinet pondus cylindri, cujus baſis æqualis eſt ſuperficiei fundi, & altitudo eadem quæ fluidi incumbentis DA; modo tamen in locis à fundo ſphærico DHM & à baſi planâ cylindri æquidiſtantibus, eadem ſervetur fluidi denſitas, eademque vis gravitatis quæ in baſim cylindri perpendiculariter tendat ubique. 173.

Corol. 2. In æqualibus autem à centro distantiis eadem semper est pressionis quantitas, sive (e) superficies pressa sit hori-



173. Designet DAGE prædictum cylindrum, cujus basis DE æqualis sit fundo sphærico DHM. Per punctum D, & per puncta B & A infinitè propinqua ductæ sint rectæ DE, BF & AG perpendiculares ad AS; in illis perpendicularibus capiantur DL, BI, AK densitatibus fluidi & DN, BT, AX viribus gravitatis acceleratricibus in locis D, B, A proportionales, sintque curvæ LIK & NTX loca punctorum L, I, K, & N, T, X. Producatur KA in R, ut sit semper AR rectangulo AX×AK proportionalis, & RQP curva quam punctum R perpetuo tangit: & pressio fluidi in fundum sphæricum DHM erit ut fundum DHM & area DARP conjunctim. Nam pressio fluidi cylindrulo BAGF contenti in basim DE est ut quantitas materiæ in vim gravitatis singularum particularum ducta, (per definit. VIII. lib. 1.). Quantitas materiæ cylindro BAGF contenta est ut cylindrus BAGF & densitas conjunctim, (2. lib. 1.), id est, ut basis cylindri DE & rectangulum AB×AK. Quare pressio fluidi cylindro BAGF contenti est ut basis DE & solidum AB×AK×AX, seu ut basis DE & rectangulum AB×AR conjunctim. Dividatur tota fluidi altitudo DA in parte innumeras ut AB, &c. erit pressio fluidi totius in basim cylindri DE vel in fundum sphæricum DHM, ut basis DE vel fundum DHM & area DARP conjunctim. Q. E. D.

Si vis acceleratrix gravitatis constans sit, curva XTN in rectam lineam mutabitur axi AD parallelam, eritque proinde pressio fluidi in fundum DHM, ut fundum hoc & area DAKL conjunctim; in hac enim hypothesi, ob datam AK, area DARP proportionalis est areæ DAKL.

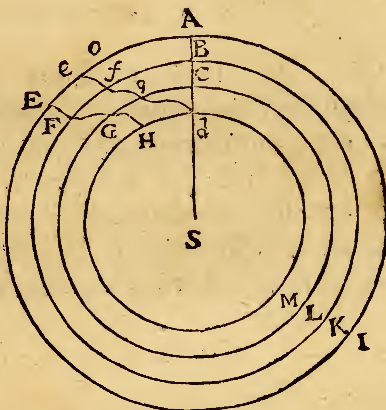
Si vis gravitatis & densitas fluidi constantes sint, curvæ XIN, KIL & KQP in rectas lineas axi AD parallelas migrant; & ideo pressio fluidi in fundum sphæricum DHM, vel in basim cylindri DE, est ut fundum illud DHM, vel basis DE, & altitudo fluidi AD conjunctim. Si vero conferantur liquores in se homogenei, sed diversæ inter se densitatis, pressiones erunt in ratione compositâ basium, altitudinum & densitatum, modo gravitas acceleratrix constans, sit in utroque liquore æqualis; nam si inæqualis esset, pressiones forent in ratione compositâ basium, altitudinum, densitatum & virium gravitatis.

(e) * *Sive superficies pressa sit horizonti &c.* * Sumatur quævis particula inter duos orbes concentricos BFK, CGL, illa

zonti parallela vel perpendicularis vel obliqua; sive (f) fluidum, à superficie pressâ sursum continuatum, surgat perpendiculariter secundum lineam rectam, vel serpit obliquè per tortas cavitates & canales, easque regulares vel maximè irregulares, amplas vel angustissimas. Hisce circumstantiis pressionem nil mutari colligitur, applicando demonstrationem theorematis hujus ad casus singulos fluidorum.

Corol. 3. Eâdem demonstratione colligetur etiam (per prop. XIX.) quod fluidi gravis partes nullum, ex pressione ponderis incumbentis, acquirunt motum inter se; si modo excludatur motus qui ex condensatione oriatur.

Corol. 4. Et propterea si aliud ejusdem gravitatis specificæ cor-



illa particula per casum 5. Prop. XIX. undique æqualiter premitur, ergo per motus Leg. III. undique æqualiter premit, substituatur itaque loco particulæ cujusvis hanc contingentis superficies quævis, sive horizontalis, sive perpendicularis, sive obliqua, æqualis erit in eam pressionis quantitas: *Ergo in æqualibus à centro distantiis &c.*

(f) * *Sive fluidum à superficie pressâ &c.* Si fluidum vase utlibet irregulari EFGHdgfe contineatur, vasis fundum Hd sustinebit pondus cylindri, cujus basis æqualis est superficiei fundi Hd, & altitudo DA eadem quæ fluidi in vase contenti. Iisdem enim positis, quæ in demonstratione propositionis hujus, premitur superficies suprema Ee vi simplici gravitatis propriæ, quâ & superficies secunda Ff pro mensura sua æqualiter premitur. Premitur prætorea superficies secunda Ff vi propriâ gravitatis, quæ addenda est vi priori. Hâc pressione, pro mensurâ suâ, & insuper vi propriæ gravitatis, urgetur superficies tertia Gg; & sic deinceps. Quare patet, ut supra, pressionem quam superficies infima Hd subit, æqualem esse ponderi cylindri cujus est altitudo DA & basis fundo Hd æqualis.

Manente igitur tum basi Hd, tum fluidi altitudine perpendiculari DA, manet fluidi in basim pressio, utcunque mutetur vasis fluidum continentis figura. Atque hinc in vasis communicantibus æquilibrium est, ubi perpendiculares fluidi altitudines supra fundum commune in utroque vase æquantur, dummodo in paribus à centro virium gravitatis S distantiis tam fluidi densitas quam vis gravitatis servetur eadem. Nam si, manente vi gravitatis acceleratrice, conferantur fluida in se homogenea, sed diversæ inter se densitatis, erit in vasis communicantibus æquilibrium, ubi fluidorum in utroque vase altitudines perpendiculares erunt in ratione densitatum reciprocâ, quia in eo casu fluidorum in basim communem pressiones æquales sunt (173).

173.

corpus, quod sit condensationis expers, submergatur in hoc fluido, id ex pressione ponderis incumbentis nullum acquiret motum: non descendet, non ascendet, non cogetur figuram suam mutare. Si sphæricum est manebit sphæricum, non obstante pressione; si quadratum est manebit quadratum: idque sive molle sit, sive fluidissimum; sive fluido liberè innatet, sive fundo incumbat. Habet enim fluidi pars quælibet interna rationem corporis submersi, & par est ratio omnium ejusdem magnitudinis, figuræ & gravitatis specificæ submersorum corporum. Si corpus submersum servato pondere liquesceret & indueret formam fluidi; hoc, si prius ascenderet vel descenderet vel ex pressione figuram novam indueret, etiam nunc ascenderet vel descenderet vel figuram novam induere cogeretur: id adeo quia gravitas ejus cæteræque motuum causæ permanent. Atqui (per cas. 5. prop. XIX.) jam quiesceret & figuram retineret. Ergo & prius.

Corol. 5. Proinde corpus quod specificè gravius est quam fluidum sibi contiguum subsidebit, & quod specificè levius est ascendet, motumque & figuræ mutationem consequetur, quantum excessus ille vel defectus gravitatis efficere possit. Namque excessus ille vel defectus rationem habet impulsus, quo corpus, aliàs in æquilibrio cum fluidi partibus constitutum, urgetur; & comparari potest cum excessu vel defectu ponderis in lance alterutrâ libræ.

Corol. 6. Corporum igitur in fluidis constitutorum duplex est gravitas altera vera & absoluta, altera apparens, vulgaris & comparativa. Gravitas absoluta est vis tota quâ corpus deorsum tendit: relativa & vulgaris est excessus gravitatis quo corpus magis tendit deorsum quam fluidum ambiens. Prioris generis gravitate partes fluidorum & corporum omnium gravitant in locis suis: ideoque conjunctis ponderibus componunt pondus totius. Nam totum omne grave est, ut in vasis liquorum plenis experiri licet; & pondus totius æquale est ponderibus omnium partium, ideoque ex iisdem componitur. Alterius generis gravitate corpora non gravitant in locis suis, id est, inter se

ſe collata non prægravant, ſed mutuos ad deſcendendum conatus impedientia permanent in locis ſuis, perindé ac ſi gravia non eſſent. Quæ in aëre ſunt & non prægravant, vulgus gravia non judicat. Quæ prægravant vulgus gravia judicat, quâtenus aëris pondere non ſuſtinentur. Pondera vulgi nihil aliud ſunt quam exceſſus verorum ponderum ſupra pondus aëris. Unde & vulgo dicuntur levia, quæ ſunt minus gravia, aërique prægravanti cedendo ſuperiora petunt. Comparativè levia ſunt, non verè, quia deſcendunt in vacuo. Sic & in aquâ corpora, quæ ob majorem vel minorem gravitatem deſcendunt vel aſcendunt, ſunt comparativè & apparenter gravia vel levia, & eorum gravitas vel levitas comparativa & apparens eſt exceſſus vel defectus quo vera eorum gravitas vel ſuperat gravitatem aquæ vel ab eâ ſuperatur. Quæ verò nec prægravando deſcendunt, nec prægravanti cedendo aſcendunt, etiamſi veris ſuis ponderibus adaugeant pondus totius, comparativè tamen & in ſenſu vulgi non gravitant in aquâ. Nam ſimilis eſt horum caſuum demonſtratio.

Corol. 7. Quæ de gravitate demonſtrantur, obtinent in aliis quibuſcunque viribus centripetis.

Corol. 8. Proinde ſi medium, in quo corpus aliquod movetur, urgeatur vel à gravitate propriâ, vel ab aliâ quâcunque vi centripetâ, & corpus ab eâdem vi urgeatur fortius; differentia virium eſt vis illa motrix, quam in præcedentibus propoſitionibus ut vim centripetam conſideravimus. Sin corpus à vi illâ urgeatur levius, differentia virium pro vi centrifugâ haberi debet.

Corol. 9. Cum autem fluida premendo corpora incluſa non mutent eorum figuras externas, patet inſuper (per corollarium prop. XIX) quod non mutabunt ſitum partium internarum inter ſe: proindeque, ſi animalia immergantur, & ſenſatio omnis à motu partium oriatur; nec lædent corpora immerſa, nec ſenſationem ullam excitabunt, niſi quâtenus hæc corpora à compreſſione condenſari poſſunt. Et par eſt ratio cujuſcunque corporum ſyſtematis fluido comprimente circundati. Syſtematis

partes omnes iisdem agitabantur motibus; ac si in vacuo constituerentur, ac solam retinerent gravitatem suam comparativam, nisi quâtenus fluidum vel motibus earum nonnihil resistat, vel ad easdem compressione conglutinandas requiratur.

PROPOSITIO XXI. THEOREMA XVI.

Sit fluidi cujusdam densitas compressioni proportionalis, & partes ejus à vi centripetâ distantiis suis à centro reciprocè proportionali deorsum trahantur: dico quod, si distantiæ illæ sumantur continuè proportionales, densitates fluidi in iisdem distantiis erunt etiam continuè proportionales.

Designet ATV fundum sphæricum cui fluidum incumbit, S centrum, SA, SB, SC, SD, SE, SF, &c distantias continuè proportionales. Erigantur perpendicula AH, BI, CK, DL, EM, FN, &c. quæ sint ut densitates medii in locis A, B, C, D, E, F; & (g) specificæ gravitates in iisdem locis erunt ut $\frac{AH}{AS}$, $\frac{BI}{BS}$, $\frac{CK}{CS}$, &c. vel, (h) quod perinde est, ut $\frac{AH}{AB}$, $\frac{BI}{BC}$, $\frac{CK}{CD}$, &c. Finge primum has gravitates uniformiter continuari ab A ad B, à B ad C, à C ad D, &c. factis per gradus decrementis in punctis B, C, D, &c. (i) Et hæ gra-

(g) 174. *Et specificæ gravitates &c.* Fluidi enim cujus singulæ particulæ vi gravitatis urgentur gravitas specifica est ut densitas & vis gravitatis acceleratrix conjunctim. Est enim gravitas specifica ut pondus directè & volumen inversè (170); Sed pondus (per defin. VIII. lib. 1.) est ut quantitas materiæ & vis gravitatis acceleratrix conjunctim; quantitas verò materiæ (2. lib. 1.) est ut densitas & volumen conjunctim. Quare, conjunctis his rationibus, gravitas specifica est ut densitas & vis gravitatis acceleratrix conjunctim. Q. E. D.

(h) * *Vel, quod perinde est, ut &c.* Cum enim (per hyp.) distantiæ SA, SB, SC, SD &c. sint continuè proportionales, earum differentiæ AB, BC, CD &c. ipsis proportionales erunt.

(i) * *Et hæ gravitates ductæ &c.* Nam si pondus quod fundum sphæricum ATV sustinet, exponatur per cylindrum cujus basis æqualis sit superficiei ATV & altitudo eadem quæ fluidi incumbentis, volumen fluidi cylindrici pro altitudine AB erit ATV × AB, ideoque ob datam superficiem ATV, erit volumen illud ut AB, multiplicetur illud per gravitatem specificam & factum erit ut pondus seu pressio; quare cum (ex demonst.) gravitas specifica sit ut $\frac{AH}{AB}$, pressio flui-

gravitates ductæ in altitudines *A B*, *B C*, *CD*, &c. conficient pressiones *A H*, *B I*, *C K*, &c. quibus fundum *A T V* (juxta theorema xv.) urgetur. Sustinet ergo particula *A* pressiones omnes *A H*, *B I*, *C K*, *D L*, (k) pergendo in infinitum; & particula *B* pressiones omnes præter primam *A H*; & particula *C* omnes præter duas primas *A H*, *B I*; & sic deinceps: ideoque particulæ primæ *A* densitas *A H*, est ad particulæ secundæ *B* densitatem *B I* ut summa omnium *A H* + *B I* + *C K* + *D L*, in infinitum, ad summam omnium *B I* + *C K* + *D L*, &c. Et *B I* densitas secundæ *B* est ad *CK* densitatem tertiæ *C*, ut summa omnium *B I* + *C K* + *D L*, &c. ad summam omnium *C K* + *D L*, &c. Sunt igitur summæ illæ differentiis suis *A H*, *B I*, *C K*, &c. proportionales, atque ideo continuè proportionales (per hujus lem. 1.) proindeque differentiæ *A H*, *B I*, *C K*, &c. summis proportionales, sunt etiam continuè proportionales. Quare cum densitates in locis *A*, *B*, *C*, &c. sint ut *A H*, *B I*, *C K*, &c. erunt etiam hæ continuè proportionales. Pergatur per saltum, & ex æquo in distantiis *S A*, *S C*, *S E* continuè proportionalibus, erunt densitates *A H*, *C K*, *E M* continuè proportionales. Et eodem argumento, in distantiis quibusvis continuè proportionalibus *S A*, *S D*, *S G*, densitates *A H*, *D L*, *G O* erunt continuè proportionales. Coeant jam puncta *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, &c. eo ut progressio gravitatum specificarum à fundo *A* ad summitatem fluidi continua reddatur, & in distantiis quibusvis continuè proportionalibus *S A*, *S D*, *S G*, densitates *A H*, *D L*, *G O*, semper existentes continuè proportionales, manebunt etiamnum continuè proportionales. *Q. E. D.*

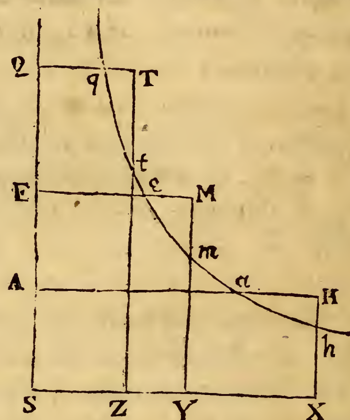


Co-

di cylindrici, cujus est altitudo A B, erit ut A H; & ita de cæteris.

(k) 175. * *Pergendo in infinitum.* Quoniam enim (per hyp.) densitas compressioni proportionalis est, ubi compressio nulla evadit, evanescit quoque densitas, seu, fluidum fit infinitè rarum, ac proinde in infinitum expanditur; cum ratio voluminis ad materiæ quantitatem infinita evadat (2. lib. 1.). 175.

Corol. Hinc ſi detur denſitas fluidi in duobus locis, putà *A* & *E*, colligi poteſt ejus denſitas in alio quovis loco *Q*. Centro *S*, aſymptotis rectangulis *SQ*, *SX* deſcribatur hyperbola ſecans perpendicula *AH*, *EM*, *QT* in *a*, *e*, *q*, ut & perpendicula *HX*, *MY*, *TZ*, ad aſymptoton *SX* demiſſa, in *h*, *m* & *t*. Fiat area *YmtZ* ad aream datam *YmhX* ut area data *EeqQ* ad aream datam *EeaA*; & linea *Zt* producta abſcindet lineam *QT* denſitati proportionalem. Namque ſi lineæ *SA*, *SE*, *SQ* ſunt continuè proportionales, (l) erunt areæ *EeqQ*, *EeaA* æquales, & inde areæ his proportionales *YmtZ*, *XhmY* etiam æquales, & lineæ *SX*, *SY*, *SZ*, id eſt, *AH*, *EM*, *QT* (m) continuè proportionales, ut oportet. Et ſi lineæ *SA*, *SE*, *SQ* obtinent alium quemvis ordinem in ſerie continuè proportionalium, lineæ *AH*, *EM*, *QT*, ob proportionales areas hyperbolicas, (n) obtinebunt eundem ordinem in aliâ ſerie quantitatum continuè proportionalium.



PRO-

(l) * *Erunt areæ EeqQ, EeaA æquales*, per not. 379. lib. 1.

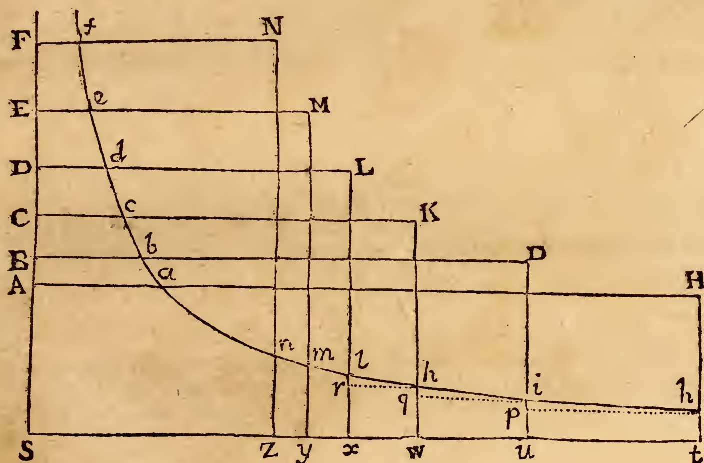
(m) * *Continuè proportionales*, (379. lib. 1.)

(n) * *Obtinebunt eumdem ordinem &c.* * Etenim areæ Hyperbolicæ EeaA, QqaA ſunt Logarithmi linearum SE, SQ, & pariter areæ VmtZ, XhtZ ſunt Logarithmi linearum SY, SX, (379, 389, lib. 1.) ſed cum areæ YmtZ, XhtZ ſint per conſtructionem proportionales areis EeaA, QqaA, illæ areæ YmtZ, XhtZ per Doctrinam Logarithmorum (n. 38) poterunt eſſe Logarithmi linearum SE, SQ; cum ergo eædem quantitates poſſint eſſe Logarithmi tam quantitatum SE, SQ, quam quantitatum SY, SX oportet ut iſtæ quantitates SE, SY & SQ, SX correſpondentia loca occupent in Progreſſionibus Geometricis ad quas pertinent.

PROPOSITIO XXII. THEOREMA XVII.

Sit fluidi cujusdam densitas compressioni proportionalis, & partes ejus à gravitate quadratis distantiarum suarum à centro reciprocè proportionali deorsum trahantur: dico quod, (o) si distantiæ sumantur in progressione musicâ, densitates fluidi in his distantiis erunt in progressione geometricâ.

Designet *S* centrum, & *SA*, *SB*, *SC*, *SD*, *SE* distantias in progressione geometricâ. Erigantur perpendicula *AH*, *BI*,



CK, &c. quæ sint ut fluidi densitates in locis *A*, *B*, *C*, *D*, *E*,

(o) * *Quod si distantiæ sumantur in progressione musica*, aut, quod idem est, si tales sumantur distantiæ ut earum reciprocæ sint in progressione arithmeticâ.

* Scilicet tres quantitates dicuntur esse in continuâ proportione Musicâ sive Harmonicâ si prima sit ad tertiam ut differentia primæ & secundæ ad differentiam secundæ & tertiæ. Et si sit series plurium quantitatum talium ut terminus quivis sit ad subsequentem, ut differentia prioris à termino intermedio, ad differentiam hujus intermedii à posteriore termino, ea series dicitur *Progressio Musica*. 175.

Cor. 1. *In progressione Musicâ factum duorum priorum terminorum est ad factum duorum quorumvis immediatè sibi succedentium ut differentia inter duos primos terminos ad differentiam inter hos ultimos.* Nam sumto termini progressionis Musicæ *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* &c. & differentiæ inter singulos *M*, *N*, *P*, *Q*, *R* &c. erit per definitionem hujus progressionis

DE MOTU CORPORUM.

E, &c. & ipsius gravitates (p) specificæ in iisdem locis erunt $\frac{AH}{SAq}$, $\frac{BI}{SBq}$, $\frac{CK}{SCq}$, &c. Finge has gravitates uniformiter continuari, primam ab A ad B, secundam à B ad C, tertiam à

$A : C = M : N$
$B : D = N : P$
$C : E = P : Q$
$D : F = Q : R$, unde ex compositione rationum patet quod est

$A \times B : E \times F = M : R$.

Cor. 2. *Differentia inter duos primos terminos est ad differentiam inter duos quosvis alios, ut secundus terminus, toties mulctatus differentiâ sua à primo quot sunt termini inter primum & ultimum, ad eum ultimum.*

Nam (iisdem litteris adhibitis quæ in superiore Corollario) cum ex naturâ progr. sit $A : C = M : N$, sitque $A = B - M$, est $B - M : C = M : N$, ergo in hoc casu, differentia M inter duos primos terminos A & B est ad differentiam N inter B & C ut secundus terminus B semel mulctatus differentiâ suâ à primo, cum sit unicus terminus inter primum A & ultimum C, ad eum ultimum C.

Cum ergo sit $B - M : C = M : N$, vicissim $B - M : M = C : N$, & dividendo $B - 2M : M = C - N : N$; cumque sit $C - N = B$, est $B - 2M : M = B : N$, sed, per defin. progress. est $B : N = D : P$ ergo $B - 2M : M = D : P$ & vicissim $B - 2M : D = M : P$, sunt verò duo termini inter A & D unde rursus in hoc casu constat Corollarii veritas.

Item cum sit $B - 2M : D = M : P$ & vicissim $B - 2M : M = D : P$, erit dividendo $B - 3M : M = D - P : P$, cumque sit $D - P = C$ erit $B - 3M : M = C : P$ cumque per defin. progr. sit $C : P = E : Q$ erit $B - 3M : M = E : Q$ & vicissim $B - 3M : E = M : Q$, sunt verò inter A & E tres termini: Cumque eadem recurrat semper demonstratio si numerus terminorum progressionis inter primum & ultimum sit n; si secundus terminus dicatur B, differentia à primo M, ultimus terminus sit F, differentiâ a præcedente R erit, $M : R = B - nM : F$. Q. E. Dem.

Cor. 3. *In Progressione Musicâ secundus terminus toties mulctatus suâ differentiâ à primo quot sunt termini inter eum & ultimum, est ad ultimum ut factum duorum primorum terminorum progressionis ad factum duorum postremorum.*

Liquet utique ex collatione duorum præcedentium Corollariorum; unde est semper $B - nM : F = A \times B : E \times F$.

Theor. I. *Quilibet terminus progressionis Musicæ est æqualis facto duorum primorum terminorum diviso per secundum terminum toties mulctatum differentiâ suâ à primo quot sunt termini à primo ad eum ultimum terminum.*

Primus terminus est $\frac{A \times B}{B}$, secundus terminus $\frac{A \times B}{A}$ sed $A = B - M$ ergo 2us. terminus est $\frac{A \times B}{B - M}$. Pro reliquis terminis habetur semper per Coroll. 3. $B - nM : F = A \times B : E \times F$ divisis ergo Consequentibus per F, erit $B - nM : 1 = A \times B : E$ unde est $E = \frac{A \times B}{B - nM}$ sed cum n designaret numerum terminorum inter A & F hic exprimit numerum terminorum a primo ad E hoc ultimo annumerato, unde patet Theor. veritas.

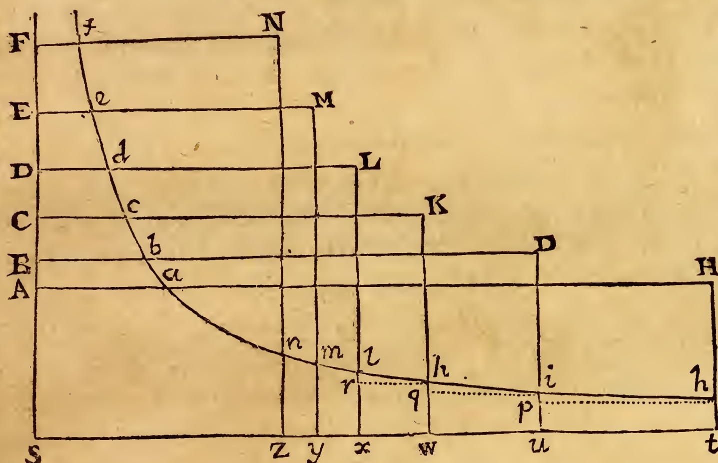
Theor. II. *Termini omnes progressionis Musicæ sunt inter se sicut quantitates quarum reciprocæ constituunt progressionem Arithmeticam.*

Nam per Theor. prius termini $A : B . C . D . E$ &c. prog. Musicæ sunt $\frac{A \times B}{B}$, $\frac{A \times B}{B - M}$, $\frac{A \times B}{B - 2M}$, $\frac{A \times B}{B - 3M}$, &c. $\frac{A \times B}{B - nM}$. Divisis itaque omnibus per $A \times B$ sunt ut $\frac{1}{B}$, $\frac{1}{B - M}$, $\frac{1}{B - 2M}$, $\frac{1}{B - 3M}$, $\frac{B}{B - nM}$. Sed hæ sunt reciprocæ quantitatum B, $B - M$, $B - 2M$, $B - 3M - B - nM$ quæ sunt in progressione arithmeticâ; Ergo &c.

Scholium, Progressio musica potest esse decrescens & omnia ut prius procedent, mutatis signis negativis in positiva.

(p) * *Gravitates specificæ in iisdem locis erunt &c.* (174).

C ad *D* &c. Et hæ ductæ in altitudines *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, &c. vel, quod perinde est, in distantias *SA*, *SB*, *SC*, &c. altitudinibus illis proportionales, (q) conficient exponentes pressionum $\frac{AH}{SA}$, $\frac{BI}{SB}$, $\frac{CK}{SC}$, &c. Quare cum densitates sint ut harum pressionum summæ, differentiæ densitatum *AH* − *BI*, *BI* − *CK*, &c. erunt ut summarum differentiæ $\frac{AH}{SA}$, $\frac{BI}{SB}$, $\frac{CK}{SC}$, &c. Centro *S*, asymptotis *SA*, *Sx* describatur



hyperbola quævis, quæ secet perpendicula *AH*, *BI*, *CK*, &c. in *a*, *b*, *c*, &c ut & perpendicula ad asymptoton *Sx* demissa *Ht*, *Iu*, *Kw* in *h*, *i*, *k*, & densitatum differentiæ *tu*, *uw*, &c. erunt ut $\frac{AH}{SA}$, $\frac{BI}{SB}$, &c. Et rectangula $tu \times th$, $uw \times ui$, &c. seu *tp*, *uq*, &c. ut $\frac{AH \times th}{SA}$, $\frac{BI \times ui}{SB}$, &c. id

Z 2 est,

(q) * *Conficient exponentes pressionum*, seu quantitates pressionibus proportionales, &c. Quod patet ut in demonstratione prop. XXI.

est, ut Aa, Bb, &c. Est enim, (r) ex naturâ hyperbolæ, SA ad AH vel St, ut th ad Aa, ideoque $\frac{AH \times th}{SA}$ æquale Aa. Et simili argumento est $\frac{BI \times ui}{SB}$ æquale Bb, &c. (s) Sunt autem Aa, Bb, Cc, &c. contiuuè proportionales, & propterea differentiis suis $Aa-Bb$, $Bb-Cc$, &c. proportionales; ideoque differentiis hisce proportionalia sunt rectangula tp, uq, &c. ut & summis differentiarum $Aa-Cc$ vel $Aa-Dd$ summæ rectangulorum $tp+uq$ vel $tp+uq+wr$. Sunto ejusmodi termini quam plurimi, & summa omnium differentiarum, puta $Aa-Ff$, erit summæ omnium rectangulorum, puta $zthn$, proportionalis. Augeatur numerus terminorum & minuantur distantiæ punctorum A, B, C, &c. in infinitum, & (t) rectangula illa evadent æqualia areæ hyperbolicæ $zthn$, ideoque huic areæ proportionalis est differentia $Aa-Ff$. (u) Sumantur jam distantiæ quælibet, puta SA, SD, SF, in progressione musicâ, & differentiæ $Aa-Dd$, $Dd-Ff$ erunt æquales; & propterea differentiis hisce proportionales areæ $thlx$, $xlnz$ æquales erunt inter se, & densitates St, Sx, Sz, id est, AH, DL, FN, (x) continuè proportionales. *Q. E. D.*

Corol. Hinc si dentur fluidi densitates duæ quævis, puta AH & BI, dabitur area $thiu$, harum differentiæ tu respondens; & inde invenietur densitas FN, in altitudine quâcunque SF, sumendo aream $thnz$ ad aream illam datam $thiu$ ut est differentia $Aa-Ff$ (y) ad differentiam $Aa-Bb$.

Scho-

(r) * *Ex natura hyperbolæ*, per theor. 4. de hyperbola.

(s) * *Sunt autem Aa, Bb, Cc, &c. continuè proportionales.* Nam (per hyp.) SA, SB, SC sunt continuè proportionales, & (per theor. 4. de hyp.) Aa, Bb, Cc sunt reciprocè ut SA, SB, SC, ideoque etiam continuè proportionales.

(t) * *Et rectangula evadent æqualia areæ hyperbolicæ zthna*, per Lemma III. lib. I.

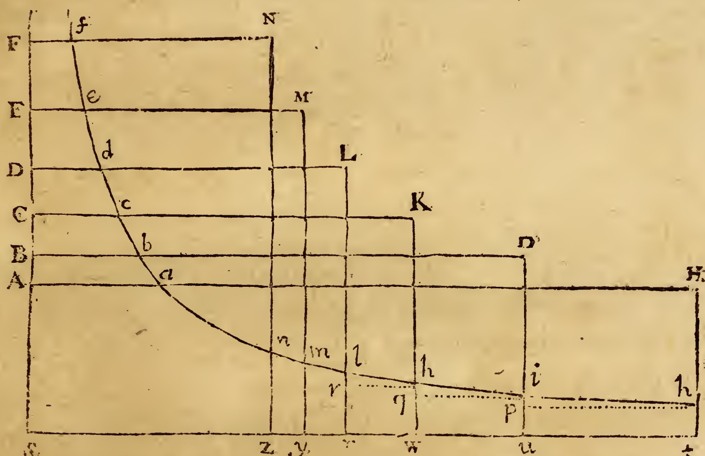
(u) * *Sumantur jam* distantiæ quælibet, puta SA, SD, SF in progressione musicâ, & earum reciprocæ Aa, Dd, Ff erunt in progressione arithmetica, ideoque differentiæ Aa — Dd, Dd — Ff æquales.

(x) * *Continuè proportionales.* (379 lib. 1.)

(y) 176. * *Ad differentiam Aa — Bb.* Quoniam vero area thiu est ad aream thnz

Scholium.

(z) Simili argumentatione probari poteſt, quod ſi gravitas particularum fluidi diminuatur in triplicatâ ratione diſtantiarum à centro, & quadratorum diſtantiarum SA, SB, SC, &c. reciproca (nempe $\frac{SA\ cub.}{SAq}$, $\frac{SA\ cub.}{SBq}$, $\frac{SA\ cub.}{SCq}$) ſumantur in progreſſione arithmeticâ; denſitates AH, BI, CK, &c. erunt



in progreſſione geometricâ. Et ſi gravitas diminuatur in quadruplicatâ ratione diſtantiarum, & cuborum diſtantiarum reciproca (puta $\frac{SAqq}{SA\,cub.}$, $\frac{SAqq}{SB\,cub.}$, $\frac{SAqq}{SC\,cub.}$, &c.) ſumantur in

thnz ut Logarithmus lineæ S t vel A H ad Logarithmum lineæ S z ſeu F N (379 & 380 lib. 1.), denſitas F N per tabulas logarithmorum inveniri poterit. Et vice verſâ datâ denſitate F N invenietur altitudo S F: nam per prop. ſuperiorem dabitur A a — F f, & inde dabitur F f, unde invenietur $FS = \frac{SA \times Aa}{Ff}$ (per theor. 4. de hyp.). Quia vero fluidi elaſticitas, cæteris paribus, vi comprimenti, ideoque denſitati (per hyp.) proportionalis eſt, patet per hoc corollarium ex datis altitudinibus inveniri poſſe elaſticitates, & vice verſâ.

(z) 177. * *Simili argumentatione probari poteſt &c.* Sit vis centripeta particularum fluidi reciprocè ut diſtantiæ di- 177.

 gni-

De Motu Corporum.

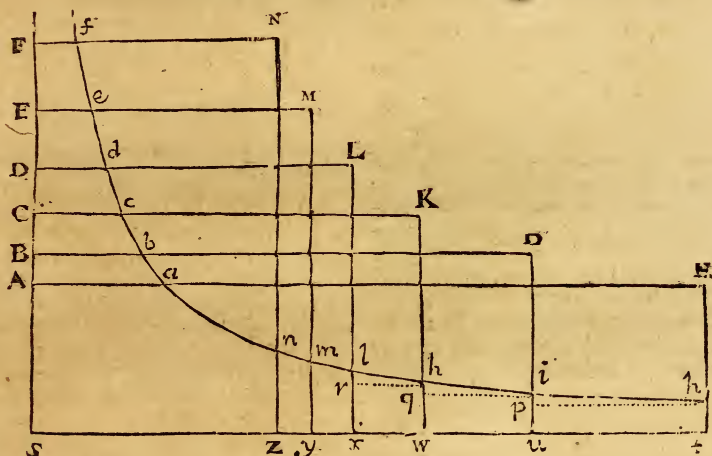
in progressione arithmeticâ; densitates AH, BI, CK, &c. erunt in progressione geometricâ. Et sic in infinitum. Rursus

gnitas, cujus index est n; designet S centrum, & SA, SB, SC, SD, SE distantias in progressione geometricâ. Erigantur perpendicula AH, BI, CK &c. quæ sint ut fluidi densitates in locis A, B, C, D, E &c. Et ipsius gravitates specificæ in iisdem locis erunt $\frac{AH}{SA^n}$, $\frac{BI}{SB^n}$, $\frac{CK}{SC^n}$, &c. Finge has gravitates uniformiter continuari primam ab A ad B, secundam a B ad C, tertiam a C ad D, &c. Et hæ ductæ in altitudines AB, BC, CD, DE &c. vel quod perinde est, in distantias SA, SB, SC, &c. altitudinibus illis proportionales, conficient exponentes pressionum $\frac{AH}{SA^{n-1}}$, $\frac{BI}{SB^{n-1}}$, $\frac{CK}{SC^{n-1}}$, &c. Quare cum densitates sint ut harum pressionum summæ differentiæ densitatum AH−BI, BI−CK; &c. erunt ut summarum differentiæ $\frac{AH}{SA^{n-1}}$, $\frac{BI}{SB^{n-1}}$, $\frac{CK}{SC^{n-1}}$, &c. fiat eadem constructio, quæ supra in prop. XXII, & densitatum differentiæ tv, uw, & erunt ut $\frac{AH}{SA^{n-1}}$, $\frac{BI}{SB^{n-1}}$, &c. & rectangula $tv\times th$, $uw\times ui$, &c., seu tp, uq &c. ut $\frac{AH\times th}{SA^{n-1}}$, $\frac{BI\times ui}{SB^{n-1}}$, &c. id est, ut Aa^{n-1}, Bb^{n-1}, &c. Est enim (per theor. 4. de hyp.) $AH\times th$ æquale $SA\times Aa$, & Aa reciprocè ut SA, seu directè ut $\frac{1}{SA}$, ideoque $\frac{AH\times th}{SA^{n-1}}$ ut $SA\times Aa\times Aa^{n-1}$, sive ut Aa^{n-1} cum sit $SA\times Aa=1$, & simili argumento est $\frac{BI\times ui}{SB^{n-1}}$ ut Bb^{n-1}, &c. sunt autem Aa, Bb, Cc, &c. ideoque Aa^{n-1}, Bb^{n-1}, Cc^{n-1} &c. continuè proportionales, & propterea differentiis suis $Aa^{n-1}-Bb^{n-1}$, $Bb^{n-1}-Cc^{n-1}$, &c. proportionales, ideoque differentiis hisce proportionalia sunt rectangula tp, uq, &c. ut & summis differentiarum $Aa^{n-1}-Cc^{n-1}$, vel $Aa^{n-1}-Dd^{n-1}$ summæ rectangulorum $tp+uq$, vel $tp+uq+wr$. Sunto ejusmodi termini quam plurimi, & summa omnium differentiarum; puta $Aa^{n-1}-Ff^{n-1}$, erit summæ omnium rectangulorum, puta zthn, proportionalis. Augeatur numerus terminorum & minuantur distantiæ punctorum A, B, C, &c. in infinitum, & rectangula illa evadent æqualia areæ hyperbolicæ zthn, ideoque huic areæ proportionalis est differentia $Aa^{n-1}-Ff^{n-1}$.

Sumantur jam distantiarum quarumlibet, puta SA, SD, SF dignitate SA^{n-1} SD^{n-1}, SF^{n-1} in progressione musicâ, ideoque earum reciprocæ $\frac{1}{SA^{n-1}}$, $\frac{1}{SD^{n-1}}$, $\frac{1}{SF^{n-1}}$, seu Aa^{n-1}, Dd^{n-1}, Ff^{n-1} in progressione arithmeticâ, & differentiæ $Aa^{n-1}-Dd^{n-1}$, $Dd^{n-1}-Ff^{n-1}$ erunt æquales; & propterea differentiis hisce proportionales areæ thlx, xlπz æquales erunt inter se, & densitates St, Sx, Sz, id est, AH, DL, FN continuè proportionales. Quare si gravitas particularum fluidi diminuatur in ratione quâcumque multiplicatâ distantiarum, cujus exponens sit n, & dignitatum SA^{n-1}, SB^{n-1}, SC^{n-1}, &c. reciproca (nempe $\frac{SA^n}{SA^{n-1}}$, $\frac{SA^n}{SB^{n-1}}$, $\frac{SA^n}{SC^{n-1}}$, &c. in quibus SA data est) sumantur in progressione arithmeticâ; densitates AH, BI, CK, &c. erunt in progressione geometricâ.

Si itaque loco n scribantur numeri 3, 4, 5, 6 &c. in infinitum; & rursus scribantur o, −1, −2, −3 &c. in infinitum, patet veritas scholii in hypothesi densitatis vi comprimenti proportionalis. Quando autem $n=o$, seu quando gravitas particularum fluidi in omnibus distantiis eadem est, est $\frac{SA^n}{SA^{n-1}}=SA$, $\frac{SA^n}{SB^{n-1}}=SB$,

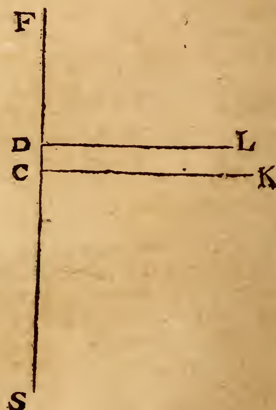
ſus ſi gravitas particularum fluidi in omnibus diſtantiis eadem fit, & diſtantiæ ſint in progreſſione arithmeticâ denſitates erunt in progreſſione geometricâ, uti Vir Cl. *Edmundus Halleius* invenit. Si gravitas ſit ut diſtantia, & quadrata diſtantiarum ſint in progreſſione arithmeticâ, denſitates erunt in progreſſione geometricâ. Et ſic in infinitum. Hæc ita ſe habent ubi fluidi compreſſione condenſati denſitas eſt ut vis compreſſionis, vel, quod perinde eſt, ſpatium à fluido occupatum reciprocè ut hæc vis. Fingi poſſunt aliæ condenſationis leges, ut quod cubus vis comprimentis ſit ut quadrato-quadratum denſitatis, ſeu triplica-ta



SB, ideoque ſi diſtantiæ ſumantur in progreſſione arithmeticâ, denſitates erunt in progreſſione geometricâ, ideoque diſtantiæ ſunt ut denſitatum logarithmi, quia creſcentibus diſtantiis in progreſſione arithmeticâ, decreſcunt denſitates in progreſſione geometricâ. Quia vero *per experimenta conſtat, quod denſitas aëris*, cæteris paribus ac potiſſimum manente eodem caloris gradu, *ſit ut vis comprimens vel accuratè vel ſaltem quam proximè* in aëre quem experimentis poſſumus ſubjicere, vis autem aërem inferiorem comprimens, cæteris etiam paribus, æqualis ſit ponderi aëris totius incumbentis, ideoque proportionalis altitudini mercurii in barometro, & præterea particularum aëris gravitas, in minoribus ſaltem à telluris ſuperficie diſtantiis, conſtans cenſeri poſſit, patet, quod, cæteris paribus, aëris denſitatem, ad hujuſmodi diſtantias minores, metiri poſſimus per logarithmos. Sed de his plura videre eſt in elementis aërometriæ Clar. Wolfii, in libro 2°. phoronomiæ, & in ſectione 10ª. Hydrodynamicæ Clar. Danielis Bernoulli. 177

ta ratio vis eadem cum quadruplicatâ ratione densitatis. Quo in casu, si gravitas est reciprocè ut quadratum distantiæ à centro, densitas erit reciprocè ut cubus distantiæ. Fingatur quod cubus vis comprimentis sit ut quadrato-cubus densitatis, & si gravitas est reciprocè ut quadratum distantiæ, densitas erit reciprocè in sesquiplicatâ ratione distantiæ. Fingatur quod vis comprimens sit in duplicatâ ratione densitatis, & gravitas reciprocè in ratione duplicatâ distantiæ, & densitas erit reciprocè ut distantia. (a) Casus omnes percurrere longum esset. Cæterum per experimenta constat quod densitas aëris sit ut vis comprimens vel accuratè vel saltem quam proximè: & propterea densitas aëris in atmosphærâ terræ est ut pondus aëris totius incumbentis, id est, ut altitudo mercurii in barometro.

(a) 178. * *Casus omnes percurrere longum esset;* Satius erit generalem formulam tradere, ex quâ singuli casus pro lubitu eruantur. Iisdem igitur, quæ supra, positis, sit distantia variabilis $SC = x$, altitudo $CD = dx$, densitas $CK = y$, vis tota comprimens in loco $C = v$, vis gravitatis ibidem $= g$; & erit gravitas specifica in eodem loco ut gy (174), & hæc ducta in altitudinem evanescentem CD seu dx conficient momentum pressionis $gydx = -dv$. Sumitur autem fluxio dv negativè, quod crescente distantiâ x, pondus incumbens v decrescat.



Sit gravitas g ut $\frac{1}{x^m}$, densitas y ut vis comprimentis dignitas v^n, ideoque $y^{\frac{1}{n}}$ ut v, & sumptis fluxionibus $\frac{1}{n} y^{\frac{1-n}{n}} dy$ ut dv. Loco g & dv substituantur hi valores in æquatione $gydx = -dv$, & fiet $\frac{ydx}{x^m} = -\frac{1}{n} y^{\frac{1-n}{n}} dy$ seu $-\frac{dx}{x^m} = \frac{1}{n} y^{\frac{1-2n}{n}} dy$. His vero æquationibus, non æqualitates, sed proportiones tantum exponimus, & ideo coefficientes datas negligimus.

Si in ultimâ æquatione ponatur $n = 1$, id est, densitas vi comprimenti proportionalis, erit $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x^m}$. Sumantur quantitates $\frac{1}{x^{m-1}}$ in progressione arithmeticâ; & earum fluxiones, seu differentiæ nascentes $-\frac{(m-1)dx}{x^m}$, ideoque & $\frac{-dx}{x^m}$ constantes erunt, & propterea quantitates $\frac{dy}{y}$ etiam datæ; ac proinde densitates y suis differentiis dy proportionales, erunt con-

continuè proportionales (per lem. II. lib. II.). Si in eadem hypothesi ponatur $m=1$, fit $\frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x}$; unde si capiantur quantitates $\frac{dx}{x}$ constantes, seu distantiæ x in progressione geometricâ, erunt etiam quantitates $\frac{dy}{y}$ constantes, & ideo densitates y in progressione geometricâ. Prorsus ut in prop. XXII, XXI. & initio scholii hujus demonstratum est. Sumptis fluentibus, æquatio $\frac{1}{n}y^{\frac{1-2n}{n}}dy=-\frac{dx}{x^m}$ in hanc abit $\frac{1}{1-n}y^{\frac{1-n}{n}}=\frac{1}{m-1}x^{1-m}+Q$. *const.* in quâ non potest esse $m=1$, nec $n=1$, neque $n=0$, ut patet. Ut autem determinetur valor constantis Q, primum definienda est altitudo SF, ubi densitas y evanescit. Nam si altitudo illa finita est & dicatur $=a$, positâ $y=0$, habebitur $Q=\frac{-1}{m-1}a^{1-m}$, & hinc $\frac{1}{1-n}y^{\frac{1-n}{n}}=\frac{x^{1-m}-a^{1-m}}{m-1}=\frac{a^{1-m}-x^{1-m}}{m-1}$, in qua æquatione debet esse $\frac{1-n}{n}$ numerus positivus, seu n numerus positivus unitate minor, ut crescentibus distantiis x, decrescant densitates y, & contra. Si altitudo SF ad quam densitas y evanescit, infinita supponatur, erit constans $Q=0$, ac proinde æquatio $\frac{1}{1-n}y^{\frac{1-n}{n}}=\frac{1}{m-1}x^{1-m}$. Nam si in æquatione $\frac{1}{1-n}y^{\frac{1-n}{n}}=\frac{x^{1-m}-a^{1-m}}{m-1}$, ponatur y nulla & x infinita, quantitas constans a erit infinita, contra hypothesim.

Jam vero si gravitas est reciprocè ut quadratum distantiæ, id est si $m=2$, æquatio $\frac{1}{1-n}y^{\frac{1-n}{n}}=\frac{1}{m-1}x^{1-m}$ in hanc migrat $\frac{1}{1-n}y^{\frac{1-n}{n}}=\frac{1}{x}$, unde est y ut $x^{\frac{n}{1-n}}$ reciprocè. Fingatur quod cubus vis comprimentis sit ut quadrato-quadratum densitatis, seu y^4 ut v^3, ideoque y ut $v^{\frac{3}{4}}$, & hinc $n=\frac{3}{4}$; & erit $x^{\frac{1}{1-n}}=x^3$, ac proinde densitas y ut x^3 reciprocè, seu densitas, reciprocè ut cubus distantiæ. Fingatur quod cubus vis comprimentis sit ut quadrato-cubus densitatis, hoc est, y^5 ut v^3, adeoque y ut $v^{\frac{3}{5}}$, & hinc $n=\frac{3}{5}$; & erit y ut $x^{\frac{3}{2}}$ reciprocè, id est, densitas reciprocè in sesquiplicatâ ratione distantiæ. Fingatur quod vis comprimens sit in duplicatâ ratione densitatis, seu y ut $v^{\frac{1}{2}}$; & hinc erit $n=\frac{1}{2}$, ac proinde y ut x reciprocè, sive densitas est reciprocè ut distantia. Quæ Newtonus in scholio dixerat. Vide monumenta Academiæ Regiæ scientiarum anni 1716, ubi hanc materiam tractat Varignonius, quem hic sumus sequuti.

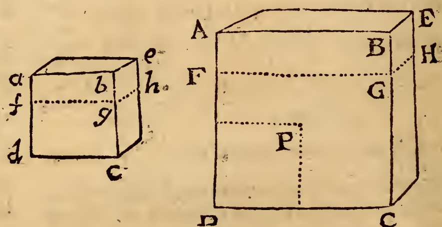
LIBER SECUND. SECT. V. PROP. XXII. THEOR. XVI.

178.

PROPOSITIO XXIII. THEOREMA XVII.

Si fluidi ex particulis se mutuo fugientibus compositi densitas sit ut compressio, vires centrifugæ particularum sunt reciprocè proportionales distantiis centrorum suorum. Et vice versâ, particulæ viribus quæ sunt reciprocè proportionales distantiis centrorum suorum se mutuo fugientes componunt fluidum elasticum, cujus densitas est compressioni proportionalis.

Includi intelligatur fluidum in spatio cubico *A C E*, dein compressione redigi in spatium cubicum minus *a c e*; & particularum, similem situm inter se in utroque spatio obtinentium, (b) distantiæ erunt ut cuborum latera *A B*, *a b*; & (c) mediorum densitates reciprocè ut spatia continentia *A B cub.* & *a b cub.* In cubi majoris latere plano *A B C D* capiatur quadratum *D P* æquale lateri plano cubi minoris *d b*; & ex hypothesi, pressio, quâ quadratum *D P* urget fluidum inclusum, erit ad pressionem, quâ illud quadratum *d b* urget fluidum inclusum, ut medii densitates ad invicem, hoc est, ut *a b cub.* ad *A B cub.* Sed pressio, quâ quadratum *D B* urget fluidum inclusum, est ad pressionem, quâ quadratum *D P* urget idem fluidum, ut quadratum *D B* ad quadratum *D P*, hoc est, ut *A B quad.* ad *a b quad.* Ergo, ex æquo, pressio quâ quadratum *D B* urget fluidum, est ad pressionem quâ quadratum *d b* urget fluidum, ut *a b* ad *A B*. Planis *F G H*, *f g h*, per media cuborum ductis, distinguatur fluidum in duas partes, & hæ (d) se mutuo prement iisdem viri-



(b) * *Distantiæ erunt ut cuborum latera A B, a b*, per lemma V. lib. I.

(c) * *Et mediorum densitates, ut &c.* ob datam in utroque spatio fluidi massam (2. lib. 1.).

(d) * *Et hæ se mutuo prement iisdem viribus &c.* Pressiones enim in unoquoque spatio sunt ubique æquales; nam cum fluidum uniforme supponatur, si pressio minor esset in uno loco quam in alio, sta-

viribus, quibus premuntur à planis *AC*, *ac*, hoc eſt, in proportione *ab* ad *AB*: ideoque vires centrifugæ, quibus hæ preſſiones ſuſtinentur, ſunt in eâdem ratione. Ob eundem particularum numerum ſimilemque ſitum in utroque cubo, vires quas particulæ omnes ſecundum plana *FGH*, *fgh* exercent in omnes, ſunt ut vires quas ſingulæ exercent in ſingulas. Ergo vires, quas ſingulæ exercent in ſingulas ſecundum planum *FGH* in cubo majore, ſunt ad vires, quas ſingulæ exercent in ſingulas ſecundum planum *fgh* in cubo minore, ut *ab* ad *AB*, hoc eſt, reciprocè ut diſtantiæ particularum ad invicem. *Q. E. D.*

Et vice verſâ, ſi vires particularum ſingularum ſunt reciprocè ut diſtantiæ, id eſt, reciprocè ut cuborum latera *AB*, *ab*; ſummæ virium erunt in eâdem ratione, & preſſiones laterum *DB*, *db* ut ſummæ virium; & preſſio quadrati *DP* ad preſſionem lateris *DB* ut *ab quad.* ad *AB quad.* Et, ex æquo, preſſio quadrati *DP* ad preſſionem lateris *db* ut *ab cub.* ad *AB cub.* id eſt, vis compreſſionis ad vim compreſſionis ut denſitas ad denſitatem. *Q. E. D.*

Scholium.

(e) Simili argumento, ſi particularum vires centrifugæ ſint reciprocè in duplicatâ ratione diſtantiarum inter centra, cubi virium comprimentium erunt ut quadrato-quadrata denſitatum. Si

ſtatim cederet fluidum magis preſſum, atque ita preſſio ad æqualitatem reſtitueretur, ut in caſu 6°. prop. XIX.

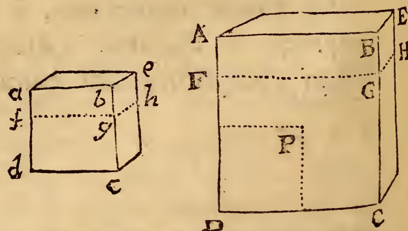
(e) * *Simili argumento &c.* Sunto *D* & *d* particularum diſtantiæ in ſpatiis cubicis ACE & ace que ſunt ut AB & ab, earumdem vires centrifugæ ut D^n & d^n reciprocè, fluidi denſitates *E* & *e*; & vires comprimentes erunt ut $E^{\frac{n+2}{3}}$ & $e^{\frac{n+2}{3}}$. Nam cum ſummæ virium quas omnes ſimul particulæ exercent in latera DB, db, ſint ut ſingularum particularum vires erunt iſtæ ſummæ virium ut D^n & d^n reciprocè, ſeu ut ab^n & AB^n directè; & preſſio quadrati DP ad preſſionem quadrati DB ut ab^2 ad AB^2; unde ex æquo preſſio quadrati DP ad preſſionem quadrati db, hoc eſt, vis comprimens in ſpatio ACE ad vim comprimentem in ſpatio ace, ut ab^{n+2} ad AB^{n+2}. Sint autem denſitates, ſive eſt *E* ad *e*, ut ab^3 ad AB^3, & 178

De Motu Corporum.

Si vires centrifugæ ſint reciprocè in triplicatâ vel quadruplicatâ ratione diſtantiarum, cubi virium comprimentium erunt ut quadrato-cubi vel cubo-cubi denſitatum. Et univerſaliter, ſi D ponatur pro diſtantiâ, & E pro denſitate fluidi compreſſi, & vires centrifugæ ſint reciprocè ut diſtantiæ dignitas quælibet D^n, cujus index eſt numerus n; vires comprimentes erunt ut latera cubica dignitatis E^{n+2}, cujus index eſt numerus $n+2$: & contra. Intelligenda vero ſunt hæc omnia de particularum viribus centrifugis quæ terminantur in particulis proximis, aut non longè ultra diffunduntur. Exemplum habemus in corporibus magneticis. Horum virtus attractiva terminatur ferè in ſui generis corporibus ſibi proximis. Magnetis virtus per interpoſitam laminam ferri contrahitur, & in laminâ ferè terminatur. Nam corpora ulteriora non tam à magnete quam à laminâ trahuntur. Ad eundem modum ſi particulæ fugant alias ſui generis particulas ſibi proximas, in particulas autem remotiores virtutem nullam exerceant, ex hujuſmodi particulis componentur fluida de quibus actum eſt in hâc propoſitione. Quod ſi particulæ cujuſque virtus in infinitum propagetur, (f) opus erit vi majori ad æqualem condenſationem majoris

ideo $E^{\frac{n+2}{3}}$ ad $e^{\frac{n+2}{3}}$ ut ab^{n+2} ad AB^{n+2}. Quare vires comprimentes ſunt ut $E^{\frac{n+2}{3}}$ & $e^{\frac{n+2}{3}}$. Q. E. D.

Et vice verſâ, ſi vires comprimentes ſunt ut denſitatum dignitates $E^{\frac{n+2}{3}}$, $e^{\frac{n+2}{3}}$; ſeu ut ab^{n+2}, AB^{n+2}; erit preſſio quadrati DP ad preſſionem quadrati db in eâdem ratione, & preſſio quadrati DB eſt ad preſſionem quadrati DP, ut AB^2 ad ab^2; &, ex æquo, preſſio quadrati DB ad preſſionem quadrati db, ut ab^n ad AB^n, ſeu ut d^n ad D^n. Sunt autem vires particularum ſingularum ut ſummæ virium, hoc eſt, ut preſſiones laterum DB, db; quare vires particularum centrifugæ ſunt reciprocè ut diſtantiarum dignitates D^n, d^n. Q. E. D.



Jam ſi loco n ſcribantur numeri 2, 3, &c., patet veritas eorum quæ initio ſcholii dixit Newtonus.

(f) * *Opus erit vi majori &c.* Non enim ſolum vincenda erit per compreſſionem vis centrifuga particularum proximarum, ſed & remotiorum vis erit ſuperanda quæ (ex hyp.) in infinitum propagatur.

joris quantitatis fluidi. An vero fluida elastica ex particulis se mutuo fugantibus constent, quæstio physica est. Nos proprietatem fluidorum ex ejusmodi particulis constantium mathematicè demonstravimus, ut philosophis ansam præbeamus quæstionem illam tractandi.

SECTIO VI.

De motu & resistentiâ corporum funependulorum.

(g) PROPOSITIO XXIV. THEOREMA XIX.

Quantitates materiæ in corporibus funependulis, quorum centra oscillationum à centro suspensionis æqualiter distant, sunt in ratione compositâ ex ratione ponderum & ratione duplicatâ temporum oscillationum in vacuo.

Nam velocitas, quam data vis in datâ materiâ, dato tempore generare potest, est ut vis & tempus directè, & materia inversè. Quo major est vis vel majus tempus vel minor materia, eo major generabitur velocitas. Id quod per motus legem

(g) * *Propositio XXIV.* In hâc propositione & ejus corollariis supponitur corpora funependula, quæ comparantur, in cycloidibus aut saltem in exiguis magni circuli arcubus oscillari. * Pondera autem corporum hic duplici de causâ à materiâ ipsorum distinguuntur; primo, quod nondum assumi possit gravitatem agere secundum rationem massarum, cum id ipsum ex isto Theoremate postea deducatur, cor. 7.; & secundo, in diversis locis gravitas diversa esse potest (ut quidem ex experimentis constat) ideoque corporum duorum in diversis iis locis spectatorum ratio materiæ eadem manebit, non verò ratio ponderum. 178.

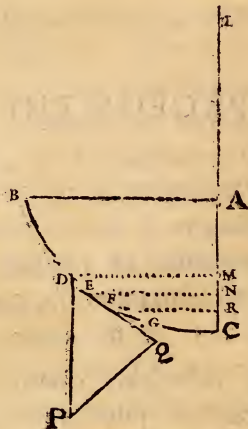
gem secundam manifestum est. (h) Jam verò si pendula ejusdem sint longitudinis, vires motrices in locis à perpendiculo æqualiter distantibus sunt ut pondera: ideoque si corpora duo oscillando describant arcus æquales, & arcus illi dividantur in partes æquales; cum (i) tempora quibus corpora describant singulas arcuum partes correspondentes sint ut tempora oscillatio-

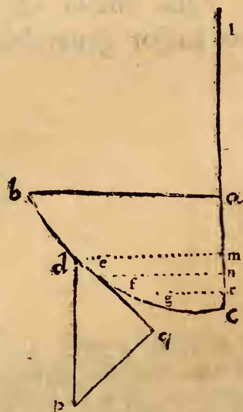
(h) *Jam verò si pendula ejusdem sint longitudinis, vires motrices in locis à perpendiculo æqualiter distantibus sunt ut Pondera.*

* Nam si Pendula ejusdem sint longitudinis, Cycloides plane similes & æquales describent: In unaquàque autem Cycloide, vires quibus corpora in locis quibusvis D, vel d accelerantur, sunt ad totum singuli corporis pondus in locis altissimis, ut arcus Cycloidis inter loca proposita D, d & puncta infima C, c, ad totas semi Cycloides (Cor. Prop. LII. Lib. 1.) Ergo si semicycloides sint æquales & loca D & d à perpendiculo æqualiter distent, arcus DC & dc erunt æquales, ideoque vis quâ corpus acceleratur in primâ Cycloide in puncto D, erit ad totum ejus corporis pondus, ut vis quâ corpus acceleratur in alterâ Cycloide in puncto d, ad totum ejus corporis pondus. Unde vicissim, vis quâ acceleratur primum corpus in puncto D, est ad vim quâ alterum acceleratur in puncto d, ut totum prioris corporis pondus, ad pondus alterius corporis, ideoque *si pendula sint ejusdem longitudinis vires motrices &c.* Q. E. D.

(i) *Cum tempora quibus corpora describant singulas arcuum partes* (æquales) *correspondentes sint ut tempora oscillationum totarum.*

* Sint arcus DC, dc æquales, secenturque in partes æquales infinite parvas DE, EF &c.; de, ef &c., ex punctis D, E, F & d, e, f, ducantur perpendiculares ad axem, DM, EN, FR; Dm, en, fr; liquet lineolas MN & mn, MR & mr ex hypothesi fore æquales; Ex naturâ autem gravitatis, velocitas acquisita in E erit ad velocitatem acquisitam in F ut Radix altitudinis MN ad Radicem MR, & pariter velocitas acquisita in e, erit ad velocitatem acquisitam in f ut $\sqrt{mn}$ ad $\sqrt{mr}$, cum er-





go $\sqrt{MN} = \sqrt{mn}$ & $\sqrt{MO} = mo$ velocitas acquisita in E est ad velocitatem acquisitam in F, ut velocitas acquisita in e est ad velocitatem acquisitam in f, & vicis-

lationum totarum, (†) erunt velocitates ad invicem in correspondentibus oscillationum partibus, ut vires motrices & tota oscillationum tempora directè & quantitates materiæ reciprocè: ideoque quantitates materiæ ut vires & oscillationum tempora directè & velocitates reciprocè. (‡) Sed velocitates reciprocè sunt ut tempora, atque ideo tempora directè & velocitates reciprocè sunt ut quadrata temporum, & propterea quantitates materiæ sunt ut vires motrices & quadrata temporum, id est, ut pondera & quadrata temporum. (††) *Q. E. D.* *Co-*

vicissim velocitas acquisita in E, est ad velocitatem acquisitam in e; ut velocitas acquisita in F est ad velocitatem acquisitam in f. Sed quoniam arcus EF & ef FG & fg, sunt infinite parvi & æquales, uniformiter describi censendi sunt, & tempora quibus describuntur erunt in ratione reciprocâ velocitatum, ideoque tempus quo describitur EF est ad tempus quo describitur ef, ut velocitas in e ad velocitatem in E, & tempus quo describitur FG est ad tempus quo describitur fg, ut velocitas in f ad velocitatem in F &c. sed rationes velocitatum in E & e, in F & f &c. sunt semper æquales inter se, ergo & rationes temporum quæ istarum sunt inversæ sunt æquales inter se; ergo tempora quibus singulæ partes arcus DC describuntur, sunt ad tempora quibus correspondentes partes arcus dc describuntur, in eâdem ratione, ergo omnes antecedentes & omnes consequentes summando, omnia simul tempora quibus percurruntur omnes partes arcus DC, hoc est, totum tempus oscillationis per DC, est ad omnia tempora quibus partes arcus dc percurruntur, hoc est ad totum tempus oscillationis per dc ut tempus unum quo quædam pars arcus DC percurritur, est ad tempus quo pars correspondens arcus dc percurritur. Q. E. D.

(†) *Erunt velocitates ad invicem in correspondentibus oscillationum partibus, ut vires motrices & tota oscillationum tempora directè & quantitates materiæ reciprocè.* * Ex demonstratione notæ superioris liquet velocitates in correspondentibus partibus esse omnes in eâdem ratione, ideoque ut velocitas acquisita in E ad velocitatem acquisitam in e, sed cum arcus DE & de infinite parvi supponantur, censendum est, vires motrices uniformiter agere, dum illi arcus percurruntur, motus ergo per eas productus crescet tam pro ratione virium ipsarum quam pro ratione temporis quo arcus illi describuntur sive (ex demonstratis) pro ratione temporum oscillationum integrarum, motus verò ex Def. 2. lib. 1. æstimatur à Newtono ex velocitate & materiâ conjunctim, ergo velocitates productæ in *correspondentibus oscillationum partibus erunt ut vires motrices & tota oscillationum tempora directè & quantitates materiæ inversè.* 178.

(‡) *Sed velocitates sunt reciprocè ut tempora.* * Ex demonstratis (ad notam superiorem i) liquet velocitatem acquisitam in E esse ad velocitatem acquisitam in e ut velocitas acquisita in puncto quovis arcus DC ad velocitatem acquisitam in puncto correspondenti arcus dc; Ex eâdem demonstratione liquet velocitatem acquisitam in E esse ad velocitatem acquisitam in e, in ratione reciprocâ temporum quibus describuntur arcus EF, & ef; hæc verò tempora esse ut tempora oscillationum integrarum, unde velocitas acquisita in puncto quovis arcus DC, est ad velocitatem acquisitam in puncto correspondenti arcus de, in ratione reciprocâ temporum oscillationum totarum. Q. E. D.

(††) *Quod Erat Demonstrandum.* * In demonstratione probatum est quod si describantur arcus æquales DC, dc quantitates materiæ sunt ut pondera & quadra-

Corol. 1. Ideoque si tempora sunt æqualia, quantitates materiæ in singulis corporibus erunt ut pondera.

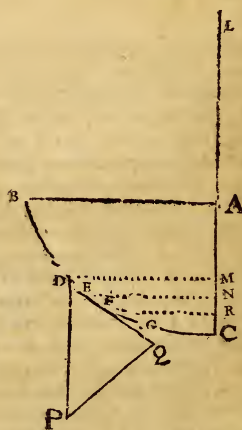
Corol. 2. Si pondera sunt æqualia, quantitates materiæ erunt ut quadrata temporum.

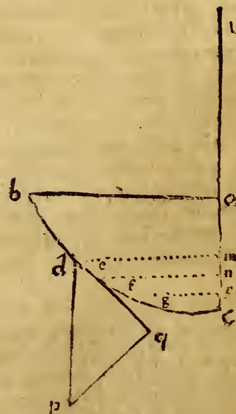
Corol. 3. Si quantitates materiæ æquantur, pondera erunt reciprocè ut quadrata temporum.

Corol. 4. Unde (k) cum quadrata temporum, cæteris paribus, sint ut longitudines pendulorum; si & tempora & quantita-

drata temporum, sumatur jam arcus b c major vel minor arcu d c sed quantitates materiæ & pondera utrinque maneant eadem quæ prius, & pariter ob Isochroneitatem curvæ b d c, tempus oscillationis per b c, æquale erit tempori oscillationis per d c, ideoque quicunque sint arcus descripti si modo maneat penduli longitudo, eademque sit utrinque cyclois, pariter verum erit quod quantitates materiæ sunt ut pondera & quadrata temporum oscillationum.

(k) *Unde cum quadrata temporum cæteris paribus sint ut longitudines pendulorum.* * Fingatur L C, l c inæqualia esse, & arcus D C, d c non sumi æquales ut prius, sed similes, sive proportionales longitudinibus L C, l c, secetur D C in partes æquales inter se, & d c in partes similes, ita ut sit D E ad d e ut L C ad l c ductisque perpendiculis D M, E N, d m, e n &c. liquet ex similitudine figurarum altitudines M N & m n, M R & m r &c, esse etiam inter se in ratione L C ad l c, velocitates verò quibus describuntur arcus E F, F G sunt ut $\surd$ M N ad $\surd$ M R, & velocitates quibus describuntur arcus e f, f g sunt ut $\surd$ m n ad $\surd$ m r, sed quia M N & m n, M R & m r, sunt in eâdem ratione ideoque & earum radices, vicissim, velocitas quâ describitur E F est ad velocitatem quâ describitur e f, ut velocitas quâ describitur F G ad velocitatem quâ describitur f g; & sic ordine perpetuo demonstrabitur velocitates quibus successivæ partes correspondentes utriusque curvæ percurruntur fore semper in eâdem ratione; tempora verò quibus arcus similes describuntur sunt directè ut illi arcus & inversè ut velocitates; ergo cum ratio





titates materiæ æqualia sunt, (l) pondera erunt ut longitudines pendulorum. LIBER SECUNDUS. SECT. VI. PROP. XXIV. THEOR. XIX.

Corol. 5. Et (m) universaliter, quantitas materiæ pendulæ est ut pondus & quadratum temporis directè, & longitudo penduli inversè.

Corol. 6. Sed & in medio non resistente quantitas materiæ pendulæ est ut pondus comparativum & quadratum temporis directè & longitudo penduli inversè. Nam pondus comparativum est vis motrix corporis in medio quovis gravi, ut (n) supra explicui; ideoque idem præstat in tali medio non resistente atque pondus absolutum in vacuo. *Co-*

tio arcuum correspondentium sit semper eadem, nempe ratio L C ad l c, ut & ratio velocitatum quibus percurruntur illi arcus, singula tempuscula quibus describuntur particulæ arcus D C eamdem rationem habebunt ad tempuscula quibus correspondentes particulæ arcus d c percurruntur; ideoque tempora tota oscillationum per D C & d c erunt directè ut longitudines L C & l c, & inversè ut velocitates in punctis quibusvis correspondentibus arcuum D C & d c, putà in punctis infimis C & c, sed quia ex hypothesi quod pondera sunt æqualia, & quantitates materiæ sunt æquales velocitates sunt proportionales Radicibus quadratis altitudinum, velocitates in punctis C & c erunt ut $\sqrt{MC}$ & $\sqrt{mc}$ sed ex similitudine curvarum & arcuum est m c ad M C sicut l c ad L C, ergo velocitates in punctis C & c sunt ut $\sqrt{LC}$ ad $\sqrt{lc}$, ideoque tempora oscillationum integrarum in arcubus DC, d c erunt ut $\frac{LC}{\sqrt{LC}}$ ad $\frac{lc}{\sqrt{lc}}$, unde quadrata temporum erunt ut $\frac{LC^2}{LC}$ ad $\frac{lc^2}{lc}$ sive ut L C ad l c, hoc est ut longitudines pendulorum. Q. E. D.

(l) * *Pondera erunt ut longitudines pendulorum, & universaliter quantitas materiæ Pendulæ est ut pondus & quadratum temporis directè & longitudo Penduli inversè.* * Sint duo pendula A & B, quæ materiâ, pondere & oscillationum temporibus discrepent, sed æqualis sint longitudinis; ex Theoremate, erit quantitas materiæ pendulæ in A ad quantitatem materiæ pendulæ in B, ut pondus & quadratum temporis oscillationum penduli A conjunctim ad pondus & quadratum temporis oscillationum penduli B conjunctim; sit tertium pendulum C, cujus materia & pondus eadem sint cum materiâ & pondere penduli B, diversa verò sit utriusque longitudo, longitudo penduli C erit ad longitudinem penduli B (sive penduli A, perinde enim est ex hypothesi) ut quadratum temporis in Pendulo C ad quadratum temporis in pendulo B, quod itaque æquale erit quadrato temporis in pendulo C, per longitudinem penduli A multiplicato & per longitudinem penduli C diviso; Unde quantitas materiæ in A erit ad quantitatem materiæ in B sive in C, ut pondus & quadratum temporis in A conjunctim ad pondus in B, sive in C, cum quadrato temporis in C & longitudine penduli A directè & longitudine penduli C inversè: unde liquet quantitatem materiæ in A esse ad quantitatem materiæ in C, ut pondus & quadratum temporis in pendulo A directe & ejus longitudo inversè ad pondus & quadratum temporis penduli C directè & ejus longitudinem inversè. Q. E. D. *universaliter.* 178.

Unde si & tempora & quantitates materiæ eadem sunt, pondera sunt ut longitudines pendulorum directe.

(m) * *Et universaliter.* Vide Notam superiorem.

(n) * *Ut supra explicui*, in cor. VI. & VIII. prop. XX.

Corol. 7. Et (o) hinc liquet ratio tum comparandi corpora inter se, quoad quantitatem materiæ in singulis; tum comparandi pondera ejusdem corporis in diversis locis, (p) ad cognoscendam variationem gravitatis. Factis autem experimentis quam accuratissimis inveni semper quantitatem materiæ in corporibus singulis eorum ponderi proportionalem esse.

PROPOSITIO XXV. THEOREMA XX.

Corpora funependula quibus, in medio quovis, resistitur in ratione momentorum temporis, & corpora funependula quæ in ejusdem gravitatis specificæ medio non resistente moventur, oscillationes in cycloide eodem tempore peragunt, & arcuum partes proportionales simul describunt.

Sit AB cycloidis arcus, quem corpus D tempore quovis in medio non resistente oscillando describit. Bisecetur idem in C, ita ut C sit infimum ejus punctum; & erit vis acceleratrix quâ corpus urgetur in loco quovis D vel d vel E ut (q) longitudo

(o) * *Et hinc liquet ratio &c.* Nam ex datis pendulorum longitudinibus, oscillationum temporibus, & ponderibus corporum, datur ratio quantitatum materiæ in illis corporibus (per cor. V.); & contra.

(p) * *Ad cognoscendam variationem gravitatis.* Ubi enim ejusdem penduli oscillationes tardiores sunt, gravitatis actio, cæteris paribus, minor est, cum in eodem pendulo pondera sint reciprocè ut quadrata temporum (per cor. III.). Sed de his plura ad prop. XX. lib. III. dicentur. Quanta autem in illis experimentis adhibenda sit diligentia, Clariss. D. de Mairan eâ quâ solet perspicuitate & elegantiâ exponit in monumentis Acad. Reg. Scient. an. 1735.

179. Quia numeri oscillationum æqualibus temporibus à diversis pendulis absolvendarum sunt reciprocè ut tempora quibus singulæ oscillationes fiunt (473. lib. 1.), numeri oscillationum æqualibus temporibus peractarum erunt (per cor. V. prop. hujus) in compositâ ratione ex ratione subduplicata directa ponderum & subduplicatis rationibus inversis massarum & longitudinum pendulorum; sive, quoniam pondus est ut factum ex massâ in vim gravitatis acceleratricem, erunt prædicti oscillationum numeri in ratione subduplicata directa virium gravitatis acceleratricium & ratione subduplicatâ longitudinum pendulorum inversâ; ac proinde pendulorum inæqualium, sed eâdem vi gravitatis agitatorum, numeri oscillationum eodem tempore absolvendarum sunt in reciprocâ subduplicatâ ratione longitudinum pendulorum, & numeri oscillationum in duobus pendulis æqualibus erunt in subduplicatâ ratione virium gravitatis. Hæc est regula quam ad comparandas corporum gravitates tradit Joh. Bernoulli in actis erudit. Lips. an. 1713.

(q) * *Ut longitudo arcus &c.* Per demonstr. Prop. LI. & cor. II. Prop. LII. Lib. I.

do arcus *CD* vel *Cd* vel *CE*. Exponatur vis illa per eundem arcum; & cum resistentia sit ut momentum temporis, ideoque detur, exponatur eadem per datam arcus cycloidis partem *CO*, & sumatur arcus *Od* in ratione ad arcum *CD* quam habet arcus *OB* ad arcum *CB*: & vis quâ corpus in *d* urgetur in medio resistente, cum sit excessus vis *Cd* supra resistentiam *CO*, exponetur per arcum *Od*, ideoque erit ad vim, quâ corpus *D* urgetur in medio non resistente in loco *D*, ut arcus *Od* ad arcum *CD*; & propterea etiam in loco *B* ut arcus *OB* ad arcum *CB*. Proinde si corpora duo, *D*, *d* exeant de loco *B*, & his viribus urgeantur: cum vires sub initio sint ut arcus *CB* & *OB*; (r) erunt velocitates primæ & arcus primo descripti in eâdem ratione. Sunto arcus illi *BD*, & *Bd*, arcus reliqui *CD*, *Od* erunt in eâdem ratione. Proinde vires, ipsis *CD*, *Od* proportionales manebunt in eâdem ratione ac sub initio, & propterea corpora pergent arcus in eâdem ratione simul describere. Igitur vires & velocitates & arcus reliqui *CD*, *Od* semper erunt ut arcus toti *CB*, *OB*, &



(r) * *Erunt velocitates primæ &c.* Nam, dato temporis momento, velocitates genitæ sunt ut vires (13. lib. 1.) & ut spatia descripta (per cor. 4. lem. X. lib. 1.)

 179

De Motu Corporum.

& propterea arcus illi reliqui (f) ſimul deſcribentur. Quæ corpora duo *D*, *d* ſimul pervenient ad loca *C* & *O*, alterum quidem in medio non reſiſtente ad locum *C*, & alterum in medio reſiſtente ad locum *O*. Cum autem velocitates in *C* & *O* ſint ut arcus *CB*, *OB*; erunt arcus, quos corpora ulterius pergendo ſimul deſcribunt, in (t) eâdem ratione. Sunto illi *CE* & *Oe*. Vis quâ corpus *D* in medio non reſiſtente retardatur in *E* eſt ut *CE*, & vis quâ corpus *d* in medio reſiſtente retardatur in *e* eſt ut ſumma vis *Ce* & reſiſtentiæ *CO*, id eſt ut *Oe*; ideoque vires, quibus corpora retardantur, ſunt ut arcubus *CE*, *Oe* proportionales arcus *CB*, *OB*; proindeque velocitates, in datâ illâ ratione retardatæ, manent in eâdem illâ datâ ratione. Velocitates igitur & arcus iiſdem deſcripti ſemper ſunt ad invicem in datâ illâ ratione arcuum *CB* & *OB*; & (u) propterea ſi ſumantur arcus toti *AB*, *aB* in eâdem ratione, corpora *D*, *d* ſimul deſcribent hos arcus, & in locis *A* & *a* motum omnem ſimul amittent. Iſochronæ ſunt igitur oſcillationes totæ, & arcubus totis *BA*, *Ba* proportionales ſunt arcuum partes quælibet *BD*, *Bd* vel *BE*, *Be* quæ ſimul deſcribuntur. *Q. E. D.*

Corol. Igitur motus velociſſimus in medio reſiſtente non incidit in punctum infimum *C*, ſed (x) reperitur in puncto illo *O*, quo arcus totus deſcriptus *aB* biſecatur. Et corpus ſubinde pergendo ad *a*, iiſdem gradibus retardatur quibus antea accelerabatur in deſcenſu ſuo à *B* ad *O*.

PRO-

(f) * *Simul deſcribentur.* Quia enim eſt ſemper CB ad OB, ut CD ad Od; evaneſcente arcu Od, evaneſcet etiam arcus CD, ſeu punctum d cum O, & D cum C ſimul coincident.

(t) * *In eâdem ratione.* Sunt enim velocitates, ut ſpatia dato temporis momento deſcripta, tam in medio reſiſtente quam in medio non reſiſtente (11.)

(u) * *Et propterea.* Si ſumatur arcus AC æqualis CB, & deinde arcus aB ad arcum AB in datâ ratione OB ad CB; corpora D & d ſimul deſcribent hos arcus, & in locis A & a motum omnem ſimul amittent. Nam cum ſit ſemper arcus CE ad Oe ut CB ad OB, ſeu ut CA ad Oa, ubi arcus CE æqualis evadet arcui CA, fiet quoque arcus Oe æqualis arcui Ca; & quia motus in medio non reſiſtente extinguitur in A, ob CA = CB; in medio reſiſtente extinguetur quoque in a, eo quod velocitates in locis E, e & A, a ſint in datâ ratione.

(x) * *Sed reperitur in puncto illo O, quo &c.* Nam ratio velocitatum in mediis reſiſtente & non reſiſtente eſt ſemper

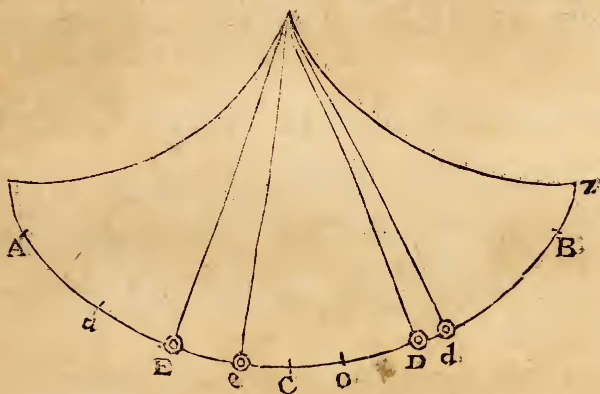
eadem;

PROPOSITIO XXVI. THEOREMA XXI.

LIBER SECUND. SECT. VI. PROP. XXVI. THEOR. XXI.

Corporum funependulorum, quibus reſiſtitur in ratione velocitatum, oſcillationes in cycloide ſunt Iſochronæ.

(y) Nam ſi corpora duo, à centris ſuſpenſionum æqualiter diſtantia oſcillando deſcribant arcus inæquales, & velocitates in arcuum partibus correſpondentibus ſint ad invicem ut arcus



eadem in punctis correſpondentibus, ut in d & D, in O & C, in e & E; ſed corporis in medio non reſiſtente oſcillantis velocitas maxima eſt in loco infimo C, & iiſdem gradibus retardatur in aſcenſu, quibus antea accelerabatur in deſcenſu; quare motus velociſſimus in medio reſiſtente reperitur in O, & iiſdem deinde gradibus retardatur in aſcenſu, quibus ante accelerabatur in deſcenſu.

(y) * *Nam ſi corpora duo*, exempli causâ B & D (vide fig. ſup.) *à centro ſuſpenſionis æqualiter diſtantia, oſcillando deſcribant arcus inæquales* B a, D e, *& velocitates in arcuum partibus correſpondentibus*; ſeu in arcuum B a, D e quadrantibus, partibus tertiis &c., *ſint ad invicem ut arcus toti* B a, D e: *reſiſtentiæ velocitatibus proportionales, erunt etiam ad invicem ut iidem arcus. Proinde ſi viribus motricibus à gravitate oriundis* (ſecundùm tangentes cycloïdis agentibus) *quæ ſint ut iidem arcus* B a, D e, *auferantur* dum corpus deſcendit, *vel addantur* dum corpus aſcendit, *hæ reſiſtentiæ; erunt differentiæ vel ſummæ ad invicem in eâdem arcuum ratione: cumque velocitatum incrementa vel decrementa*, dato temporis momento genita, *ſint ut hæ differentiæ vel ſummæ* (18), *velocitates ſemper erunt ut arcus toti* B a, D e: *igitur velocitates, ſi ſint in aliquo caſu ut arcus toti, manebunt ſemper in eâdem ratione. Sed in principio motûs, ubi corpora incipiunt* è locis B, D *deſcendere & arcus illos* B a, D e *deſcribere*, ideoque ubi reſiſtentia nulla eſt, *vires ſunt arcubus illis proportionales.* Vires igitur, & velocitates, & arcus deſcripti, ac proinde & arcus deſcribendi, manent ſemper in datâ ratione. Quare corpora duo ſimul 179.

De Moto Corporum.

arcus toti; reſiſtentiæ velocitatibus proportionales, erunt etiam ad invicem ut iidem arcus. Proinde ſi viribus motricibus à gravitate oriundis, quæ ſint ut iidem arcus, auferantur vel addantur hæ reſiſtentiæ, erunt differentiæ vel ſummæ ad invicem in eâdem arcuum ratione: cumque velocitatum incrementa vel decrementa ſint ut hæ differentiæ vel ſummæ, velocitates ſemper erunt ut arcus toti: Igitur velocitates, ſi ſint in aliquo caſu ut arcus toti, manebunt ſemper in eâdem ratione. Sed in principio motus, ut corpora incipiunt deſcendere & arcus illos deſcribere, vires, cum ſint arcubus proportionales, generabunt velocitates arcubus proportionales. Ergo velocitates ſemper erunt ut arcus toti deſcribendi, & propterea arcus illi ſimul deſcribentur. *Q. E. D.*

PROPOSITIO XXVII. THEOREMA XXII.

Si corporibus funependulis reſiſtitur in duplicatâ ratione velocitatum, differentiæ inter tempora oſcillationum in medio reſiſtente ac tempora oſcillationum in ejuſdem gravitatis ſpecificæ medio non reſiſtente, erunt arcubus oſcillando deſcriptis proportionales quam proximè.

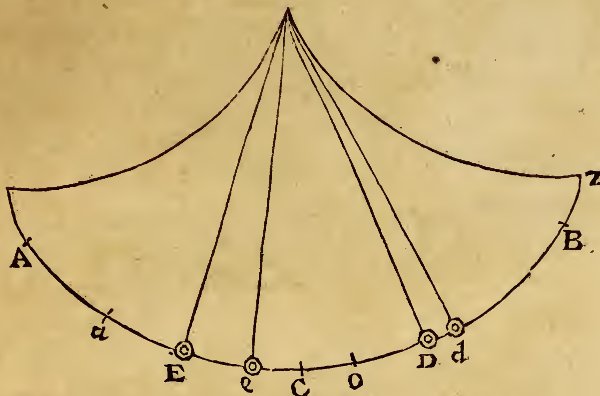
(z) Nam pendulis æqualibus in medio reſiſtente deſcribantur arcus inæquales A, B; & reſiſtentia corporis in arcu A, erit ad

ſimul perveniunt ad punctum infimum C; & eodem modo probatur quod arcus C a, C e ſimul deſcribantur.

Scholion. Newtonus in duabus propoſitionibus præcedentibus oſtendit cycloidem eſſe curvam iſochronam, (quam alii tautochronam appellant,) non tantùm in medio non reſiſtente, ſed etiam in medio quod in ratione momentorum temporis, & in medio quod ratione ſimplici velocitatis reſiſtit; Verum quænam ſit curva illa tautochrona in hypotheſi reſiſtentiæ velocitatum quadrato proportionalis non indicat. Elegantiſſimas hujuſce problematis ſolutiones dedêre celeberrimi mathematici Eulerus tom. 4. Acad. Petrop. & tom. 2. Mechanicæ, necnon Clariſſ. Bernoullius in monumentis Acad. Reg. Scientiarum Pariſ. an. 1730. Novam viam quâ curvæ tautochronæ in medio quolibet reſiſtente poſſint inveniri aperuit D. Fontaine in iiſdem monumentis anni 1734.

(z) * *Nam pendulis æqualibus in medio reſiſtente deſcribantur arcus inæquales A & B*, * ad pleniorem hujus demonſtrationis evidentiam, fingatur illos arcus in totidem partes quam minimas inter ſe æquales dividi, ſingulæ in utroque arcu erunt totis arcubus proportionales dicanturque *a* & *b*, ſi medium aut non reſiſteret aut reſiſteret in ratione velocitatum, velocitates initio particularum quarum

ad resistentiam corporis in parte correspondente arcus B, in duplicatâ ratione velocitatum, id est, ut AA ad BB, quam proximè. Si resistentia in arcu B esset ad resistentiam in arcu A ut AB ad AA, tempora in arcubus A & B forent æ- LIBER SECUND. SECT. VI. PROP. XXVII. THEOR. XXII.



qualia, per propositionem superiorem. Ideoque resistentia AA in arcu A, vel AB in arcu B, efficit excessum temporis in arcu A supra tempus in medio non resistente; & resisten-

rumvis correspondentium *a* & *b*, forent ut arcus ipsi *A* & *B*; At in medio resistente in ratione duplicatâ velocitatis paulo diversa erit hæc velocitatum ratio sed propter exiguam rationem resistentiæ ad velocitatem, negligi poterit hæc differentia, & supponi potest velocitates manere in ratione arcuum quam proxime; quod si ita supponatur *resistentia corporis in* quovis *puncto arcus A erit ad resistentiam corporis in parte correspondente arcus B*, sicut quadrata velocitatum in punctis illis correspondentibus eorum arcuum, id est ut *quadrata ipsorum arcuum A A & B B quam proximè.* Designetur vero velocitas initio arcus *a* per $v A$, & initio arcus *b* per $v B$. Designetur porro resistentia initio arcus *a* per $m A A$, & resistentia initio arcus *b* per $m B B$; In medio non resistente tempuscula quibus singulæ particulæ *a* & *b*, describentur erunt æqualia, (per Prop. II. lib 1.) designentur verò per *T*; Cum ergo in medio resistente propter velocitatem imminutam longius fiat tempus in inversâ ratione velocitatum sit *x* excessus ille tempusculi quo arcus *a* describitur in medio resistente supra tempusculum quo idem arcus in medio non resistente percurritur habebiturque ex hypothesibus $v A - m A A : v A = T : T + x$. 179.

Ut inveniatur ratio hujus excessus *x* ad excessum tempusculi quo arcus describitur in medio resistente secundum legem duplicatam velocitatis, supra tempusculum *T*, quo idem arcus in medio non resistente percurritur; supponatur arcum B in tali medio ut resistentia in punctis *a* arcûs *A*, sit ad resistentiam in punctis correspondentibus *b* arcûs *B*, sicut *A* est ad *B*, ideoque sicut velocitates initio arcuum illorum, sive cum resistentia in *a* sit $m A A$ resistentia in *b* fingatur esse $m A B$, cùm

resistentia B B efficit excessum temporis in arcu B supra tempus in medio non resistente. Sunt autem excessus illi ut vires efficientes A B & B B quam proximè, id est, ut arcus A & B. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc ex oscillationum temporibus, in medio resistente, in arcubus inæqualibus factarum, cognosci possunt tempora oscillationum in ejusdem gravitatis specificæ medio non resistente. Nam differentia temporum erit ad excessum temporis in arcu minore supra tempus in medio non resistente, ut (b) differentia arcuum ad arcum minorem. Co-

cùm ergo resistentiæ sint in ipsâ ratione velocitatum, velocitates demptis resistentiis manebunt in eâdem ratione, in ratione nempe arcuum describendorum a & b, qui ergo æqualibus temporibus describentur, sed tempus quo describitur arculus a est $T+x$ ergo si resistentia in arcu B, sive b sit mAB ideoque velocitas sit $vB-mAB$ tempus quo describetur arcus b erit etiam $T+x$.

Cum autem reverâ resistentia initio arcus b non sit mAB sed mBB, si y sit excessus tempusculi in quo b describitur in medio resistente juxta quadrata velocitatum supra tempus quo idem arcus in medio non resistente percurritur, erit tempus $T+x$ ad tempus $T+y$ reciprocè sicut velocitas $vB-mAB$ quæ supponebatur, ad velocitatem $vB-mBB$, eritque ideo $vB-mBB$ ad $vB-mAB=T+x$, ad $T+y$, cum ergo substractio quantitatum mBB, mAB ex velocitate vB producat excessus x & y supra tempus T, oportet ut illæ quantitates mBB, mAB, sint reciprocè ut x & y, sed mAB & mBB sunt ut A ad B, ergo A est ad B, sicut x est ad y, ideoque excessus x temporis arcus A in medio resistente in duplicatâ ratione velocitatis supra tempus in eodem arcu A in medio non resistente, est ad excessum y temporis arcus B in eodem medio supra tempus in eodem arcu B in medio non resistente, ut arcus A ad arcum B, cumque idem ratiocinium in omnibus arcubus quamminimis a & b institui possit, summæ omnium excessuum tempusculorum in arcu A, erit ad summam omnium excessuum tempusculorum in arcu B ut A ad B. Q. E. D.

* Quod excessus x & y tempusculorum quibus describuntur arcus a & b, in medio resistente juxta rationem duplicatam velocitatum, supra tempus quo describerentur in medio non resistente sint ut A & B, ex superiori demonstratione alio modo erui potest. Nam manentibus quæ illic posueramus est.

$vA-mAA:vA=T:T+x$ est etiam simili ratione $vB-mBB:vB=T:T+y$ & dividendo in utraque proportione fit

$$vA-mAA:mAA=T:x$$
$$vB-mBB:mBB=T:y.$$

Sed ob exiguitatem resistentiæ velocitatis respectu assumi potest $vA-mAA$ pro vA, & $vB-mBB$ pro vB, unde est quam proximè

$$vA:mAA=T:x$$

$vB:mBB=T:y$ & reducendo priores rationes utriusque proportionis ad minores terminos.

$$v:mA=T:x$$

$v:mB=T:y$ & vicissim

$$v:T=mA:x$$

$v:T=mB:y$, unde est

$mA:x=mB:y$, ideo vicissim

$mA:mB=x:y$, sed $mA:mB=A:B$, ideoque $A:B=x:y$. Ideoque excessus temporum in medio resistente in duplicatâ ratione velocitatum, supra tempora in medio non resistente in arcubus inæqualibus sunt ut illi arcus.

(b) * *Differentia temporum erit ad excessum temporis in arcu minore supra tempus in medio non resistente ut differentia arcuum ad arcum minorem* †.

* Tempus per arcum A est $T+x$, tempus per arcum minorem B, est $T+y$, ergo differentia temporum $T+x-T-y=x-y$,

Corol. 2. ([c]) Oſcillationes breviores ſunt magis iſochronæ, & breviſſimæ iiſdem temporibus peraguntur ac in medio non reſiſtente, quam proximè. Earum vero quæ in majoribus arcubus fiunt, tempora ſunt paulo majora, ([d]) propterea quod reſiſtentia in deſcenſu corporis quâ tempus producitur, ([e]) major ſit pro ratione longitudinis in deſcenſu deſcriptæ, quam reſi-

LIBER SECUND. SECT. VI. PROP. XXVII. THEOR. XXII.



$x-y$, & exceſſus temporis in minore arcu ſupra tempus in medio non reſiſtente eſt y juxta denominationes notæ ſuperioris, ſed ex Theoremate eſt $x:y=A:B$ ergo dividendo $x-y:y=A-B:B$, hoc eſt *differentia temporum eſt ad exceſſum &c.*

(c) * *Oſcillations breviores ſunt magis Iſochronæ & breviſſimæ iiſdem temporibus peraguntur ac in medio non reſiſtente quam proximè.* * Breviſſimæ iiſdem temporibus peraguntur ac in medio non reſiſtente quam proximè; ſit A arcus major, B minimus, inventum eſt (in nota a) quod erat $vA-mAA:vA=T:T+x$, & etiam quod erat $vB-mBB:vB-mAB=T+x:T+y$, unde per compoſitionem rationum invenitur $v^2AB-mvAAB-mvABB+m^2AABB$ (ſive $\overline{v^2AB-mvA^2B}\times\overline{1-\frac{mB}{v}}$ ad $v^2AB-mvA^2B=T:T+y$, itaque in primo termino neglecto $-\frac{mB}{v}$ (quod infinitè par- 179.
vum ſupponitur ob exiguitatem arcus B ut & quantitatis m reſpectu v) fiet

$v^2AB-mvAAB:v^2AB-mvAAB=T:T+y;$ eſt ergo $T=T+y$, ſive tempus in medio non reſiſtente idem ac in medio reſiſtente quam proximè.

Sed oſcillationes in medio non reſiſtente ſunt Iſochronæ, hinc ergo Oſcillationes breviores in medio reſiſtente ad has quam proximè accedentes cæteris ſunt magis Iſochronæ. Q. E. D.

(d) * *Propterea quod reſiſtentia in deſcenſu &c.* Quo major eſt reſiſtentia, eo minor fit, cœteris paribus, corporis deſcendentis velocitas, & ideo, manente deſcenſûs longitudine, tempus per reſiſtentiam producitur; & contra, quo major eſt reſiſtentia, eò citius extinguitur velocitas corpori inſita in aſcenſu.

(e) * *Major ſit pro ratione longitudi-*

nis.

De Motu Corporum.

resistentia in ascensu subsequente quâ tempus contrahitur. Sed & tempus oscillationum tam brevium quam longarum nonnihil produci videtur per motum medii. (f) Nam corporibus tardescentibus paulo minus resistitur, pro ratione velocitatis, & corporibus acceleratis paulo magis quam iis quæ uniformiter progrediuntur: idque quia medium, eo quem à corporibus accepit motu, in eandem plagam pergendo, in priore casu magis agitatur, in posteriore minus; ac proinde magis vel minus cum corporibus motis conspirat. Pendulis igitur in descensu magis resistit, in ascensu minus quam pro ratione velocitatis, & ex utrâque causâ tempus producitur.

PROPOSIO XXVIII. THEOREMA XXIII.

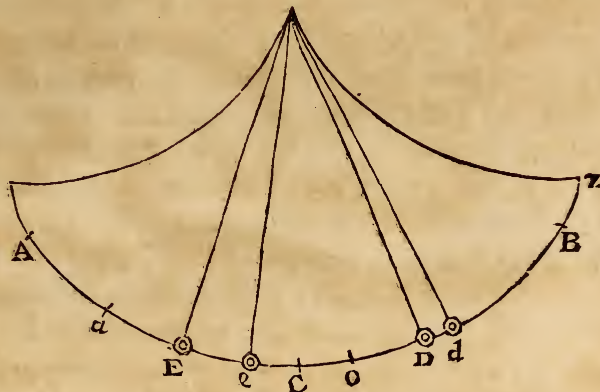
Si corpori funependulo in cycloide oscillanti resistitur in ratione momentorum temporis, erit ejus resistentia ad vim gravitatis ut excessus arcus descensu toto descripti supra arcum ascensu subsequente descriptum, ad penduli longitudinem duplicatam.

Designet BC arcum descensu descriptum, Ca arcum ascensu descriptum, & Aa differentiam arcuum: & stantibus quæ in propositione xxv. constructa & demonstrata sunt, erit vis, quâ corpus oscillans urgetur in loco quovis D, ad vim resistentiæ ut

nis. Longitudo in descensu descripta semper major est quam longitudo descripta in ascensu subsequente, si medium resistit; cum longitudines illæ in medio non resistente sint æquales (92. lib. I.).

(f) * *Nam corporibus tardescentibus*, seu quorum velocitas continuo decrescit, ut fit in corporum ascensu, paulo minus resistitur, pro ratione velocitatis; & corporibus acceleratis, seu descendentibus, paulo magis resistitur quam iis quæ uniformiter progrediuntur. In priore enim casu, medium eo quem à corporibus accepit motu, quemque aliquandiu ob inertiam materiæ conservat, in eamdem plagam pergit cum corporibus, & ob validiorem ab initio motûs continue decrescentis acceptam impressionem magis agitatur, ac proinde magis conspirat cum corporibus motis, minoremque iis resistentiam objicit. At in secundo casu cum motus perpetuo acceleretur, medium ex prioribus ictibus non satis velocem motum accepit, & ideo ejus celeritas novis impulsibus continuo augenda est ut possit cum corporibus motis conspirare; hincque corporibus acceleratis resistit magis quam uniformiter progredientibus. Pendulis igitur in descensu magis resistit medium, in ascensu minus quam pro ratione velocitatis, & ex utrâque causâ tempus producitur. Nam quo major est resistentia in descensu, & minor in ascensu, eo magis producitur tempus, ut supra dictum est.

ut arcus *CD* ad arcum *CO*, qui (g) ſemiſſis eſt differentiæ illius *Aa*. Ideoque vis, quâ corpus oſcillans urgetur in cycloidis principio ſeu puncto altiſſimo, id (h) eſt, vis gravitatis,



erit ad reſiſtentiam ut arcus cycloidis inter punctum illud ſupremum & punctum infimum *C* ad arcum *CO*; id eſt (ſi arcus duplicentur) ut cycloidis totius arcus, ſeu (i) dupla penduli longitudo, ad arcum *Aa*. *Q. E. D.*

PRO-

(g) * *Qui ſemiſſis eſt differentiæ illius Aa.* Nam (per hyp.) arcus C A æqualis eſt arcui C B, & (per cor. prop. XXV.) arcus O a æqualis eſt arcui O B; quare C A − O a, ſeu A a − C O = C B − O B = C O, & hinc A a = 2 C O, ac C O = $\frac{1}{2}$ A a.

(h) * *Id eſt vis gravitatis.* In cycloidis principio ſive puncto altiſſimo tangens cycloidis eſt in directione gravitatis, & idcirco vis in cycloide æqualis eſt vi gravitatis in illo puncto, ut patet ex cor. prop. LI. lib. I.

(i) * *Seu dupla penduli longitudo* (462. lib. I.).

 179

PROPOSITIO XXIX. PROBLEMA VI.

Posito quod corpori in cycloide oscillanti resistitur in duplicatâ ratione velocitatis: invenire resistentiam in locis singulis.

Sit Ba arcus oscillatione integrâ descriptus, sitque C infimum cycloidis punctum, & CZ semissis arcus cycloidis totius, longitudini penduli æqualis; & quæratur resistentia corporis in loco quovis D. Secetur recta infinita OQ in punctis O, S, P, Q, eâ lege, ut (si erigantur perpendicula OK, ST, PI, QE, centroque O & asymptotis OK, OQ describatur hyperbola $TIGE$ secans perpendicula ST, PI, QE in T, I & E, & per punctum I agatur KF parallela asymptoto OQ occurrens asymptoto OK in K, & perpendiculis ST & QE in L & F) fuerit area hyperbolica $PIEQ$ ad aream hyperbolicam $PITS$ ut arcus BC descensu corporis descriptus ad arcum Ca ascensu descriptum, & area IEF ad aream ILT ut OQ ad OS. Dein perpendiculo MN abscindatur area hyperbolica $PINM$ quæ sit ad aream hyperbolicam $PIEQ$ ut arcus CZ ad arcum BC descensu descriptum. Et si perpendiculo RG abscindatur area hyperbolica $PIGR$, quæ sit ad aream $PIEQ$ ut arcus quilibet CD ad arcum BC descensu toto descriptum; erit resistentia in loco D ad vim gravitatis, ut area $\frac{OR}{OQ}IEF$ $-IGH$ ad aream $PINM$.

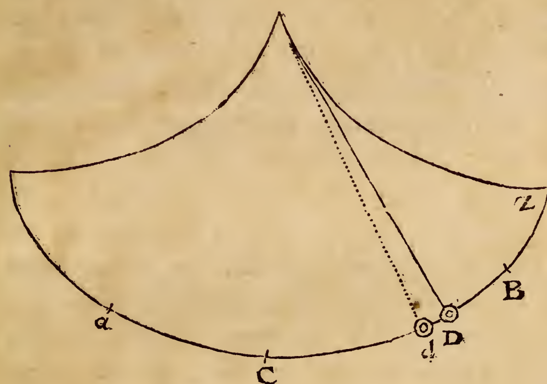
Nam cum vires à gravitate oriundæ quibus corpus in locis Z, B, D, a urgetur, (k) sint ut arcus CZ, CB, CD, Ca, & (l) arcus illi sint ut areæ $PINM$, $PIEQ$, $PIGR$, $PITS$; exponantur tum arcus tum vires per has areas respectivè. Sit insuper Dd spatium quam minimum à corpore descendente descriptum, & exponatur idem per aream quam minimam $RGgr$ parallelis RG, rg comprehensam; & producatur

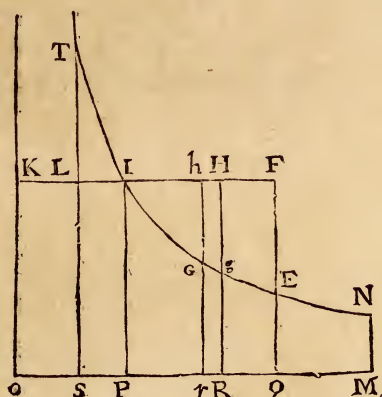
rg

(k) * *Sint ut arcus &c.*, per demonstrata in prop. LI. & Cor. 2. prop. LII. lib. I.

(l) * *Et arcus illi sint ut areæ*, per constructionem.

rg ad h, ut sint $GHhg$, & $RGgr$, contemporanea (m) arearum IGH, $PIGR$ decrementa. Et (n) areæ $\frac{OR}{OQ}IEF - IGH$ incrementum $GHhg - \frac{Rr}{OQ}IEF$, seu $Rr \times HG - \frac{Rr}{OQ}IEF$, erit ad areæ $PIGR$ decrementum $RGgr$, seu





$Rr \times RG$, ut $HG - \frac{IEF}{OQ}$ ad RG; ideoque ut $OR \times HG - \frac{OR}{OQ}IEF$ ad $OR \times GR$ seu (o) $OP \times PI$, hoc est (ob (p) æqualia $OR \times HG$, $OR \times HR - OR \times GR$, $ORHK - OPIK$, $PIHR$

(m) * *Arearum IGH, PIGR decrementa.* Cum enim corpus è loco D descendit in arcu DC, decrescit area PIGR huic arcui proportionalis, & cum eâ decrescit quoque area IGH.

(n) * *Et areæ &c.* Nam, ob datas OQ, & IEF, decrementum areæ $\frac{OR}{OQ}IEF - IGH$, sumptis duorum terminorum fluxionibus, invenitur æquale $\frac{Rr}{OQ}IEF - GHhg$; & ideo, mutatis signis, ejusdem areæ incrementum est $GHhg - \frac{Rr}{OQ}IEF$, seu &c. 179.

(o) * *Seu OP×PI.* Per theor. 4. de hyperbolâ.

(p) * *Ob æqualia &c.* Cum sit $HG = HR - GR$, erit $OR \times HG = OR \times HR - OR \times GR$; sed $OR \times HR$ æquale est rectangulo ORHK, & (per theor. 4. de hyp.) $OR \times GR$ æquale est rectangulo OPIK. Quare $OR \times HG = ORHK - OPIK = PIHR = PIGR + IGH$.

$PIHR$ & $PIGR+IGH$) ut $PIGR+IGH-\frac{OR}{OQ}IEF$ ad $OPIK$. Igitur si area $\frac{OR}{OQ}IEF-IGH$ dicatur Y, atque areæ $PIGR$ decrementum $RGgr$ detur, (q) erit incrementum areæ Y ut $PIGR-Y$.

Quod si V designet vim à gravitate oriundam, arcui describendo CD proportionalem, quâ corpus urgetur in D, & R pro resistentia ponatur; erit V−R vis tota quâ corpus urgetur in D. (r) Est itaque incrementum velocitatis ut V−R & particula illa temporis in quâ factum est conjunctim: Sed (s) & velocitas ipsa est ut incrementum contemporaneum spatii descripti directè & particula eadem temporis inversè. Unde, cum resistentia per hypothesin sit ut quadratum velocitatis, incrementum resistentiæ (per (t) lem. 11.) erit ut velocitas & incrementum velocitatis conjunctim, id (u) est, ut momentum spatii & V−R conjunctim; atque ideo, si momentum spatii detur, ut V−R; id est, si pro vi V scribatur ejus exponens $PIGR$, & resistentia R exponatur per aliam aliquam aream Z, ut $PIGR-Z$.

Igitur areâ $PIGR$ per datorum momentorum subductionem uniformiter decrescente, crescunt area Y in ratione $PIGR-$ Y,

(q) * *Erit incrementum areæ y ut* $PIGR-Y$. Quoniam enim (hyp.) est $\frac{OR}{OQ}IEF-IGH=Y$, & (ex demonstratis) incrementum areæ $\frac{OR}{OQ}IEF-IGH$ est ad decrementum (ex hyp.) datum $RGgr$, ut $PIGR+IGH-\frac{OR}{OQ}IEF$, seu $PIGR-Y$, ad datum rectangulum $OPIK$; manifestum est quod incrementum areæ Y sit ad $PIGR-Y$ in datâ ratione, nimirum in ratione decrementi dati $RGgr$ ad rectangulum datum $OPIK$.

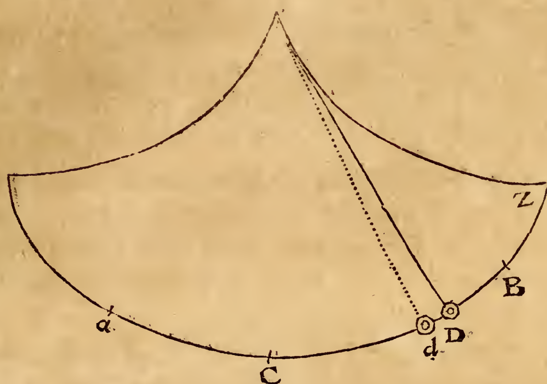
(r) * *Est itaque incrementum velocitatis, ut &c.* (18).

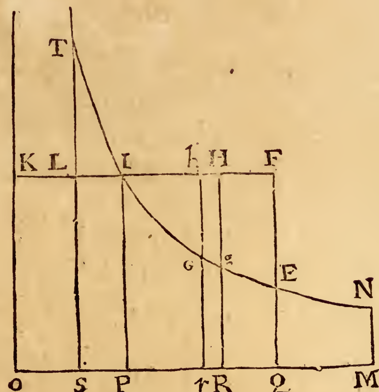
(s) * *Sed & velocitas ipsa est &c.* (11)

(t) * *Per Lemma* II. casu 3°. idque statim apparet: nam si velocitas dicatur v, cum sit R ut vv, erit dR ut $2vdv$, seu ut vdv.

(u) * *Id est, ut momentum spatii &c.* Quia (ex dem.) velocitatis incrementum est ut $V-R$ & momentum temporis conjunctim, velocitas autem ipsa ut incrementum spatii directè & momentum temporis inversè; erit ex æquo, velocitas in seipsum incrementum ducta, ut $V-R$ & incrementum spatii conjunctim, in quâ ratione est etiam incrementum resistentiæ (ex dem.).

Y, & area Z in ratione *PIGR*−Z. Et propterea si areæ & Z simul incipiant & sub initio æquales sint, hæ (x) per additionem æqualium momentorum pergent esse æquales, & æqualibus itidem momentis subinde decrescentes simul evanescent. Et vicissim, si simul incipiunt & simul evanescunt, æqualia habebunt momenta & semper erunt æquales: id adeo quia





si resistentia Z augeatur, velocitas unà cum arcu illo *Ca*, qui in ascensu corporis describitur, diminuetur; & puncto in quo motus omnis unà cum resistentia cessat propius accedente ad punctum *C*, (y) resistentia citius evanescet quam area Y. Et contrarium eveniet ubi resistentia diminuitur. Jam

(x) * *Hæ per additionem æqualium momentorum pergent esse æquales*, &c. Cum enim semper crescat area *Y* in ratione PIGR−*Y*, & area *Z* in ratione PIGR−*Z*; si areæ illæ *Y* & *Z* simul incipiant & initio æquales sint, erunt etiam areæ PIGR−*Y* & PIGR−*Z* sub initio æquales; &, ob datam incrementorum areæ *Y* & areæ *Z* ad PIGR−*Y* & PIGR−*Z* rationem, incrementa illa sicut & PIGR−*Y* ac PIGR−*Z* manebunt semper æqualia, uti sub initio. Quare etiam areæ *Y* & *Z* æqualibus itidem momentis subinde decrescent & simul evanescent.

(y) * *Resistentia citius evanescet quam area* Y., *& contrarium &c.* Nam si area *Z* semper æqualis sit areæ *Y*, simul incipient simulque evanescent. Incipit autem area *Y* (ut infra ostendetur) ubi recta R G incidit in rectam Q E, & desinit ubi recta R G incidit in rectam S T, suntque Q & S puncta fixa per arcuum C B, C a longitudines determinata (per constr.). Quare si resistentia *Z* augeatur vel minuatur ita ut cesset in puncto arcûs C a infra vel supra a positum, citius vel tardius evanescet area *Z* quam area *Y*, quia hæc non desinit nisi ubi corpus pervenit ad locum a. Resistentia igitur, seu area *Z* nec major nec minor esse potest quam area *Y*, si simul incipiant & simul evanescant. 179.

Jam vero area Z incipit desinitque ubi resistentia nulla est, hoc est, in principio motus ubi arcus CD arcui CB æquatur & recta RG incidit in rectam QE, & in fine motus ubi arcus CD arcui Ca æquatur & RG (z) incidit in rectam ST. Et area Y seu $\frac{OR}{OQ} IEF - IGH$ incipit desinitque ubi nulla est, ideoque ubi $\frac{OR}{OQ} IEF$ & IGH æqualia sunt: hoc (a) est (per constructionem) ubi recta RG incidit successivè in rectas QE & ST. Proindeque areæ illæ simul incipiunt & simul evanescunt, & propterea semper sunt æquales. Igitur area $\frac{OR}{OQ} IEF - IGH$ æqualis est areæ Z, per quam resistentia exponitur, & propterea est ad aream $PINM$ per quam gravitas exponitur, ut resistentia ad gravitatem. *Q. E. D.*

Corol. 1. Est igitur resistentia in loco infimo C ad vim gravitatis, ut area $\frac{OP}{OQ} IEF$ ad (b) aream $PINM$.

Corol. 2. Fit autem maxima, ubi area $PIHR$ est ad aream IEF ut OR ad OQ. Eo enim in casu momentum ejus (nimirum $PIGR - Y$) (c) evadit nullum.

Corol.

(z) * *Incidit in rectam ST.* Hæc patent per constructionem, quâ areæ PIEQ, PIGR, PITS factæ sunt arcubus CB, CD, Ca proportionales.

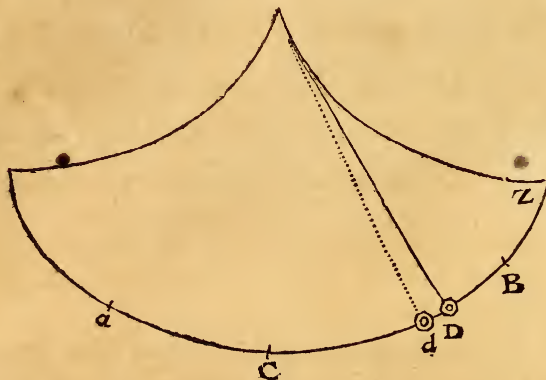
(a) * *Hoc est (per constructionem) ubi &c.* Ubi enim *Y* evanescit, fit quoque $\frac{OR}{OQ} IEF - IGH = 0$, & ideo $\frac{OR}{OQ} IEF = IGH$; hoc autem contingit ubi fit $IEF : IGH = OQ : OR$, quod evenit primo ubi recta RG incidit in rectam QE & incipit area *Y*. Tunc enim $IEF = IGH$ & $OQ = OR$ ideoque $IEF : IGH = OQ : OR$. Est etiam $\frac{OR}{OQ} IEF = IGH$, quando fit $OR = OS$ & $IGH = ILT$: nam cum (per constr.) sit area IEF ad aream ILT ut OQ ad OS, si ponatur $OR = OS$, fiet $ILT = IGH$, eritque area IEF ad aream IGH ut OQ ad OR, & hinc $\frac{OR}{OQ} IEF = IGH$. Est autem $OR = OS$, ubi recta RG incidit in rectam ST, & area *Y* desinit ibidem.

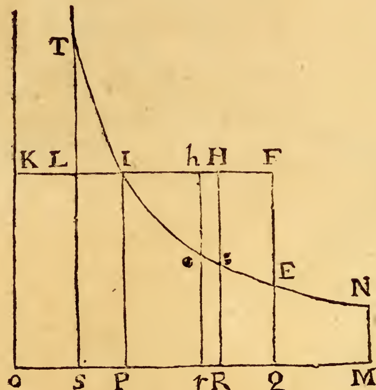
(b) * *Ad aream PINM.* Nam evanescente arcu CD, evanescit ipsi proportionalis area PIGR, & hinc evanescit etiam area IGH, fitque $OR = OP$, atque proinde $\frac{OR}{OQ} IEF - IGH = \frac{OP}{OQ} IEF$.

(c) * *Evadit nullum.* Momentum areæ *Y* est ut $PIGR - Y$ (ex dem.), id est, ut $PIGR + IGH - \frac{OR}{OQ} IEF = PIHR - \frac{OR}{OQ} IEF$. Quâ propter momentum areæ *Y* nullum fit, & ideo resisten-

Corol. 3. Hinc etiam innotescit velocitas in locis singulis: quippe quæ est in subduplicatâ ratione resistentiæ, & ipso motus initio æquatur velocitati corporis in eâdem cycloide sine (d) omni resistentiâ oscillantis.

Cæ-



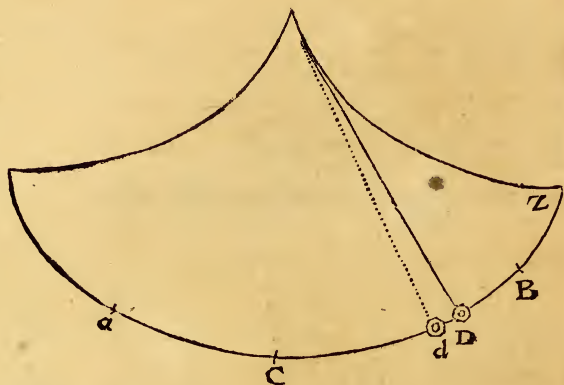


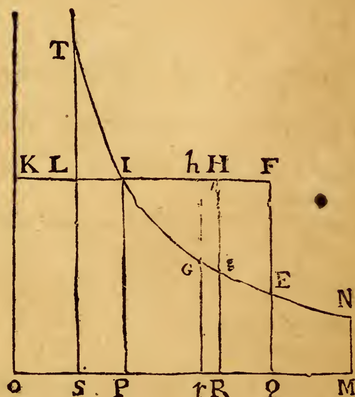
stentia (cui area Y proportionalis est) maxima evadit (48), ubi est $PIHR - \frac{OR}{OQ} IEF = 0$, seu ubi $PIHR = \frac{OR}{OQ} IEF$, ac proinde ubi area PIHR est ad aream IEF ut OR ad OQ.

(d) * *Sine omni resistentiâ oscillantis.* Quoniam velocitatis quadratum in loco quovis D est ut resistentia, seu ut area Y in medio resistente; & ut $CB^2 - CD^2$ (per prop. LII. lib. I.) seu ut $\overline{PIEQ}^2 - \overline{PIGR}^2$ in medio non resistente; si velocitates illæ dicantur v, V, sintque C & E quantitates constantes, erit $vv = C \times Y$, & $VV = E \times \overline{PIEQ}^2 - E \times \overline{PIGR}^2$. Et quia initio motûs, dum corpus est in B, velocitates illæ æquales sunt, ob resistentiam respectu vis à gravitate oriundæ evanescentem; erit initio motus $C \times Y = E \times \overline{PIEQ}^2 - E \times \overline{PIGR}^2$; sed initio motus est Y, seu $\frac{OR}{OQ} IEF - IGH = \frac{OR}{OQ} IEF - IEF + QR \times FE =$
$\frac{OR \times IEF - OQ \times IEF + OQ \times QR \times FE}{OQ}$ 179.
$= \frac{QR}{OQ} \times \overline{OQ \times FE - IEF}$, coincidente nimirum GH cum EF, & QR seu HF evanescente. Et similiter initio motus est $\overline{PIEQ}^2 - \overline{PIGR}^2 = \overline{PIEQ + PIGR} \times \overline{PIEQ - PIGR} = \overline{2\,PIEQ - QR \times QE} \times \overline{QR \times QE} = 2\,PIEQ \times QR \times QE$, neglecto termino evanescente $QR^2 \times QE^2$. Quare erit initio motus $\frac{C \times QR}{OQ} \times \overline{OQ \times FE - IEF} = E \times QR \times QE \times 2\,PIEQ$, & ideo $C : E = 2\,PIEQ \times QE : \frac{OQ \times FE - IEF}{OQ}$; unde, cum sit semper $vv : VV = C \times Y : E \times \overline{PIEQ}^2 - E \times \overline{PIGR}^2$, erit quoque $vv : VV = 2\,PIEQ \times QE \times \overline{\frac{OR}{OQ} IEF - IGH} : \frac{\overline{OQ \times FE - IEF}}{OQ} \times \overline{\overline{PIEQ}^2 - \overline{PIGR}^2}$.

  In-

Cæterum (e) ob difficilem calculum quo reſiſtentia & velocitas per hanc propoſitionem invenienda ſunt, viſum eſt propoſitionem ſequentem ſubjungere.





Innoteſcet igitur velocitas in medio reſiſtente per inventam ipſius rationem ad velocitatem in medio non reſiſtente in ſingulis locis.

(e) * *Cæterum ob difficilem calculum &c.* Sit OP $=a$, PI $=$ FQ $=b$, OS $=x$, & ideo ST $=\frac{ba}{x}$, SP $=$ LI $=a-x$, & LT $=\frac{ba}{x}-b$. Deinde OQ $=z$, & hinc QE $=\frac{ba}{z}$, PQ $=$ FI $=z-a$, & FE $b-\frac{ba}{z}$. Et erit areæ PIEQ elementum $=\frac{badz}{z}$, areæ PITS elementum $=-\frac{badx}{x}$; & inde area PIEQ $=$ $ba\,L.\,z+Q$ *conſt.*; & quia area illa evaneſcit ubi eſt PQ $=z-a=0$, ſeu ubi $z=a$, invenitur conſtans $Q=-ba\,L.\,a$, atque adeo area PIEQ $=ba\,L.\,z-ba\,L.\,a=ba\,L.\,\frac{z}{a}$. Simili modo reperitur area PITS $=ba\,L.\,\frac{a}{x}$. Sit jam arcus BC ad arcum Ca, ut m ad 1; & erit (per conſtr.) $m:1=ba\,L\,\frac{z}{a}:ba\,L\,\frac{a}{x}=L.\,\frac{z}{a}:L.\,\frac{a}{x}$, ac proinde $L.\,\frac{z}{a}=m\,L.\,\frac{a}{x}=L.\,\frac{a^m}{x^m}$, atque $\frac{z}{a}=\frac{a^m}{x^m}$, & $z=\frac{a^{m+1}}{x^m}$.

Porro ex ſuperioribus denominationibus invenitur areæ IEF elementum $=bdz-\frac{badz}{z}$, & inde area ipſa IEF $=bz-ba\,L\,z+Q$ *conſt.* quæ cum ſit 0 ubi FI $=z-a$ evaneſcit fitque $z=a$, eſt $Q=-ba+ba\,L.\,a$ ideoque IEF $=ba\,L\,\frac{a}{z}+bz-ba$; & ſimiliter habetur area ILT $=ba\,L.\,\frac{a}{x}+bx-ba$. Sed (per conſtr.) area IEF eſt ad aream ILT ut OQ ad OS, ſeu ut z ad x: quare $z:x=ba\,L.\,\frac{a}{z}+bz-ba$.

Liber Secund. Sect. VI. Prop. XXIX. Prob. VI.

$-ba:baL\frac{a}{x}+bx-ba$, & dividendo per b, ac loco z ſcribendo ipſius valorem $\frac{a^{m+1}}{x^m}$, fit $a^{m+1}:x^{m+1}=aL.\frac{x^m}{a^m}+\frac{a^{m+1}}{x^m}-a:aL.\frac{a}{x}+x-a$; unde habetur $a^{m+2}L.\frac{a}{x}+a^{m+1}x-a^{m+2}=ax^{m+2}L.\frac{x^m}{a^m}+a^{m+1}x-ax^{m+1}$; & inde eruitur $mx^{m+1}Lx-mx^{m+1}La+a^{m+1}Lx-x^{m+1}=a^{m+1}L.a-a^{m+1}$. Si itaque ex hâc æquatione per ſerierum regreſſum, vel quâcumque alia methodo, determinetur valor x per arbitrariam lineam a, & deinde per æquationem $z=\frac{a^{m+1}}{x^m}$ inveniatur valor ipſius z; Newtoniana conſtructio ad calculum logarithmorum revocabitur.

Scholion. Hermannus prop. 73. & 74. lib. 2. phoronomiæ geminam conſtructionem dedit, quâ corporis in curvâ qualibet oſ- 179.
cillantis reſiſtentia velocitatis quadrato proportionalis definitur, & Newtonianam pro cycloide conſtructionem ope logarithmicæ ſimpliciorem reddidit. Difficile autem non eſt (44) hanc Newtoni conſtructionem revocare ad logarithmicam per punctum N & aſymptoto KO ad partes O productâ deſcribendam.

De Motu Corporum.

PROPOSITIO XXX. THEOREMA XXIV.

Si recta aB *æqualis ſit cycloidis arcui quem corpus oſcillando deſcribit, & ad ſingula ejus puncta* D *erigantur perpendicula* DK, *quæ ſint ad longitudinem penduli ut reſiſtentia corporis in arcus punctis correſpondentibus ad vim gravitatis: dico quod differentia inter arcum deſcenſu toto deſcriptum & arcum aſcenſu toto ſubſequente deſcriptum ducta in arcuum eorundem ſemiſummam, æqualis erit areæ* BKa *à perpendiculis omnibus* DK *occupatæ.*

Exponatur enim tum cycloidis arcus, oſcillatione integrâ deſcriptus, per rectam illam ſibi æqualem *aB*, tum arcus qui deſcriberetur in vacuo per longitudinem *AB*. Biſecetur *AB* in *C*, & (f) punctum *C* repræſentabit infimum cycloidis punctum, & (g) erit *CD* ut vis à gravitate oriundâ, quâ corpus in *D* ſecundum tangentem cycloidis urgetur, eamque habebit rationem ad longitudinem penduli quam (h) habet vis in *D* ad vim gravitatis. Exponatur igitur vis illa per longitudinem *CD*, & vis gravitatis per longitudinem penduli, & ſi in *DE* capiatur *DK* in eâ ratione ad longitudinem penduli quam habet reſiſtentia ad gravitatem, erit *DK* exponens reſiſtentiæ. Centro *C* & intervallo *CA* vel *CB* conſtruatur ſemicirculus *BEeA*. Deſcribat autem corpus tempore quam minimo ſpatium *Dd*, & erectis perpendiculis *DE*, *de* circumferentiæ occurrentibus in *E* & *e*, erunt hæc ut velocitates quas corpus in vacuo, deſcendendo à puncto *B*, acquireret in locis *D* & *d*. Patet hoc (per prop. LII. lib. I.). Exponantur itaque hæ velocitates per perpendicula illa *DE*, *de*; ſitque *DF* velocitas quam acquirit in *D* cadendo de *B* in medio reſiſtente. Et ſi cen-

(f) * *Et punctum C repræſentabit infimum cycloidis punctum.* Nam cycloidis punctum infimum arcum quem corpus in medio non reſiſtente oſcillando deſcribit in duas partes æquales dividit.

(g) * *Et erit CD ut vis à gravitate oriunda &c.* patet per demonſtr. prop. LI. lib. I.

(h) * *Quam habet vis in D ad vim gravitatis*, per cor. I. prop. LI. & not. 462. lib. I.

LIBER SECUND. SECT. VI. PROP. XXX. THEOR. XXIV.

centro C & intervallo CF deſcribatur circulus FfM occurrens rectis de & AB in f & M, (i) erit M locus ad quem deinceps ſine ulteriore reſiſtentiâ aſcenderet, & df velocitas quam acquireret in d. Unde etiam ſi Fg deſignet velocitatis momentum quod corpus D deſcribendo ſpatium quam minimum Dd, ex reſiſtentiâ medii amittit; & ſumatur CN æqualis Cg: erit N locus ad quem corpus deinceps ſine ulteriore reſiſtentiâ aſcenderet, & MN erit decrementum aſcenſus ex velocitatis illius amiſſione oriundum. Ad df demittatur perpendiculum Fm, & velocitatis DF decrementum Fg à reſiſtentiâ DK genitum, erit ad velocitatis ejuſdem incrementum fm à vi CD genitum, ut vis generans DK (k) ad vim generantem CD. Sed & (l) ob ſimilia triangula Fmf, Fhg, FDC, eſt fm ad Fm ſeu Dd ut CD ad DF; & ex æquo Fg ad Dd ut DK ad DF. Item Fh ad Fg ut DF ad CF; & ex æquo perturbatè Fh (m) ſeu MN ad Dd ut DK ad CF ſeu CM;

(i) * *Erit M locus ad quem &c.* Eamdem enim velocitatem haberet corpus in D, ad ſi ſecluſâ omni reſiſtentiâ percurriſſet ſpatium CF — CD, & ideo (per modo demonſtrata) in loco d haberet velocitatem d f, & in loco M nullam.

(k) * *Ad vim generantem CD.* Sunt enim velocitatum elementa dato temporis momento genita, ut vires generantes (13. lib. 1.)

(l) * *Ob ſimilia triangula &c.* Sunt enim anguli ad m, h, & D recti, angulus CFD duobus triangulis FDC, Fhg communis, & angulus fFm æqualis angulo CFD, quia ſi ex angulis rectis mFD, fFC ſubducatur communis angulus mFC, remanebunt anguli æquales fFm, CFD. Tria igitur triangula Fmf, Fhg & FDC æquales angulos habent, ſuntque proinde ſimilia. 179.

(m) * *Fh ſeu MN.* Cum ſit CM æqualis CF, & CN æqualis Cg ſeu Ch, angulo hCg evaneſcente, eſt MN = CM — CN = CF — Ch = Fh.

De Motu Corporum.

(n) ideoque ſumma omnium $MN \times CM$ æqualis erit ſummæ omnium $Dd \times DK$. Ad punctum mobile M erigi ſemper intelligatur ordinata rectangula æqualis indeterminatæ CM, quæ motu continuo ducatur in totam longitudinem Aa; & trapezium ex illo motu deſcriptum ſive huic æquale rectangulum $Aa \times \frac{1}{2} aB$ (o) æquabitur ſummæ omnium $MN \times CM$, ideoque ſummæ omnium $Dd \times DK$, id eſt, areæ $BKVTa$. *Q. E. D.*

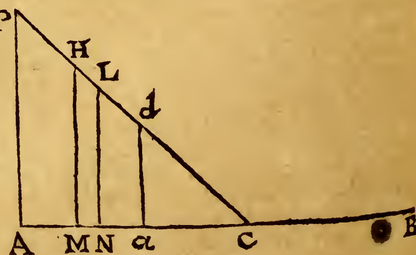
Corol. Hinc ex lege reſiſtentiæ & arcuum Ca, CB differentia Aa colligi poteſt proportio reſiſtentiæ ad gravitatem quam proximè.

Nam ſi uniformis ſit reſiſtentia DK, figura $BKTa$ rectangulum erit ſub Ba & DK; & inde rectangulum ſub $\frac{1}{2}Ba$ & Aa erit æquale rectangulo ſub Ba & DK, & DK æqualis erit $\frac{1}{2}Aa$. Quare cum DK ſit exponens reſiſtentiæ, & longitudo penduli exponens gravitatis, erit reſiſtentia ad gravitatem ut $\frac{1}{2}Aa$ ad longitudinem penduli; omninò ut in prop. XXVIII. demonſtratum eſt.

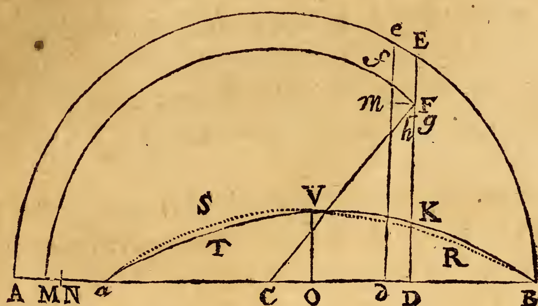
Si reſiſtentia ſit ut velocitas, figura $BKTa$ ellipſis erit quam proximè. Nam ſi corpus, in medio non reſiſtente, oſcillatione in-

(n) * *Ideoque ſumma omnium MN× CM &c.* Quoniam (per modo demonſtrata) $MN \times CM = Dd \times DK$, erit ſumma omnium $MN \times CM$ æqualis ſummæ omnium $Dd \times DK$, modo ſimul incipiant ſimulque deſinant. Incipit autem ſumma omnium $Dd \times DK$ in B & deſinit in a, & ſumma omnium $MN \times CM$ incipit in A, & ideo ſi deſinat in a, erunt ſummæ illæ æquales.

(o) * *Æquabitur ſummæ &c.* Erigatur ad punctum A perpendiculum $AP = AC$, jungatur PC, & ductis per M & N ac a perpendiculis MH, NL, ab; erit ſemper $MN \times CM = MN \times HM$; ideoque ſi ordinata variabilis HM ducatur in totam longitudinem Aa, erit trapezium APba æquale ſummæ omnium $MN \times CM$ ab A ad a; ſed trapezium illud eſt $CAP - Cab = \frac{1}{2}CA^2 - \frac{1}{2}Ca^2 = \frac{1}{2}(CA + Ca) \times (CA - Ca) = \frac{1}{2}aB \times Aa$, ob $CB = CA$. Ergo &c.

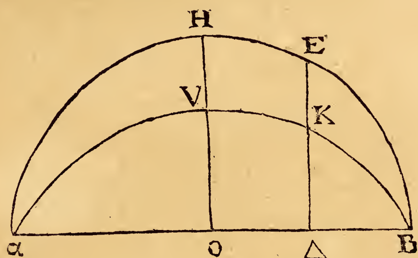


integrâ deſcriberet longitudinem *B A*, velocitas in loco quovis *D* foret ut circuli diametro *A B* deſcripti ordinatim applicata *D E*. Proinde cum *B a* in medio reſiſtente, & *B A* in medio non reſiſtente, (p) æqualibus circiter temporibus deſcri-



bantur; ideoque velocitates in ſingulis ipſius *B a* punctis, ſint quam proximè ad velocitates in punctis correſpondentibus longitudinis *B A*, ut eſt *B a* ad *B A*; erit velocitas in puncto *D* in medio reſiſtente ut circuli vel ellipſeos ſuper diametro *B a*

(p) * 180. *Æqualibus circiter temporibus deſcribantur.* Quia reſiſtentia minuendo corporis velocitatem tempus producit in deſcenſu à B ad C, illudque contrahit in aſcenſu à C ad a, longitudines B A in medio non reſiſtente & B a in medio reſiſtente, earumque longitudinum partes proportionales, æqualibus circiter temporibus deſcribuntur. Sunt autem velocitates ut ſpatia eodem temporis momento deſcripta (11); quare velocitates in partibus longitudinum B A, B a correſpondentibus ſunt quam proximè ut longitudines B A, B a, id eſt, in ratione datâ. Centro O & diametro A B deſcribatur circulus B F H a, ſitque B Δ in hac figurâ ad B D in figurâ textûs, ut B a ad B A, hoc eſt, ut velocitas in loco Δ in medio reſiſtente ad velocitatem in loco D in medio non reſiſtente; & ductâ



180.

ordinatâ Δ E, erit etiam, ob figurarum ſimilitudinem Δ E ad D E ut B a ad B A, ideoque ut velocitas in medio reſiſtente ad velocitatem in medio non reſiſtente. Velocitas igitur in medio reſiſtente erit ſemper ut ordinata variabilis Δ E.

DE MOTU CORPORUM.

Ba descripti ordinatim applicata; (q) ideoque figura $BKVTa$ ellipsis erit quam proximè. Cum resistentia velocitati proportionalis supponatur, sit OV exponens resistentiæ in puncto medio O; & ellipsis $BRVSa$, centro O, semiaxibus OB, OV descripta, figuram $BKVTa$, eique æquale rectangulum $Aa \times BO$, æquabit quamproximè. Est igitur $Aa \times BO$ ad $OV \times BO$ ut (r) area semi-ellipseos hujus ad $OV \times BO$: id est, Aa ad OV ut (s) area semicirculi ad quadratum radii, sive ut 11 ad 7 circiter: Et propterea $\frac{7}{11}Aa$ ad longitudinem penduli ut corporis oscillantis resistentia in O ad ejusdem gravitatem.

Quod si resistentia DK sit in duplicatâ ratione velocitatis, figura $BKVTa$ ferè (t) parabola erit verticem habens V & axem

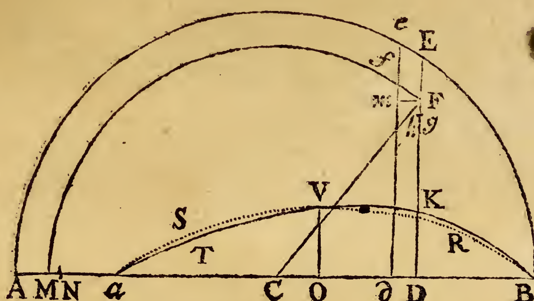
(q) * *Ideoque figura BKVTa ellipsis erit quam proxime.* Cum enim (ex modo demonstratis) velocitas in loco quovis Δ sit semper ut ordinata ΔE ad circulum, & (per hyp.) resistentia ΔK in hac figurâ, vel DK in figura textus, sit semper ut velocitas ΔE, erit ΔK ut ΔE; & quia $\Delta E^2 = a\Delta \times \Delta B$ (ex naturâ circuli), erit etiam ΔK^2 ut $a\Delta \times \Delta B$, & ideo figura BKVTa ellipsis, cujus centrum O, semiaxes aO, & OV, si OV exponat resistentiam in puncto medio O axis aB.

(r) * *Ut area semi ellipseos hujus ad $OV \times BO$.* Est enim area illa $= Aa \times \frac{1}{2}aB$ (per prop. hanc), & $\frac{1}{2}aB = BO$ (per constr.).

(s) * *Ut area semicirculi ad quadratum radii &c.* Area ellipseos cujuscumque est ad rectangulum sub axibus in ratione datâ, nimirum in ratione areæ circuli ad quadratum diametri (250. lib. 1.); circulus enim est ellipsis cujus sunt axes æquales; unde area semi ellipseos BKVTa est ad quartam partem rectanguli sub axibus, seu ad rectangulum sub semiaxibus $OV \times BO$, ut area semicirculi ad quadratum radii. Sed si circuli radius sit 7, erit semiperipheria 22 circiter, & area semicirculi 7×11, ideoque area semicirculi ad quadratum radii ut 11 ad 7 circiter. Est igitur Aa ad OV ut 11 ad 7, & proinde $OV = \frac{7}{11}Aa$. Et propterea (per prop. hanc) $\frac{7}{11}Aa$ est ad longitudinem penduli ut corporis oscillantis resistentia in O ad ejusdem pondus.

(t) * *Ferè parabola erit.* Ordinata ΔE ad semicirculum BEHa (vide fig. nor. 180.) est semper ut velocitas in loco Δ in medio resistente, & (ex naturâ circuli) $\Delta E^2 = a\Delta \times \Delta B$, & (ex hyp.) resistentia ΔK est ut velocitatis quadratum, seu ut ΔE^2, adeoque ΔK est ut rectangulum $a\Delta \times \Delta B$ sive ut $\overline{OB + O\Delta} \times \overline{OB - O\Delta}$ hoc est ut $\overline{OB}^2 - \overline{O\Delta}^2$. * Sed in Parabolâ cujus vertex foret V & axis VO differentia abscissarum foret semper ad differentiam quadratorum ordinatarum in utriusque abscissæ extremo ductarum, in datâ ratione. Jam verò si ex K ducatur in axem perpendicularis KP, est KΔ = PO & PO est differentia abscissarum VP & VO, est OΔ = PK ordinatæ in P, ideoque est $\overline{OB}^2 - \overline{O\Delta}^2$ differentia quadratorum ordinatarum in punctis P & O, cum ergo KD & $\overline{OB}^2 - \overline{O\Delta}^2$ sint in datâ

axem OV, (u) ideoque æqualis erit rectangulo sub $\frac{2}{3}Ba$ & OV quam proximè. Est igitur rectangulum sub $\frac{1}{2}Ba$ & Aa æquale rectangulo sub $\frac{2}{3}Ba$ & OV, ideoque OV æqualis $\frac{3}{4}Aa$: & propterea corporis oscillantis resistentia in O ad ipsius gravitatem ut $\frac{3}{4}Aa$ ad longitudinem penduli.



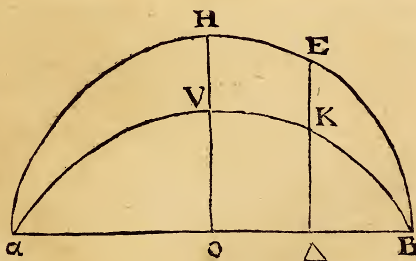
Atque has conclusiones in rebus practicis abundè satis accuratas esse censeo. Nam cum ellipsis vel parabola $BRVSa$ congruat cum figura $BKVTa$ in (x) puncto medio V, hæc si ad partem alterutram BRV vel VSa excedit figuram illam, (y) deficiet in ab eâdem ad partem alteram, & sic eidem æqua-

datâ ratione figura B K V T a parabola erit verticem habens V & axem O V (per theor. 1. de parab.)

(u) * *Ideoque æqualis erit rectangulo sub $\frac{2}{3}$ B a & O V quam proximè.* Nam area parabolica B K V O est $\frac{2}{3}$ B O × V O (Theor 4. de parab.) & ipsius duplum, seu area tota B K V a est $\frac{2}{3}$ a B × O V.

(x) * *In puncto medio V.* Supponitur enim quod O V accuratè exhibeat resistentiam in puncto medio O, quodque parabola vel ellipsis per punctum V descripta sit.

(y) * *Deficiet ab eâdem ad partem alteram.* Quia duæ ellipseos vel parabolæ



partes B R V & a S V similes sint & æquales, si resistentiæ in descensu à B ad O majores sint quam pro ratione ordinatarum D R ad ellipsim vel parabolam, ad

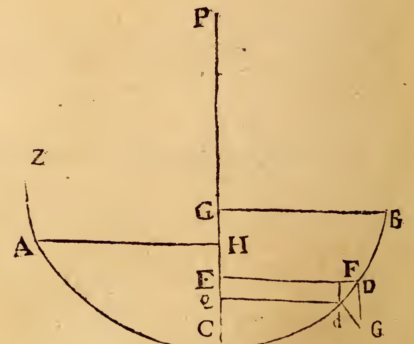
quabitur quam proximè (z).

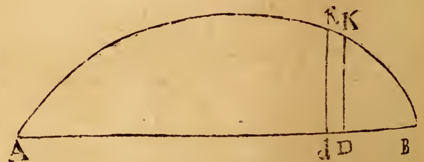
PRO.

ad alteram partem minores erunt; & contra.

181. Sit resistentia in ratione sesquiplicatâ velocitatis, id est, (vide fig. not. 180.) ΔK ut $\Delta E^{\frac{3}{2}}$; & quoniam (ex naturâ circuli) $\Delta E = (BO^2 - \Delta O^2)^{\frac{1}{2}}$, & proinde $\Delta E^{\frac{3}{2}} = (BO^2 - \Delta O^2)^{\frac{3}{4}}$, erit ΔK ut $(BO^2 - \Delta O^2)^{\frac{3}{4}}$, & (in fig. textûs) DK ut $(BO^2 - DO^2)^{\frac{3}{4}}$. Dicantur $BO = a$, $VO = b$, $DO = x$, $DK = y$, & erit $b : y = a^{\frac{3}{2}} : (aa - xx)^{\frac{3}{4}}$, ideoque $y = \frac{b(aa - xx)^{\frac{3}{4}}}{a^{\frac{3}{2}}}$; & hinc areæ OVKD momentum $ydx = bdx \frac{(aa - xx)^{\frac{3}{4}}}{a^{\frac{3}{2}}}$.

Quantitas $(aa - xx)^{\frac{3}{4}}$ in seriem infinitam resolvatur (551. lib. 1.), & invenietur $dx(aa - xx)^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{3}{2}} dx - \frac{3x^2 dx}{4a^{\frac{1}{2}}} - \frac{3x^4 dx}{4 \times 8 a^{\frac{5}{2}}} - \frac{3 \times 5 x^6 dx}{4 \times 8 \times 12 a^{\frac{9}{2}}} - \frac{3 \times 5 \times 9 x^8 dx}{4 \times 8 \times 12 \times 16 a^{\frac{13}{2}}}$ — &c. Et sumptis fluentibus $S.dx(aa - xx)^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{3}{2}} x - \frac{x^3}{4a^{\frac{1}{2}}} - \frac{3x^5}{5 \times 4 \times 8 a^{\frac{5}{2}}} - \frac{3 \times 5 x^7}{7 \times 4 \times 8 \times 12 a^{\frac{9}{2}}} - \frac{3 \times 5 \times 9 x^9}{9 \times 4 \times 8 \times 12 \times 16 a^{\frac{13}{2}}}$ — &c. $= \frac{50841 a^{\frac{5}{2}}}{71680}$, factâ $x = a$, & neglectis, ob parvitatem, cæteris seriei terminis. Quare cum sit area OVKD $= \frac{b}{a^{\frac{3}{2}}} \times S.dx(aa - xx)^{\frac{3}{4}}$, si ponatur $x = a$ erit area OVKB $= \frac{50841}{71680} ba$, & 2OVKB seu area tota, BKVTa $= \frac{50841}{35840} ba = \frac{10}{7} ba$, circiter. Est itaque $\frac{10}{7} VO \times BO = Aa \times BO$, & hinc $VO = \frac{7}{10} Aa$; ac propterea corporis oscillantis resistentia in O ad ipsius gravitatem ut $\frac{7}{10} Aa$ ad longitudinem penduli.





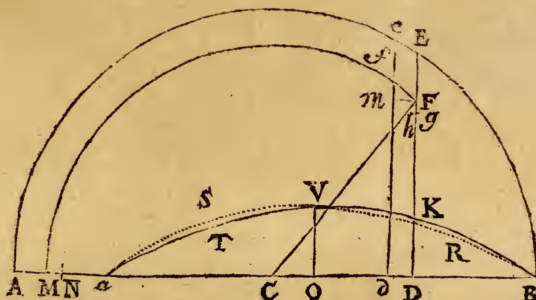
(z) * 182. *Quam proximè.* Propositionem 72. lib. 2. phor. quæ 30æ. hujus libri fere similis est, sed generalis, & demonstratu facilis, hic adjungemus.

Si curvæ cujusvis BCZ arcus totus AB, quem grave descensu per BC & subsequente ascensu per CA in medio resistente describit, extendatur in lineam rectam BA, & ad singula hujus rectæ puncta D erigantur perpendicula DK proportionalia medii resistentiis quas mobile in homologis curvæ BCA punctis D subit, sitque BKA curva quam punctum K perpetuo tan-

PROPOSITIO XXXI. THEOREMA XXV.

Si corporis oscillantis resistentia in singulis arcuum descriptorum partibus proportionalibus augeatur vel minuatur in datâ ratione; differentia inter arcum descensu descriptum & arcum subsequente ascensu descriptum, augebitur vel diminuetur in eâdem ratione.

Oritur enim differentia illa ([a]) ex retardatione penduli per resistentiam medii, ideoque est ut retardatio tota eique proportionalis



resistentia retardans. In superiore propositione rectangulum sub rectâ $\frac{1}{2}aB$ & arcuum illorum CB, Ca differentia Aa æqualis

tangit: area curvilinea B K A B æquabitur rectangulo P C × G H ex recta P C, quæ gravitatem constantem exponit, in differentiam G H abscissarum G C, H C arcuum B C, C A descensu & subsequente ascensu descriptorum.

Ex punctis D, d infinitè propinquis demittantur ad P C perpendicula D E, d e, & ex puncto d ad E D perpendiculum d F; & vis gravitatis P C erit ad vim tangentialem in loco D, quâ motus corporis in curvâ acceleratur, ut D d ad F d. * Nam ducta D G parallela P C & G d in curvam perpendiculari, exprimat D G gravitatis actionem, exprimet D d vim Tangentialem, sed ob similitudinem Triangulorum D d G, D d F est D G : D d = D d : F D, erit ergo D d ad F d ut vis gravitatis ad vim Tangentialem, quâpropter cum D d sumatur ubique æqualis ut est actio gravitatis, ubique F d exprimet vim Tangentialem; est F d = E e, si itaque P C repræsentet vim gravitatis erit D d : E e = P C ad vim Tangentialem, † ideoque vis illa tangentialis $= \frac{PC \times Ee}{Dd}$. Sed corporis descendentis vis acceleratrix æqualis est excessui vis tangentialis supra resistentiam; erit igitur vis acceleratrix in loco $D = \frac{PC \times Fe}{Dd} - DK$. Ducatur hæc vis in elementum spatii D d, & fiet $PC \times Ee - DK \times Dd = v\,dv$, si velocitas in loco D sit v (18, 19); & hinc, sumptis fluentibus, habetur $PC \times GE - BKD = \frac{1}{2}vv$. Fiat $BD = BA$, & ideo $v = o$, atque $GE = GC - CH = GH$, & erit $PC \times GH - BKAB = o$, ac proinde $PC \times GH = PKAB$. Q. E. D. 182

(a) * *Oritur enim differentia illa ex retardatione penduli per resistentiam medii.*

De Motu Corporum.

erat areæ $BKTa$. Et area illa, si maneat longitudo aB, augetur vel diminuitur in ratione ordinatim applicatarum DK; hoc est, in ratione resistentiæ, (b) ideoque est ut longitudo aB & resistentia conjunctim. Proindeque rectangulum sub Aa & $\frac{1}{2}aB$ est ut aB & resistentia conjunctim, & propterea Aa ut resistentia. *Q. E. D.*

Corol. 1. Unde si resistentia sit ut velocitas, differentia ar-

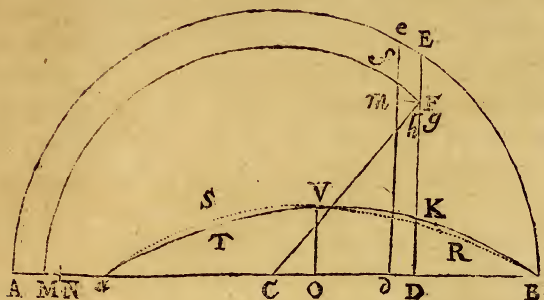
* Dividantur arcûs à duobus pendulis descripti in partes proportionales infinitè parvas, & totum illud quod deest singulo arcui, poterit concipi ut effectus retardationum quas corpora passa sunt singularum illarum particularum initio, spatium verò quod propter singulam retardationem deficit, est ut illa retardatio & tempus per quod corpus motum fuit post illam retardationem receptam usque ad finem oscillationis; sed quoniam in oscillationibus utut inæqualibus tempora quibus similes arcuum partes describuntur sunt æqualia, in medio non resistente, & in medio resistente saltem quam proximè, (180) spatia quæ deficiunt propter retardationes in proportionalibus arcuum partibus receptas, sunt ut illæ retardationes.

* *Ideo differentia arcuum est ut retardatio tota, eique proportionalis resistentia retardens*, si quantitates materiæ corporum pendulorum sint æquales, retardatio in singulis arcuum descriptorum partibus est ut resistentia in iisdem locis, sed ut resistentiæ sunt in datâ quâdam Lege velocitatem ex Hypothesi & velocitates in arcuum partibus proportionalibus sunt in Ratione datâ, ideo resistentiæ in singulis arcuum partibus proportionalibus sunt in ratione datâ, ac per consequens omnes retardationes, sunt in eâdem ratione, summæ ergo retardationum erunt in eâdem ratione datâ, Ergo tota spatia deficientia illis retardationibus proportionalia erunt in eâdem ratione, *Differentiæ ergo inter arcum descensu descriptum & arcum ascensu subsequente descriptum* in variis arcubus ab eodem corpore descriptis, *sunt in Datâ Lege Resistentiæ.*

183. * Cor. 1. Differentiæ arcuum, respectu arcuum descensu descriptorum eamdem sequuntur Legem quam resistentiæ sequuntur respectu velocitatum. Nam cum tempora quibus correspondentes & proportionales arcuum partes describuntur sint æqualia, velocitates erunt semper ut illæ arcuum partes, sive ut arcus toti, (180) quam proximè, ergo resistentiæ, retardationes & differentiæ arcuum eamdem Legem sequuntur respectu arcuum ac respectu velocitatum.

Cor. 2. * *Si Corpora pendula differant quantitate materiæ, Differentiæ arcuum sunt directè in Lege datâ arcuum & inversè ut quantitates materiæ:* Nam eo in casu retardationes in singulis arcuum partibus sunt directè ut resistentiæ & inversè ut quantitates materiæ; nam resistentia motus jacturam producit, quæ motus jactura est factum ex retardatione & massâ retardatâ, (per Def. 2. lib. 1.).

(b) * *Ideoque est ut longitudo aB & resistentia conjunctim.* Area illa si maneat longitudo aB, augetur vel diminuitur in ratione resistentiæ DK; si verò constans maneat resistentia seu ordinata DK, sed augeatur aB omnesque ejus partes dD in ratione totius aB augeantur, area illa augetur vel diminuitur in ratione longitudinis aB; unde si longitudo aB variabilis sit & resistentia seu ordinata DK in singulis longitudinum aB locis correspondentibus augeatur vel diminuatur in datâ ratione, area BKTa augebitur vel diminuetur in ratione compositâ ex ratione longitudinis aB & ratione resistentiæ auctæ vel diminutæ, proindeque rectangulum sub Aa & $\frac{1}{2}$ aB erit ut aB & resistentia conjunctim, & propterea Aa ut resistentia.



arcuum in eodem medio erit ut arcus totus descriptus: & contra.

Corol. 2. Si resistentia sit in duplicatâ ratione velocitatis, differentia illa erit in duplicatâ ratione arcus totius: & contra.

Corol. 3. Et universaliter, si resistentia sit in triplicatâ vel aliâ quâvis ratione velocitatis, differentia erit in eâdem ratione arcus totius: & contra.

Corol. 4. Et si resistentia sit partim in ratione simplici velocitatis, partim in ejusdem ratione duplicatâ, differentia erit partim in ratione arcus totius & partim in ejus ratione duplicatâ: & contra. Eadem erit lex & ratio resistentiæ pro velocitate, quæ est differentiæ illius pro longitudine arcus.

Corol. 5. Ideoque si, pendulo inæquales arcus successivè describente, inveniri potest ratio incrementi ac decrementi differentiæ hujus pro longitudine arcus descripti; habebitur etiam ratio incrementi ac decrementi resistentiæ pro velocitate majore vel minore.

Scholium Generale.

Ex his propositionibus, per oscillationes pendulorum in mediis quibuscunque, invenire licet resistentiam mediorum. Aeris

De Motu Corporum.

verò reſiſtentiam inveſtigavi per experimenta ſequentia. Globum ligneum pondere unciarum *Romanarum* $57\frac{7}{22}$, diametro digitorum *Londinenſium* $6\frac{7}{8}$ fabricatum, filo tenui ab unco ſatis firmo ſuſpendi, ita ut inter uncum & (c) centrum oſcillationis globi diſtantia eſſet pedum $10\frac{1}{2}$. In filo punctum notavi pedibus decem & unciâ unâ à centro ſuſpenſionis diſtans; & è regione puncti illius collocavi regulam in digitos diſtinctam, quorum ope notarem longitudines arcuum à pendulo deſcriptas. Deinde numeravi oſcillationes quibus globus octavam motus ſui partem amitteret. Si pendulum deducebatur à perpendiculo ad diſtantiam duorum digitorum, & inde demittebatur; ita ut toto ſuo deſcenſu deſcriberet arcum duorum digitorum, totâque oſcillatione primâ, ex deſcenſu & aſcenſu ſubſequente compoſitâ, arcum digitorum fere quatuor: (d) idem oſcillationibus 164 amiſit octavam motus ſui partem, ſic ut ultimo ſuo aſcenſu deſcriberet arcum digiti unius cum tribus partibus quartis digiti. Si primo deſcenſu deſcripſit arcum digitorum quatuor; amiſit octavam motus partem oſcillationibus 121, ita ut aſcenſu ultimo deſcriberet arcum digitorum $3\frac{1}{2}$. Si primo deſcenſu deſcripſit arcum digitorum octo, ſexdecim, triginta duorum vel ſexaginta quatuor; amiſit octavam motus partem oſcil-

(c) * *Et centrum oſcillationis globi.* Quid ſit centrum oſcillationis & quomodo inveniri poſſit, indicavimus in ſcholio poſt notam 478. lib. 1. Et ex his quæ ibi dicta ſunt, ſatis liquet in longioribus pendulis graviori globo inſtructis & filo tenui, centrum oſcillationis cum centro globi coincidere quam proximè.

(d) * *Idem oſcillationibus 164. amiſit octavam motus ſui partem, ſic ut ultimo ſuo aſcenſu deſcriberet arcum digiti* $1\frac{3}{4}$.

* Liquet (ex notâ *a* precèdente) quod differentia inter arcum deſcenſu deſcriptum & arcum aſcenſu ſubſequente deſcriptum ſit toti retardationi quam corpus paſſum eſt proportionalis, ideoque motui deſtructo per reſiſtentiæ actionem; aſcendat itaque corpus in fine primæ oſcillationis ad altitudinem qualemcunque, ſumaturque differentia arcus aſcenſu deſcripti ab arcu deſcenſu primo percurſi; Secundâ oſcillatione corpus aſcendere deberet in vacuo ad eam altitudinem ad quam in fine primæ oſcillationis aſſurrexerat, & ſumatur quod deeſt in ſecundo aſcenſu ab illâ altitudine, duæ illæ differentiæ ſunt ut motus in ſingulâ oſcillatione amiſſi, earum ſumma eſt ergo ut ſumma motus amiſſi in utraque oſcillatione, ſed duæ illæ differentiæ ſunt differentia inter altitudinem è quâ corpus primo deſcendit & altitudinem ad quam ultimo aſſurrexit; Ergo ratiocinio ad 164. oſcillationes continuato differentia inter altitudinem è quâ corpus primò deſcendit & altitudinem ad quam ultimo aſſurrexit, eſt ut ſumma motus quem reſiſtentia durantibus illis 164 oſcillationibus deſtruere valuit.

oscillationibus 69, $35\frac{1}{2}$, $18\frac{1}{2}$, $9\frac{2}{3}$, respectivè. Igitur differentia inter arcus descensu primo & ascensu ultimo descriptos, erat in casu primo, secundo, tertio, quarto, quinto, sexto, digitorum $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8 respective. (e) Dividantur eæ differentiæ per numerum oscillationum in casu unoquoque, & in oscillatione unâ mediocri, quâ arcus digitorum $3\frac{3}{4}$, $7\frac{1}{2}$, 15, 30, 60, 120 descriptus fuit, differentia arcuum descensu & subsequente ascensu descriptorum, erit $\frac{1}{656}$, $\frac{1}{242}$, $\frac{1}{69}$, $\frac{4}{71}$, $\frac{8}{37}$, $\frac{24}{29}$ partes digiti respectivè. (f) Hæ autem in majoribus oscillationibus sunt in duplicatâ ratione arcuum descriptorum quam proximè, in minoribus verò paulò majores quàm in eâ ratione; & propterea (per corol. 2. prop. XXXI. libri hujus) resisten-

LIBER SECUND. SECT. VI. PROP. XXXI. THEOR. XXV.

(e) * *Dividantur eæ differentiæ per numerum oscillationum &c.* Exempli causâ, si in primo casu dividatur differentia $\frac{1}{4}$ per numerum oscillationum 164, habebitur $\frac{1}{656}$ differentia inter arcum descensu descriptum & arcum subsequente ascensu descriptum in una mediocri oscillatione; quia differentia $\frac{1}{4}$ ex omnibus differentiis quæ per oscillationes 164 producuntur, composita est; & quia arcus totus unâ mediocri oscillatione descriptus medius est arithmeticè inter arcum maximum fere digitorum 4. primâ oscillatione descriptum, & arcum minimum digitorum $2\frac{3}{2}$ ultimâ oscillatione descriptum, ideo arcus ille mediocris invenitur capiendo dimidium summæ arcuum $4 + 2\frac{3}{2}$, quod est $3\frac{3}{4}$, aut etiam capiendo summam arcuum dimidiorum, videlicet $2 + 1\frac{3}{4}$. Atque eodem modo de cæteris ratiocinandum est.

(f) * *Hæ autem in majoribus oscillationibus &c.* * Dividantur omnes arcuum differentiæ in oscillatione mediocri per primam, omnes illæ differentiæ erunt ut 1.; 2. 7107.; 9. 5072., 36. 9577.; 141. 8378.; 542. 8965.

Quadrata verò arcuum sunt ut 1, 4, 16, 64, 256, 1024. unde ex eorum numerorum inspectione liquet differentias quæ in minoribus oscillationibus observatæ sunt esse ad eas quæ in majoribus arcubus observantur in majore ratione quam duplicatâ arcuum; In majoribus vero oscillationibus rationes illarum differentiarum ad rationem duplicatam arcuum magis accedunt, ut enim arcûs in Progressione duplâ fuere sumpti, ratio duplicata arcuum proximorum est ratio 1 ad 4. jam verò 9. 5072. est non multo major 4a. parte numeri 36. 9577., iste autem ad 4. partem numeri 141. 8378., magis accedit, propius adhuc iste accedit ad quartam partem numeri 542. 8965. Unde inter arcus magnos, motus amissos in duplicatâ fere ratione arcuum sive velocitatum sumi posse deducitur. 182.

Idem manifestius patebit si dividantur hi numeri qui arcuum differentias exprimunt per ipsorum arcuum rationes, habebuntur enim 1.; 1. 3553; 2. 3788; 4. 619; 8. 8648; 16. 9655; qui si resistentiæ forent ut quadrata velocitatum, deberent esse ut ipsi arcus $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8, 16. Sed ex ipsâ inspectione liquet minores differentias majoribus numeris exprimi quam ipsi arcus, majores vérò ferè iisdem. Si verò supponeretur resistentiam non tantùm esse in ratione duplicatâ velocitatum, sed etiam; partem aliquam aliun-

De Motu Corporum.

stentia globi, ubi celerius movetur, est in duplicatâ ratione velocitatis quam proximè; ubi tardiùs, paulò major quam in eâ ratione.

(g) Designet jam V velocitatem maximam in oscillatione quâvis, sintque A, B, C quantitates datæ, & fingamus quod differentia arcuum sit $AV + BV^{\frac{3}{2}} + CV^2$. (h) Cum velocitates maximæ sint in cycloide ut semisses arcuum oscillando descrip-

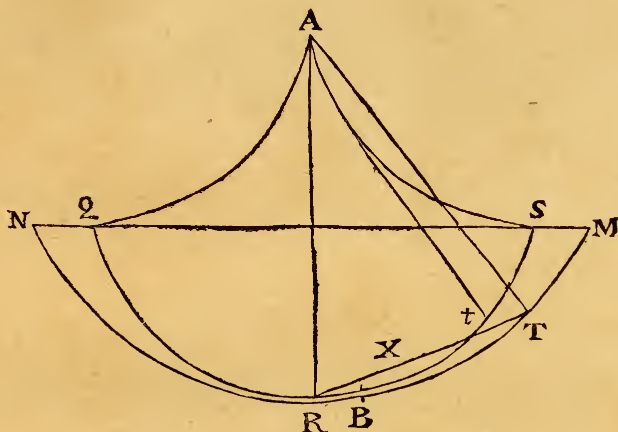
aliunde quam ex merâ inertiâ materiæ oriundam, esse ut velocitas, ideoque cum hæ quantitates mox inventæ sint quotientes differentiarum arcuum per velocitates divisarum, hæ quantitates constarent parte constante & aliâ parte velocitati sive arcui proportionatâ.

Sumatur itaque prima quantitas 1, & ordine conferatur cum 2ª, tum cum tertia, cum quarta &c. supponaturque illas constare duabus partibus altera velocitati proportionata altera constanti, v. gr. sit prima quantitas $1 = a + x$ secunda $1.3553 = 2a + x$, iis ita binatim calculatis ut eruatur valor a & x, quantitas constans x, in singulo calculo eadem non invenietur, sed varii isti obtinebuntur valores hoc ordine .6447; .5404; .4829; .4757; .4849, qui decrescunt ordine quodam regulari (ultimo excepto ob aliqualem exiguum errorem), unde liquet, rationem differentiarum arcuum, non esse partim in ratione duplicatâ ipsorum arcuum, & partim in eorum arcuum ratione simplici sed his adjungi debere rationem aliquam intermediam quam sesquiplicatam arcuum assumit *Newtonus* quod cum experimentis propius consentit.

(g) * *Designet jam V velocitatem maximam*, sive quantitatem velocitati maximæ proportionalem, *in oscillatione quâvis, sintque A, B, C quantitates* constantes, quarum valores per experimenta determinabuntur; & fingamus quod resistentia, seu differentia arcuum ipsi proportionalis (prop. XXXI.), sit partim ut velocitas, partim ut velocitatis quadratum, & partim ut velocitatis dignitas cujus index $\frac{3}{2}$, & proinde *supponamus quod arcuum differentia sit* $AV + BV^{\frac{3}{2}} + CV^2$ *&c.*

(h) * *Cum velocitates maximæ &c.* Corpus pendulum in medio non resistente oscilletur in cycloide SBRQ, sitque A punctum suspensionis, & R punctum infimum ac medium arcus totius SRQ. Centro A & radio AR describatur arcus circuli MTRN, in quo corpus idem, vel aliud simile & æquale oscilletur in eodem medio non resistente. Sit TR arcus circularis æqualis arcui cycloidis tR, & RB arcus quam minimus cycloidi & circulo communis (465. lib. 1.). Jam si corpus e locis T & B successivè cadat in circulo, erit ipsius velocitas maxima in R descensu per arcum TR acquisita, ad velocitatem descensu per arcum BR acquisitam, ut chorda TXR ad chordam arcus RB (88. lib. 1.), aut, quod idem est (per lemma VII. lib. 1.), ut chorda TXR ad arcum cycloidis BR; & velocitas descensu per arcum BR acquisita in R est ad velocitatem maximam descensu per arcum cycloidis tBR acquisitam, ut arcus BR ad arcum tBR seu arcum circuli æqualem TBR (per demonstr. prop. LI. lib. 1). Quare, ex æquo, velocitas maxima in R descensu per arcum circularem TBR acquisita est ad velocitatem maximam in R descensu per cycloidis arcum tBR acquisitam, ut chorda RT ad arcum tBR vel TBR. Sunt autem velocitate maximæ in medio resistente velocitatibus maximis in medio non resistente proportionales quam proximè, & in puncto medio arcuum qui ferè oscillatione integra describuntur, contingunt (180). Paribus igitur arcubus, velocitates maximæ in cycloide sunt ad velocitates maximas in circulo, ut semisses

criptorum, in circulo vero ut ſemiſſium arcuum illorum chordæ; ideoque paribus arcubus majores ſint in cycloide quam in circulo, in ratione ſemiſſium arcuum ad eorundem chordas; (i) tempora autem in circulo ſint majora quam in cycloide



miſſe arcuum oſcillando deſcriptorum ad eorumdem arcuum circularium chordas, quam proximè; & ideo, paribus arcubus majores ſunt in cycloide quam in circulo in ratione ſemiſſium arcuum ad eorumdem chordas in circulo ductas.

(i) * *Tempora autem in circulo ſunt majora quam in Cycloide in velocitatis ratione reciprocâ.* * Id eſt, tempora in circulo ſunt ad tempus in arcu quovis Cycloidis, ut ſemiſſis arcus circuli oſcillando deſcripti ad ejuſdem ſemiſſis chordam, ſive invertendo & temporum dimidia ſumendo, tempus ſemioſcillationis in Cycloide eſt ad tempus ſemioſcillationis in circulo (pendulis exiſtentibus ejuſdem longitudinis) ut chorda arcus deſcripti ad ipſum arcum, quæ quidem proportio proximè tantùm obtinet.

* Eſt enim tempus oſcillationis integræ cujuſvis in Cycloide ad tempus deſcensûs per dimidiam penduli longitudinem ut ſemiperipheria ad radium (vide not. 470. ad Prop. LII. lib. I.) ideoque etiam tempus ſemioſcillationis in cycloide ad tempus illud deſcensûs per dimidiam penduli longitudinem ut quadrans circuli ad radium, ſed tempus deſcenſus per quadruplum dimidiæ longitudinis penduli, ſive tempus deſcensûs per Diametrum circuli cujus pendulum eſt radius, eſt duplum temporis deſcenſus per dimidiam penduli longitudinem, ideoque tempus ſemioſcillationis in Cycloide eſt ad tempus deſcensûs per Diametrum circuli cujus longitudo penduli eſt radius, ut circuli quadrans ad Diametrum. Sed, ratio temporis lapsûs per Diametrum circuli ad tempus ſemioſcillationis in arcu ejuſdem circuli eſt (ut mox liquebit) compoſita ex ratione Diametri ad quadrantem circuli & chordæ ad arcum, quam proximè, unde ex æquo erit tempus in Cycloide ad tempus in circulo ut chorda circuli ad ejus arcum oſcillando deſcriptum. Rationem autem temporis deſcenſus per Diametrum circuli ad tempus ſemioſcillationis in arcu ejus circuli eſſe compoſitam ex ratione Diametri ad qua- 182.

DE MOTU CORPORUM.

de in velocitatis ratione reciprocâ; patet arcuum differentias (quæ

quadrantem circuli & ex ratione chordæ ad arcum oscillando descriptum, saltem quam proxime, sequenti calculo constabit.

Descendat itaque corpus per arcum L B centro C descriptum & Diametro A B, sit t tempus quæsitum quo corpus descendit per eum arcum L B, sitque b tempus datum quo corpus labitur per Diametrum A B, & quo velocitate per eum lapsum in B acquisitâ posset describere uniformiter duplum A B sive 2 A B, sumatur in arcu L B portiuncula infinitè parva M m quam corpus descendens uniformiter describere censeatur tempore infinitè parvo dt, ducanturque ex punctis L & M lineæ L H, M E in diametrum perpendiculares; Cum tempora quibus spatia data uniformiter describuntur sint ut illa spatia directè & velocitates quibus percurruntur inversè, sitque velocitas quæ in B acquisita est per lapsum ex A B ad velocitatem per lapsum ex L in M, sive ex H in E acquisitam, ut $\sqrt{AB}$ ad $\sqrt{HE}$, erit $b : dt = \frac{2\,AB}{\sqrt{AB}} : \frac{Mm}{\sqrt{HE}}$; Dicatur ergo $AB = 1$; $HB = h$, $BE = x$, $EM = y$; $HE = h - x$ erit $b : dt = 2 : \frac{Mm}{\sqrt{h-x}}$, est autem $Mm = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ & ex naturâ circuli (cum sit $yy = x - xx$, & $2y\,dy = dx - 2x\,dx$, sive $dy = \frac{1 - 2x}{2\sqrt{x - xx}}$) dx invenietur $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \pm \frac{dx}{2\sqrt{x - xx}}$, & quoniam dum crescit B E decrescit L M est $Mm = \frac{-dx}{2\sqrt{x - xx}}$, resolvatur ergo $\frac{1}{\sqrt{x - xx}}$ in seriem per formulam Newtonianam invenietur $\frac{1}{\sqrt{x - xx}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{3x^{\frac{3}{2}}}{2 \times 4}$ &c. ideoque Mm sive $\frac{-dx}{2\sqrt{x - xn}} = \frac{1}{2} \times - \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{2} - \frac{3x^{\frac{3}{2}}dx}{2 \times 4}$ &c. Pariter resolvatur $\frac{1}{\sqrt{h - x}}$ in seriem per eamdem formulam erit $\frac{1}{\sqrt{h - x}} = \frac{1}{h^{\frac{1}{2}}} + \frac{x}{2h^{\frac{3}{2}}} + \frac{3x^2}{2 \times 4h^{\frac{5}{2}}}$ &c. $= \frac{1}{h^{\frac{1}{1}}} \times 1 + \frac{x}{2h} + \frac{3x^2}{2 \times 4h^2}$ &c. Ductis ergo per se mutuo his seriebus

$$\frac{Mm}{\sqrt{h-x}} = \frac{1}{2h^{\frac{1}{2}}} \times - \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{2} - \frac{3x^{\frac{3}{2}}dx}{2 \times 4} \text{ \&c.}$$

$$- \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{2h} - \frac{x^{\frac{3}{2}}dx}{2 \times 2h} - \frac{3x^{\frac{5}{2}}dx}{2 \times 4 \times 2h} \text{ \&c.}$$

$$- \frac{3x^{\frac{3}{2}}dx}{2 \times 4h^2} - \frac{3x^{\frac{5}{2}}dx}{2 \times 2 \times 4h2} - \frac{3 \times 3x^{\frac{7}{2}}dx}{2 \times 4 \times 2 \times 4h^2} \text{ \&c.}$$

&c. &c. &c.

ideoque integralis

$$S.\frac{Mm}{\sqrt{h-x}} = \frac{1}{2h^{\frac{1}{2}}} \times - 2x^{\frac{1}{2}} - \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{2 \times 3} - \frac{2 \times 3x^{\frac{5}{2}}}{2 \times 4 \times 5} \text{ \&c.}$$

$$- \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{2 \times 3h} - \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{2 \times 2 \times 5h} - \frac{2 \times 3x^{\frac{7}{2}}}{2 \times 4 \times 2 \times 7h} \text{ \&c.}$$

$$- \frac{2 \times 3x^{\frac{5}{2}}}{2 \times 4 \times 5h^2} - \frac{2 \times 3x^{\frac{7}{2}}}{2 \times 2 \times 4 \times 7h^2} - \frac{2 \times 3 \times 3x^{\frac{9}{2}}}{2 \times 4 \times 2 \times 4 \times 9h^2} \text{ \&c.}$$

&c. &c. &c.

Cum ergo sit $b : dt = 2 : \frac{Mm}{\sqrt{h-x}}$ erit $b : t = 2 : S.\frac{Mm}{\sqrt{h-x}}$, sed quando t fit o, tunc est $h = x$ ideoque Integralis quæsita in hanc mutatur, (posito ubique h pro x)

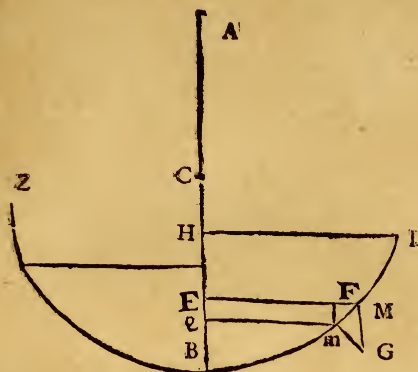
$$S.\frac{Mm}{h-x} = -1 - \frac{h}{2 \times 3} - \frac{3h^2}{2 \times 4 \times 5} \text{ \&c.}$$

$$- \frac{1}{2 \times 3} - \frac{h}{2 \times 2 \times 5} - \frac{3h^2}{2 \times 4 \times 2 \times 7} \text{ \&c.}$$

$$- \frac{3}{2 \times 4 \times 5} - \frac{3h}{2 \times 2 \times 4 \times 7} - \frac{2 \times 3 \times 3h^2}{2 \times 4 \times 2 \times 4 \times 9} \text{ \&c.}$$

&c. &c. &c.

Ideoque hæc est quantitas illa constans quæ debet tolli ex valore integralis quæ in proportione $b : t = 2 : S.\frac{Mm}{\sqrt{h-n}}$ pro $S.\frac{Mm}{\sqrt{h-n}}$ adhibetur, quæcumque assumatur valor in-



indeterminatæ x, ſed ubi totus arcus L B eſt deſcriptus tunc x fit o, & evaneſcit prior ſeries $\frac{1}{2h^{\frac{1}{2}}} \times - 2x^{\frac{1}{2}}$ &c. ergo in eo caſu integralis $S. \frac{\mathrm{M\,m}}{\sqrt{h-n}}$ eſt æqualis ſoli quantitati illi conſtanti adſumptæ cum ſignis mutatis ideoque eſt,

$$b:t = 2: \quad 1 + \frac{h}{2\times 3} + \frac{3h^2}{2\times 4\times 5} \text{ \&c.}$$
$$+ \frac{1}{2\times 3} + \frac{h}{2\times 2\times 5} \text{ \&c.}$$
$$+ \frac{3}{2\times 4\times 5} \text{ \&c.}$$
$$\text{\&c.}$$

Jam autem cum M m, ſit æqualis ſeriei $\frac{1}{2} \times \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{2} + \frac{2x^{\frac{3}{2}}dx}{2\times 4}$ &c. ejus integralis eſt $\frac{1}{2} \times 2x^{\frac{1}{2}} + \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{2\times 3} + \frac{2\times 3x^{\frac{5}{2}}}{2\times 4\times 5}$ &c. $= \sqrt{x} \times 1 + \frac{x}{2\times 3} + \frac{3x^2}{2\times 4\times 5}$ &c. in quâ ſi fiat $x = 1$ habebitur ſemiperipheria circuli, & ſi fiat $x = h$ habebitur arcus L B, tumque illæ duæ ſeries in has abibunt

$$1 + \frac{1}{2\times 3} + \frac{3}{2\times 4\times 5} \text{ \&c.}$$
$$\text{\&} \quad \sqrt{h} \times 1 + \frac{h}{2\times 3} + \frac{3h^2}{2\times 4\times 5} \text{ \&c.}$$

Quæ ſi per ſe mutuo ducantur earum factum erit 181.

$$\sqrt{h} \times 1 \quad + \frac{h}{2\times 3} + \frac{3h^2}{2\times 4\times 5} \text{ \&c.}$$
$$\frac{1}{2\times 3} + \frac{h}{2\times 3\times 2\times 3} \text{ \&c.}$$
$$\frac{3}{2\times 4\times 5} \text{ \&c.}$$
$$\text{\&c.}$$

Sed termini hujus ſeriei ſaltem primi, iidem ſunt cum terminis ſeriei ſuperius inventæ pro valore $S. \frac{\mathrm{M\,m}}{\sqrt{h-n}}$, ſit ergo arcus L B $= a$, Peripheria circuli cujus Diameter eſt 1 ſit p, erit $\sqrt{h} \times S. \frac{\mathrm{M\,m}}{\sqrt{h-x}} = \frac{ap}{2}$, ſive $S. \frac{\mathrm{M\,m}}{\sqrt{h-x}} = \frac{ap}{2\sqrt{h}}$, ſed $\sqrt{h}$ eſt æqualis chordæ L B, ex naturâ circuli, quæ ſi dicatur c, erit $S. \frac{\mathrm{M\,m}}{\sqrt{h-x}} = \frac{ap}{2c}$. Unde tandem eſt $b : t = 2 : \frac{ap}{2c} = 1 : \frac{ap}{4c} = 1 \times c : a \times \frac{p}{4}$ ſive eſt b tempus deſcenſus per Diametrum vel per chordam quamlibet ad t tempus deſcenſus per arcum in ratione compoſitâ ex ratione Diametri 1 ad $\frac{p}{4}$ ſive quadrantem peripheriæ, & ex ratione chordæ c ad arcum a. Q. E. D.

DE MOTU CORPORUM.

(quæ (k) ſunt ut reſiſtentia & quadratum temporis conjunctim) eaſdem fore, quamproximè, in utrâque curvâ: (†) deberent enim differentiæ illæ in cycloide augeri, unà cum reſiſtentia, in duplicatâ circiter ratione arcûs ad chordam, ob velocitatem in ratione illâ ſimplici auctam; & diminui, unà cum quadrato temporis, in eâdem duplicatâ ratione. Itaque ut reductio fiat ad cycloidem, eædem ſumendæ ſunt arcuum differentiæ quæ fuerunt in circulo obſervatæ, velocitates verò maximæ ponendæ ſunt arcubus vel dimidiatis vel integris, hoc eſt, numeris $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8, 16 analogæ. Scribamus ergo in caſu ſecundo, quarto & ſexto, numeros 1, 4 & 16 pro V; & prodibit arcuum differentia $\frac{\frac{1}{2}}{121} = A + B + C$ in caſu ſecundo; $\frac{2}{35\frac{1}{2}} = 4A + 8B + 16C$ in caſu quarto; & $\frac{8}{9\frac{2}{3}} = 16A + 64B + 256C$ in caſu ſexto. Et ex his æquationibus, (l) per debitam collationem & reductionem analyticam, fit A=0, 0000916, B=0, 0010847, & C=0, 0029558. Eſt igitur differentia arcuum ut $0,0000916V + 0,0010847V^{\frac{3}{2}} + 0,0029558V^2$: & propterea cum (per corollarium propoſitionis XXX. applicatum ad hunc caſum) reſiſtentia globi in medio arcus oſcillando deſcripti, ubi velocitas eſt V, (m) ſit ad ipſius pondus ut $\frac{7}{11}$A

(k) * *Quæ ſunt ut reſiſtentia & quadratum temporis conjunctim.* (per cor. 3. lem. X). Reſiſtentia enim conſiderari poteſt ut vis quæ retardationem producit, & differentia arcuum ut ſpatium quod corpus vi illâ mediocri ac conſtantte ſollicitatum deſcriberet. Hinc arcuum differentiæ erunt quam proximè ut *reſiſtentia directè & quadratum temporis conjunctim.*

(†) * *Deberent differentiæ in Cycloide augeri unà cum reſiſtentia in duplicatâ circiter ratione, arcus ad chordam ob velocitatem in ratione illa ſimplici auctam*, quia ſcilicet pars maxima reſiſtentiæ eſt ut quadrata velocitatum.

(l) * *Per debitam collationem.* Prima æquatio eſt $\frac{\frac{1}{2}}{121} = \frac{1}{2 \times 121} = A + B + C$ 2ª. diviſa per 4. eſt $\frac{1}{71} = A + 2B + 4C$, & tertia diviſa per 16. eſt $\frac{3}{58} = A + 4B + 16C$. Ex his autem æquationibus facilè eruuntur valores litterarum A, B, C, ſi fractiones $\frac{1}{242}$, $\frac{1}{71}$, & $\frac{3}{58}$ ad decimales reducantur.

(m) * *Sit ad ipſius pondus.* AV eſt pars differentiæ arcuum genita per reſiſtentiæ partem illam quæ eſt ut velocitas :BV

$\frac{7}{11}AV+\frac{7}{10}BV^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{4}CV^2$ ad longitudinem penduli; ſi pro A, B & C ſcribantur numeri inventi, fiet reſiſtentia globi ad ejus pondus, ut $0,0000583\,V+0,0007593\,V^{\frac{3}{2}}+0,0022169\,V^2$ ad longitudinem penduli inter centrum ſuſpenſionis & regulam, id eſt, ad 121 digitos. Unde cum V in caſu ſecundo deſignet 1, in quarto 4, in ſexto 16: erit reſiſtentia ad pondus globi in caſu ſecundo ut 0, 0030345 ad 121, in quarto ut 0, 041748 ad 121, in ſexto ut 0, 61705 ad 121.

Arcus quem punctum in filo notatum in caſu ſexto deſcripſit, erat $120-\frac{8}{9\frac{2}{3}}$ ſeu $119\frac{5}{29}$ digitorum. Et propterea cum radius eſſet 121 digitorum, & longitudo penduli inter punctum ſuſpenſionis & centrum globi eſſet 126 digitorum, arcus quem centrum globi deſcripſit (n) erat $124\frac{3}{31}$ digitorum. Quoniam corporis oſcillantis velocitas maxima, ob reſiſtentiam aeris, non incidit in punctum infimum arcus deſcripti, (o) ſed in medio ferè loco arcus totius verſatur: hæc eadem erit circiter ac ſi glo-

$BV^{\frac{3}{2}}$, pars differentiæ arcuum genita per reſiſtentiæ partem quæ eſt in ſeſquiplicatâ ratione velocitatis; & CV^2 pars differentiæ arcuum producta per reſiſtentiæ totius partem quadrato velocitatis proportionalem (per cor. 4. prop. 31). Sed (per cor. prop. 30.) ſi reſiſtentia ſit ut velocitas, eſt $\frac{7}{11}AV$ ad longitudinem penduli ut corporis oſcillantis reſiſtentia in puncto medio arcûs deſcripti ad ejuſdem pondus; ſi reſiſtentia ſit ut velocitatis quadratum, reſiſtentia illa in puncto medio arcûs deſcripti eſt ad corporis pondus ut $\frac{3}{4}CV^2$ ad longitudinem penduli, & (181) ſi reſiſtentia ſit in ratione ſeſquiplicatâ velocitatis, eſt illa ad corporis pondus ut $\frac{7}{10}BV^{\frac{3}{2}}$ ad longitudinem penduli. Quarè cum hic ſupponatur reſiſtentia partim in ratione velocitatis, partim 182. in velocitatis ratione ſeſquiplicatâ & partim in duplicatâ, reſiſtentia globi in medio arcûs oſcillando deſcripti, ubi velocitas eſt V, erit ad ipſius pondus ut $\frac{7}{11}AV+\frac{7}{10}BV^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{4}CV^2$, ad longitudinem penduli.

(n) * *Erat* $124\frac{3}{31}$ *digit.* Sunt enim radii ut ſimiles circulorum arcus, & ideò radius 121, eſt ad ſuum arcuum $119\frac{5}{29}$ ut radius 126, ad arcum correſpondentem $124\frac{3}{31}$ quamproximè.

(o) * *Sed in medio ferè loco.* Patet per (not. 180).

globus deſcenſu ſuo toto in medio non reſiſtente (p) deſcriberet arcus illius partem dimidiam digitorum $62\frac{3}{62}$, idque in cycloide, ad quam motum penduli ſupra reduximus: & propterea velocitas illa æqualis erit velocitati quam globus, perpendiculariter cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem arcus illius ſinui verſo æqualem, acquirere poſſet. Eſt autem ſinus ille verſus in cycloide ad arcum iſtum $62\frac{3}{62}$ ut arcus idem ad penduli longitudinem duplam 252, & propterea æqualis

(p) * *Deſcriberet arcûs illius partem dimidiam.* Corpus oſcillando deſcribat arcum B a in medio reſiſtente & arcum B A in medio non reſiſtente; ſit C punctum cycloidis infimum; O, punctum medium arcûs B a, & arcus CD ſit æqualis arcui BO, velocitas maxima deſcenſu corporis per arcum B O acquiſita in medio reſiſtente eſt ad velocitatem maximam per arcum B C acquiſitam in medio reſiſtente ut arcus B O, ad arcum B C (180). Sed ſi corpus è loco D in medio non reſiſtente cadendo deſcribat arcum D C, erit etiam velocitas ipſius in C deſcenſu per arcum D C acquiſita ad velocitatem acquiſitam ibidem deſcenſu per arcum B C ut arcus C D, vel æqualis B O ad arcum B C, (prop. 51. lib 1). Ergò velocitas in medio reſiſtente per arcum B O acquiſita in O æqualis eſt velocitati quam corpus in medio non reſiſtente cadendo per arcum D C = B O haberet in C; & propterea (85. lib. 1.) velocitas illa æqualis eſt velocitati quam corpus perpendiculariter cadendo in medio non reſiſtente, & caſu ſuo deſcribendo altitudinem F C æqualem ſinui verſo arcûs C D, acquirere poſſet. Sit jam P punctum ſuſpenſionis, P C longitudo penduli S D C ſemicyclois, S G & D F ad P C normales, & C H G C circulus diametro G C deſcriptus ſecans DF in H. Jungatur chorda C H, & erit arcus cycloidis S D = 2 G C − 2 C H, & arcus S E = 2 G C (462. lib. 1.) ideóque arcus D C = 2 C H. Eſt autem (ex naturâ circuli) C F ad C H ut C H ad C G, & hinc C F ad 2 C H ſeu D C, ut 2 C H ad 4 C G, ſivè ut D C ad 2 P C; Hoc eſt, ſinus verſus C F, ad arcum C D, ut arcus idem ad penduli longitudinem duplam.

ſis digitis 15, 278. Quare velocitas ea ipſa eſt quam corpus cadendo & caſu ſuo ſpatium 15, 278 digitorum deſcribendo acquirere poſſet. Tali igitur cum velocitate globus reſiſtentiam patitur, quæ ſit ad ejus pondus ut 0,61705 ad 121, vel (ſi (q) reſiſtentiæ pars illa ſola ſpectetur quæ eſt in velocitatis ratione duplicatâ) ut 0,56752 ad 121.

(r) Experimento autem hydroſtatico inveni quod pondus globi hujus lignei eſſet ad pondus globi aquei magnitudinis ejuſdem ut 55 ad 97: & propterea cum 121 ſit ad 213, 4 in eâdem ratione, erit reſiſtentia globi aquei præfatâ cum velocitate progredientis (ſ) ad ipſius pondus ut 0,56752 ad 213, 4, id eſt, ut 1 ad $376\frac{1}{50}$. Unde cum pondus globi aquei, quo tempore globus cum velocitate uniformiter continuatâ (t) deſcribat longitudinem digitorum 30,556, velocitatem illam omnem in globo cadente generare poſſet; (u) manifeſtum eſt quod vis reſiſtentiæ eodem tempore uniformiter continuata tollere poſſet velocitatem minorem in ratione 1 ad $376\frac{1}{50}$, hoc eſt, velocitatis totius partem $\frac{1}{376\frac{1}{50}}$.

Et

(q) * *Si reſiſtentiæ pars illa ſola &c.* Si enim in quantitate, 0, 0022169 V^2 quæ eſt ad longitudinem penduli ut reſiſtentiæ pars velocitatis quadrato proportionalis ad corporis pondus loco V ſcribatur 16, & loco V^2 ſcribatur 256, fiet 0,0022169 V^2 = 0, 56752, quamproximè.

(r) * *Experimento autem hydroſtatico.* Experimentum facile eſt. Cum enim corpus fluido immerſum, eâdem vi ſurſum urgeatur quâ par fluidi volumen ſuſtinetur, id eſt, vi quæ æqualis eſt ponderi fluidi ejuſdem magnitudinis (cor. 5. & 6. prop. 20. lib. hujus) corpus fluido ſpecificè leviori immerſum ponderis ſui partem amittet æqualem ponderi fluidi ejuſdem voluminis; & propterea ſi corpus illud fluido immerſum ponderetur, cognoſcetur pondus fluidi ejuſdem magnitudinis cum corpore. Si fluidum corpore immergendo ſpecificè gravius fit, corpori illi adjungi poteſt aliud corpus majoris gravitatis ſpecificæ ut eorum ſumma fluido ſpecificè gravior fiat. 182

(ſ) *Ad ipſius pondus.* Reſiſtentia globi ſolidi æqualis eſt reſiſtentiæ globi aquei ejuſdem magnitudinis & cum eâdem velocitate in eodem medio progredientis, ſed reſiſtentia globi ſolidi eſt ad ejuſdem pondus ut 0, 56752 ad 121, & pondus globi ſolidi ad pondus globi aquei ut 121 ad 213.4, ſeu ut 1 ad $376\frac{1}{50}$ quamproximè.

(t) * *Deſcribat longitudinem digit.* 30,556, duplam nimirum longitudinis digitorum 15.278, quæ velocitatem illam omnem in globo cadente generare poſſet (29. lib. 1.).

(u) * *Manifeſtum eſt.* Sunt enim velocitates dato tempore genitæ vel extinctæ, ut vires quibus generantur vel extinguuntur (13. lib. 1.).

DE MOTU CORPORUM.

Et propterea quo tempore globus, eâ cum velocitate uniformiter continuatâ, longitudinem ſemidiametri ſuæ, ſeu digitorum $3\frac{1}{16}$, deſcribere poſſet, (x) eodem amitteret motus ſui partem $\frac{1}{3342}$.

Numerabam etiam oſcillationes quibus pendulum quartam motus ſui partem amiſit. In ſequente tabulâ numeri ſupremi denotant longitudinem arcus deſcenſu primo deſcripti, in digitis & partibus digiti expreſſam: numeri medii ſignificant longitudinem arcûs aſcenſu ultimo deſcripti; & loco infimo ſtant numeri oſcillationum. Experimentum deſcripſi tanquam magis accuratum quam cum motus pars tantum octava amitteretur. (y) Calculum tentet qui volet.

Deſ-

(x) * *Eodem amitteret motûs ſui partem.* Nam velocitates eâdem vi conſtante vel extinctæ ſunt ut tempora quibus generantur vel extinguuntur (13. lib. 1.), ſed tempora quibus corpora duo eâdem velocitate uniformi percurrunt longitudines digit. 30, 556, & digit. $3\frac{7}{16}$, ſunt ut hæ longitudines (5 lib 1.). Quarè velocitates amiſſæ ſunt ut eædem longitudines, & ideò 30, 556 ad $3\frac{7}{16}$, ut $\frac{1}{376\frac{1}{50}}$ ad velocitatem amiſſam eo tempore quo globus longitudinem ſemidiametri ſuæ ſeu digit. $3\frac{7}{16}$, percurrit; undè invenitur velocitas illa amiſſa $=\frac{1}{3342}$, quamproximè.

(y) * *Calculum tentet.* Quoniam experimentum magis accuratum eſt, calculum tentabimus. Erunt igitur differentiæ arcuum primo deſcenſu & ultimo aſcenſu deſcriptorum.

$\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8, 16.

Arcus in unâ mediocri oſcillatione deſcripti, ſunt

$3\frac{1}{2}$, 7, 14, 28, 56, 112.

Differentiæ arcuum deſcenſu & ſubſequente aſcenſu in unâ mediocri oſcillatione deſcriptorum, ſunt

$$\frac{\frac{1}{2}}{374},\ \frac{1}{272},\ \frac{2}{162\frac{1}{2}},\ \frac{4}{83\frac{1}{3}},\ \frac{8}{41\frac{2}{3}},\ \frac{16}{22\frac{2}{5}}.$$

ſive ut 1. 2.7500; 9.2061; 35.5040; 143.7760; 528.5881

Hæ autem differentiæ in majoribus oſcillationibus ſunt in duplicatâ ratione arcuum deſcriptorum ſatis proximè; Nam $\frac{8}{41\frac{2}{3}} : \frac{16}{22\frac{2}{3}} = 34 : 125$, & $34 : 126 = 1 : 4$; hoc eſt, in duplicatâ ratione arcuum deſcriptorum. Et ſimiliter $\frac{4}{83\frac{1}{3}} : \frac{8}{41\frac{2}{3}} = 1 : 4$, accuratè; in minoribus verò oſcillationibus, differentiæ illæ ſunt in ratione paulò majore quam duplicatâ arcuum deſcriptorum. Eſt enim $\frac{1}{272} : \frac{1}{162\frac{1}{2}} = 325 : 1088$ & hæc ratio major eſt ratione 1 ad 4. Deſignet jam V, ut ſupra, velocitatem maximam in oſcillatione quâvis, & $AV + BV^{\frac{3}{2}} + CV^2$, differentiam arcuum; & quoniam velocitates ponendæ ſunt arcubus deſcriptis ſcil. numeris $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8, & 16, analogæ, ſcribamus in caſ. 2°. 4°. & 6°. numeros 1, 4, 16, pro V, & prodibit arcuum differentia $\frac{1}{272} = A + B + C$ in caſ. 2°. $\frac{4}{83\frac{1}{3}} = 4A + 8B + 16C$ in caſ.

Descensus primus	2	4	8	16	32	64
Ascensus ultimus	$1\frac{1}{2}$	3	6	12	24	48
Numerus Oscillat.	374	272	$162\frac{1}{2}$	$83\frac{1}{3}$	$41\frac{2}{3}$	$22\frac{2}{3}$

Poftea globum plumbeum diametro digitorum 2, & pondere unciarum *Romanarum* $26\frac{1}{4}$ fufpendi filo eodem, fic ut inter centrum globi & punctum fufpenfionis intervallum effet pedum $10\frac{1}{2}$, & numerabam ofcillationes quibus data motus pars amitteretur. Tabularum fubfequentium prior exhibet numerum ofcillationum quibus pars octava motus totius ceffavit; fecunda numerum ofcillationum quibus ejufdem pars quarta amiffa fuit.

Def-

caf. 4°. & $\frac{16}{22\frac{1}{3}} = 16A + 64B + 256C$ in caf. 6°. Ex his æquationibus habetur $A = 0{,}0005096$, $B = 0{,}0005884$, & $C = 0{,}0025784$. Eft igitur differentia arcuum ut $0{,}0005096\,V + 0{,}0005884\,V^{\frac{3}{2}} + 0{,}0025784\,V^2$, & propterea cum refiftentia globi in medio arcûs ofcillando defcripti ubi velocitas eft V, fit ad ipfius pondus ut $\frac{7}{11}AV + \frac{7}{10}BV^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}CV^2$ ad longitudinem penduli, fiet refiftentia globi ad ejus pondus ut $0{,}0003243\,V + 0{,}0004119\,V^{\frac{3}{2}} + 0{,}0019338\,V^2$, ad longitudinem penpenduli inter centrum fufpenfionis & regulam, id eft, ad 121 digit. Undè cum V in caf. 2°. defignet 1; in 4°. 4, in 6°. 16; erit refiftentia ad pondus globi in caf. 2°. ut 0,0267 ad 121; in 4°. ut 0,0355332 ad 121; in 6°. ut 0,5266032 ad 121.

Ponatur refiftentia in tardioribus motibus partim uniformis & partim velocitati, partim velocitatis quadrato proportionalis, ideòque arcuum differentia fit $A + BV + CV^2$, & fcribamus in caf. 1°. 2°. & 3°. numeros 1, 2, 4, pro V, prodibunt æquationes $A + B + C = \frac{1}{748}$, $A + 2B + 4C = \frac{1}{272}$, & $A + 4B + 16C = \frac{4}{323}$, ex quibus eruitur $A = 0{,}00034$, $B = 0{,}0003255$, & $C = 0{,}0006714$; & propterea cum (per cor. prop. 30.) refiftentia globi in medio arcûs ofcillando defcripti, ubi velocitas eft V, fit ad ipfius pondus ut $\frac{1}{2}A + \frac{7}{11}BV + \frac{3}{4}CV^2$ ad longitudinem penduli; fi pro A, B, & C, fcribantur numeri inventi, fiet refiftentia globi ad ejus pondus ut $0{,}00017 + 0{,}0002071\,V + 0{,}0005035\,V^2$ ad 121, id eft, in 1°. caf. ut 0,0008806 ad 121; in 2°. caf. ut 0,0025982 ad 121; in 30. caf. ut 0,0090544, ad 121; refiftentia verò uniformis erit ad pondus globi ut 0,00017 ad 121, feu ut 1, ad 735294. 182.

DE MOTU CORPORUM.

Descensus primus	1	2	4	8	16	32	64
Ascensus ultimus	$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{4}$	$3\frac{1}{2}$	7	14	28	56
Numerus Oscillat.	226	228	193	140	$90\frac{1}{2}$	53	30

Descensus primus	1	2	4	8	16	32	64
Ascensus ultimus	$\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{2}$	3	6	12	24	48
Numerus Oscillat.	510	518	420	318	204	121	70

In tabulâ priore ſeligendo ex obſervationibus tertiam, quintam & ſeptimam, & exponendo velocitates maximas in his obſervattionibus particulatim per numeros 1, 4, 16 reſpectivè, & generaliter per quantitatem V ut ſupra: emerget in obſervatione tertiâ $\frac{\frac{1}{2}}{193} = A + B + C$, in quintâ $\frac{2}{90\frac{1}{2}} = 4A + 8B + 16C$, in ſeptimâ $\frac{8}{30} = 16A + 64B + 256C$. Hæ vero æquationes reductæ dant $A = 0{,}001414$, $B = 0{,}000297$, $C = 0{,}000879$. Et inde prodit reſiſtentia globi cum velocitate V moti in eâ ratione ad pondus ſuum unciarum $26\frac{1}{4}$, quam habet $0{,}0009V + 0{,}000208V^{\frac{3}{2}} + 0{,}000659V^2$ ad penduli longitudinem 121 digitorum. Et ſi ſpectemus eam ſolummodo reſiſtentiæ partem quæ eſt in duplicatâ ratione velocitatis, hæc erit ad pondus globi ut $0{,}000659V^2$ ad 121 digitos. Erat autem hæc pars reſiſtentiæ in experimento primo ad pondus globi lignei unciarum $57\frac{7}{22}$ ut $0{,}002217V^2$ ad 121: (z) & inde fit reſiſtentia globi lignei ad reſiſtentiam globi plumbei (paribus eorum velocitatibus) ut $57\frac{7}{22}$ in $0{,}002217$ ad $26\frac{1}{4}$ in

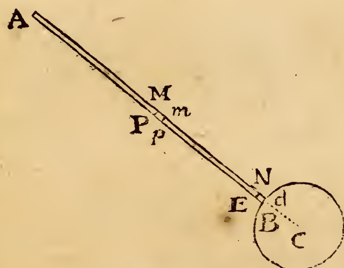
(z) * *Et indè fit reſiſtentia.* Eſt enim (ex dem.) reſiſtentia globi lignei $57\frac{7}{22} \times \frac{0{,}002217}{121}$; & reſiſtentia globi plumbei $26\frac{1}{4} \times \frac{0{,}000659}{121}$, ideóque reſiſtentia globi lignei ad reſiſtentiam globi plumbei ut $57\frac{7}{22} \times 0{,}002217$ ad $26\frac{1}{4} \times 0{,}000659$ id eſt, $7\frac{1}{3}$ ad 1.

in o, 000659, id eſt, ut $7\frac{1}{3}$ ad 1. Diametri globorum duorum erant $6\frac{7}{8}$ & 2 digitorum, & harum quadrata ſunt ad invicem ut $47\frac{1}{4}$ & 4, ſeu $11\frac{13}{16}$ & 1 quamproximè. Ergo reſiſtentiæ globorum æquivelocium erant in minore ratione quam duplicatâ diametrorum. (a) At nondum coſideravimus reſiſtentiam fili, quæ certe permagna erat, ac de pendulorum inventâ reſiſtentiâ ſubduci debet. Hanc accuratè definire non potui, ſed majorem tamen inveni quam partem tertiam reſiſtentiæ totius minoris penduli; & inde didici quod reſiſtentiæ

(a) 184. *At nondum conſideravimus* &c.

PROBLEMA.

Fili tenſi oſcillantis reſiſtentiam invenire in medio cujus reſiſtentia eſt ut velocitatis & diametri globi quadrata conjunctim.



Filum cylindricum homogeneum A B, circà punctum A, oſcilletur, ſitque ejus longitudo $AB = a$, diameter $EN = 2b$, globi C, diameter $= 2r$, longitudo variabilis $AP = x$, $Pp = dx$; & cylindruli evaneſcentis PM, velocitas erit ut diſtantia AP, ejuſque proindè reſiſtentia ut $xxdx$, ſive ut altitudo cylindruli Pp & quadratum velocitatis conjunctim; & hinc, ſumptâ fluente, reſiſtentia fili A P, fit ut $\frac{1}{3}x^3$, & totius fili A B reſiſtentia ut $\frac{1}{3}a^3$. Capiatur in B, cylindrulus B N, cujus altitudo B E ſit æqualis diametro fili E N, ſeu $2b$, & reſiſtentia fili A E, erit ut $\frac{1}{3}(a-2b)^3$, ideoque cylindri BN reſiſtentia ut $\frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{3}(a-2b)^3$. Eſt igitur reſiſtentia fili totius A B, ad reſiſtentiam cylindri BN, ut a^3 ad $a^3 - (a-2b)^3$; ſed ut infra prop. 34 demonſtrabitur, cylindri B N reſiſtentia eſt ad reſiſtentiam globuli huic cylindro inſcripti ut 2 ad 1, & reſiſtentia globuli hujus eſt ad reſiſtentiam globi C, in ratione quamproximè compoſitâ ex ratione quadrati diametri EN, ad quadratum diametri 2 BC, & ratione quadrati velocitatis globuli ad quadratum velocitatis globi C hoc eſt, ut $bb(a-b)^2$ ad $rr(a+r)^2$. Quarè (per compoſitionem rationum & ex æquo) reſiſtentia fili A B, eſt ad reſiſtentiam globi C, ut $2a^3bb(a-b)^2$, ad $a^3rr(a+r)^2 - rr(a+r)^2 \times (a-2b)^3$, ſeu ponendo $a+r=c$, ut $a^3b(a-b)^2$ ad $3a^2rrcc - 6abr.rcc + 4bbrrcc$, & hinc reſiſtentia fili ad reſiſtentiam totius penduli ut $a^3b(a-b)^2$, ad $a^3b(a-b)^2 + rrcc(3aa-6ab+4bb)$ Q. E. I. 183.

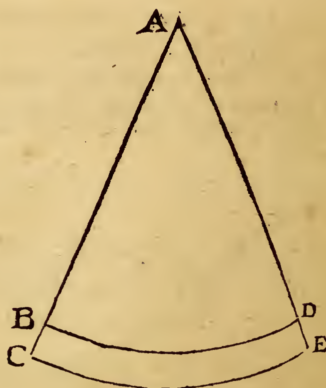
185. Coroll. Si fili ſemidiameter b, ſit admodum exigua reſpectu longitudinis ejuſdem a, erit ferè $3aa-6ab+4bb = 3aa-6ab+3bb = 3(a-b)^2$. Quare fili reſiſtentia erit ad reſiſtentiam globi ut a^3b ad $3rrcc$, & ad reſiſtentiam totius penduli ut a^3b ad $a^3b + 3rrcc$. Exempli cauſâ. Sit $c = 126$ digit $r = 1$ digit. $a = 125$ digit. $b = \frac{1}{100}$ digit. & reſiſtentia fili erit ad reſiſtentiam totius penduli ut 1953125 ad 4762800, ſeu ut 1 ad 2,438 quamproximè.

tiæ globorum, demptâ fili resistentiâ, sunt quam proxime in duplicatâ ratione diametrorum. Nam ratio $7\frac{1}{3}-\frac{1}{3}$ ad $1-\frac{1}{3}$, seu $10\frac{1}{2}$ ad 1 non longe abest à diametrorum ratione duplicata $11\frac{13}{16}$ ad 1.

Cum resistentia fili in globis majoribus minoris sit momenti, tentavi etiam experimentum in globo cujus diameter erat $18\frac{3}{4}$ digitorum. Longitudo penduli inter punctum suspensionis & centrum oscillationis erat digitorum $122\frac{1}{2}$, inter punctum suspen-

186. Inveniri etiam potest pars illa resistentiæ fili quæ uniformis est, quæque in tardioribus motibus observatur; posito quod uniformis illa resistentia fili sit ad uniformem resistentiam globi, ut spatium solidum quod filum oscillando describit ad spatium solidum quod describit globus. Filum cylindricum A B oscillatione unâ describat spatium solidum seu prisma cujus basis est sector circularis A B D, & altitudo diameter fili, intereà dum globi centrum C, describit arcum C E; diameter fili dicatur $2R$, & spatium à filo descriptum erit $R \times AB \times BD$; spatium verò a globo descriptum est factum ex area circuli cujus radius B C, in arcuum C E quem centrum C describit; seu est $\frac{22}{7} BC^2 \times CE$. Quarè uniformis resistentia fili est ad uniformem resistentiam globi ut $R \times AB \times BD$ ad $\frac{22}{7} BC^2 \times CE$, hoc est, ob rectas A B, A C arcubus B D, C E proportionales, ut $R \times AB^2$ ad $\frac{22}{7} BC^2 \times AC$, totaque uniformis resistentia penduli ad uniformem resistentiam globi ut $R \times AB^2 + \frac{22}{7} BC^2 \times AC$ ad $\frac{22}{7} BC^2 \times AC$.

Exempli causâ, Sit $R = \frac{1}{100}$ digit. $AC = 126$ digit. $BC = 3\frac{7}{16}$, $AB = 122\frac{9}{16}$ ut in experimentis primo ac secundo,



& invenietur uniformis resistentia fili ad uniformem resistentiam globi ut 1 ad 31 circiter, & ideo resistentia fili est resistentiæ totius penduli pars $\frac{1}{32}$. Cum igitur supra inventa sit resistentia uniformis ad pondus globi lignei ut 1 ad 735294, subductâ resistentiâ fili, erit uniformis resistentia globi lignei ad ejusdem pondus unciar. Rom. $57\frac{7}{22}$ ut 1 ad 760000 circiter. Quæramus nunc resistentiam uniformem globi plumbei in ultimo experimento. Mediocres arcuum differentiæ in primâ tabulâ sumptæ sunt in cas. 1°. 2°. & 3°. $\frac{1}{1808}$, $\frac{1}{912}$, & $\frac{1}{386}$, respectivè. Loco V, in quantitate $A + BV + CV^2$, scribantur successivè numeri 1, 2, & 4, & prodi-

ſpenſionis & nodum in filo $109\frac{1}{2}$ dig. Arcus primo penduli deſcenſu à nodo deſcriptus 32 dig. Arcus aſcenſu ultimo poſt oſcillationes quinque ab eodem nodo deſcriptus 28 dig. Summa arcuum ſeu arcus totus oſcillatione mediocri deſcriptus 60 dig. Differentia arcuum 4 dig. (b) Ejus pars decima ſeu differentia inter deſcenſum & aſcenſum in oſcillatione mediocri $\frac{2}{5}$ dig. Ut radius $109\frac{1}{2}$ ad radium $122\frac{1}{2}$, ita arcus totus 60 dig. oſcillatione mediocri à nodo deſcriptus ad arcum totum $67\frac{1}{8}$ dig. oſcillatione mediocri à centro globi deſcriptum; & ita -dif-

dibunt æquationes $A + B + C = \frac{1}{1808}$, $A + 2B + 4C = \frac{1}{912}$, & $1A + 4B + 16C = \frac{1}{386}$, ex quibus habetur $A = 0,0001455$, $B = 0,0004076$, & $C = 0,0000679$. Unde reſiſtentia uniformis eſt ad pondus globi unciar. Rom. $26\frac{1}{4}$ ut $\frac{1}{2}$ A ſeu 0,0000728 ad 121, id eſt, ut 1 ad 1662088. Jam verò cum in hoc experimento ſit $AC = 126$ digit. $BC = 1$, $AB = 125$, ſi ponatur $R = \frac{1}{100}$ digit. invenitur uniformis reſiſtentia fili ad reſiſtentiam uniformem globi ut 15625 ad 39600, ſivè ferè ut 2 ad 5; & ideo fili reſiſtentia totius reſiſtentiæ uniformis partes continet $\frac{2}{7}$. Quarè uniformis reſiſtentia globi plumbei eſt ad ejus pondus unciar. Rom. $26\frac{1}{4}$ ut 1 ad 2326923 circiter; & hinc uniformis reſiſtentia globi plumbei cujus diameter eſt digit. 2, eſt ad reſiſtentiam globi lignei uniformem cujus diameter eſt digit. $6\frac{7}{8}$ ut $26\frac{1}{4} \times 760000$ ad $57\frac{7}{22} \times 2326923$, hoc eſt, ut 19950000 ad 133374995 ſivè ut 1 ad 6,685.

Verum ſi ponatur reſiſtentia partim uniformis, partim velocitatis quadrato proportionalis, reſiſtentia globi lignei invenitur eſſe ad ejuſdem pondus $57\frac{7}{22}$ unciar. Rom. in ratione 1 ad 450000 circiter, & reſiſtentia uniformis globi plumbei ad ejus pondus $26\frac{1}{4}$ unciar. in ratione 1, ad 910900 per tabulam primam; & in ratione 1, ad 1021097 per tabulam ſecundam ultimi experimenti; undè ſumptâ mediocri ratione, reſiſtentia uniformis globi plumbei eſt ad pondus $26\frac{1}{4}$ unciar. ut 1 ad 966000 circiter. Et ideò, in hâc reſiſtentiæ Hypotheſi, uniformis reſiſtentia globi plumbei cujus eſt diameter digit. 2, eſt ad reſiſtentiam uniformem globi lignei cujus diameter eſt digit. $6\frac{1}{8}$, ut $26\frac{1}{4} \times 450000$ ad $57\frac{7}{22} \times 966000$ ſeu ut 1, ad 4,687, circiter. 186.

(b) * *Ejus pars decima.* Si oſcillatio ex itu & reditu penduli, ſeu ex bino deſcenſu binoque aſcenſu componatur, quinque oſcillationes ſic acceptæ æquivalent oſcillationibus decem quarum ſingulæ ex uno tantùm deſcenſu unoque aſcenſu conſtant. Priore ſignificatione Newtonus oſcillationes quinque, de quibus hic loquitur, accepiſſe videtur, ut potè qui differentiam 4 digit. Per N. 10 dividit ut differentiam inveniat inter arcus deſcenſu uno & ſubſequente aſcenſu deſcriptos in unâ mediocri oſcillatione ex deſcenſu uno unoque aſcenſu compoſitâ.

differentia $\frac{2}{5}$ ad differentiam novam 0, 4475. (c) Si longitudo penduli, manente longitudine arcus descripti, augeretur in ratione 126 ad 122 $\frac{1}{2}$; tempus oscillationis augeretur & velocitas penduli diminueretur in ratione illâ subduplicatâ, maneret vero arcuum descensu & subsequente ascensu descriptorum differentia 0, 4475. Deinde si arcus descriptus augeretur in ratione 124$\frac{3}{31}$ ad 67$\frac{1}{8}$, differentia ista 0, 4475 (d) augeretur in duplicatâ illa ratione, ideoque evaderet 1, 5295. Hæc ita se haberent, ex hypothesi quod resistentia penduli esset in duplicatâ ratione velocitatis. Ergo si pendulum describeret arcum totum 124$\frac{3}{31}$ digitorum, & longitudo ejus inter punctum suspensionis & centrum oscillationis esset 126 digitorum, differentia arcuum descensu & subsequente ascensu descriptorum foret 1, 5295 digitorum. Et hæc differentia ducta in pondus globi penduli, quod erat unciarum 208, producit 318, 136. Rursus ubi pendulum superius ex globo ligneo constructum centro oscillationis, quod à puncto suspensionis digitos 126 distabat, describebat arcum totum 124$\frac{3}{31}$ digitorum, differentia arcuum descensu & asensu descriptum (e) fuit $\frac{126}{121}$ in $\frac{8}{9\frac{2}{3}}$, quæ ducta

(c) * *Si longitudo penduli*, in medio non resistente *augeretur in ratione 126 ad 122 $\frac{1}{2}$, tempus oscillationis*, ob datam globi funependuli massam & pondus, *augeretur in ratione illâ subduplicatâ* (per cor. 6. prop. 24.) quod etiam in medio resistente verum est quam proximè (180).

* Mutatâ longitudine penduli & manente longitudine arcûs descripti, velocitas penduli diminuetur in ratione subduplicatâ longitudinis penduli, (ideoque inversè ut tempus); Nam velocitates descensu per arcus quosvis acquisitæ sunt in ratione subduplicatâ abscissarum illis arcubus correspondentium; Chordæ verò pro quibus arcus sumere hic liceat, sunt mediæ proportionales inter abscissas suas & circulorum Diametros, si ergo sumantur arcus æquales in circulis inæqualibus, abscissæ eorum arcuum erunt inversè ut Diametri circulorum sive inversè ut eorum Radii, hoc est inversè ut longitudines pendulorum, ergo velocitates quæ sunt in ratione subduplicatâ abscissarum, erunt in ratione subduplicatâ inversâ longitudinum pendulorum; Cum ergo arcuum differentiæ sint ut resistentia & quadratum temporis conjunctim, resistentiaque sit ut quadratum velocitatis, sitque quadratum velocitatis inversè ut longitudo pendulorum, & quadratum temporis directè ut longitudo pendulorum, compensatis rationibus manebunt eædem arcuum differentiæ, si mutatâ pendulorum longitudine arcus æquales describantur.

(d) * *Augeretur in duplicatâ illâ ratione.* (Per cor. 2. prop. 31.).

(e) * *Fuit* $\frac{126}{121}$ *in* $\frac{8}{9\frac{2}{3}}$. Cum enim in cas. 6°. experimenti primi penduli seu fili,

ducta in pondus globi, quod erat unciarum $57\frac{7}{22}$, producit 49, 396. Duxi autem differentias hasce in pondera globorum, ut invenirem eorum resistentias. Nam differentiæ oriuntur ex resistentiis, (f) suntque ut resistentiæ directè & pondera inversè. Sunt igitur resistentiæ ut numeri 318, 136 & 49, 396. Pars autem resistentiæ globi minoris, quæ est in duplicatâ ratione velocitatis, erat ad resistentiam totam ut 0,56752 ad 0,61675, id est, ut 45,453 ad 49,396; & pars resistentiæ globi majoris propemodum æquatur ipsius resistentiæ toti; ideoque partes illæ sunt ut 318,136 & 45,453 quamproximè, id est, ut 7 & 1. Sunt autem globorum diametri $18\frac{3}{4}$ & $6\frac{7}{8}$; & harum quadrata $351\frac{9}{16}$ & $47\frac{17}{64}$ sunt ut 7,438 & 1, id est, ut globorum resistentiæ 7 & 1 quamproximè. Differentia rationum haud major est, quam quæ ex fili resistentiâ oriri potuit. Igitur resistentiarum partes illæ quæ sunt, paribus globis, ut quadrata velocitatum; sunt etiam, paribus velocitatibus, ut quadrata diametrorum globorum.

Cæterum globorum, quibus usus sum in his experimentis, maximus non erat perfectè sphæricus, & propterea in calculo hic allato minutias quasdam brevitatis gratiâ neglexi; de calculo accurato in experimento non satis accurato minimè sollicitus. Optarim itaque, (g) cum demonstratio vacui ex his dependeat, ut experimenta cum globis & pluribus & majoribus & magis accu-

fili ad nodum usquè longitudo esset 121 digit. arcus descriptus erat $119\frac{5}{29}$ digit. & arcuum differentia $\frac{8}{9\frac{2}{3}}$ digit. Et mutatâ penduli longitudine in ratione 126 ad 121, arcus descriptus & differentia mutantur in eâdem ratione, fiebatque proindè arcus $\frac{126}{121} \times 119\frac{5}{29}$, seu $124\frac{3}{31}$ digit. & differentia $\frac{126}{121} \times \frac{8}{9\frac{2}{3}}$ digit.

(f) * *Suntque ut resistentiæ directè & pondera inversè.* Nam (per cor. prop. 30.) differentiæ illæ in datos numeros ductæ sunt ad penduli longitudinem, ut resistentia ad gravitatem seu pondus globi penduli; datâ igitur penduli longitudine, differentiæ illæ sunt ut resistentiæ directè & pondera inversè. 186.

(g) 187. * *Cum demonstratio vacui &c.* Utrum resistentia quam in motis corporibus experimur, tota sit in eorum externâ superficie, an verò partes etiam internæ in superficiebus propriis resistentiam notabilem sentiant, experimentis globorum in medio resistente oscillantium inveniri potest. Nam si, exempli causâ, globorum in dato medio paribus velocitatibus motorum resistentiæ semper essent in

De Motu Corporum.

accuratis tentarentur. Si globi ſumantur in proportione geometricâ, putà quorum diametri ſint digitorum 4, 8, 16, 32; ex progreſſione experimentorum colligetur quid in globis adhuc majoribus evenire debeat.

Jam vero conferendo reſiſtentias diverſorum fluidorum inter ſe tentavi ſequentia. Arcam ligneam paravi longitudine pedum quatuor, latitudine & altitudine pedis unius. Hanc operculo nudatam implevi aquâ fontanâ, fecique ut immerſa pendula in medio aquæ oſcillando moverentur. Globus autem plumbeus pondere $166\frac{1}{6}$ unciarum, diametro $3\frac{5}{8}$ digitorum movebatur ut in tabulâ ſequente deſcripſimus, exiſtente videlicet longitudine penduli à puncto ſuſpenſionis ad punctum quoddam in filo notatum 126 digitorum, ad oſcillationis autem centrum $134\frac{3}{8}$ digitorum.

Ar-

in duplicatâ diametrorum ratione, inſenſibilis foret in partibus internis reſiſtentia; cum enim reſiſtentia illa interna à numero, magnitudine, figurâ & texturâ internarum partium penderet, non poſſet eadem conſtanter manere in globis æqualibus & heterogeneis, ligneis v. g. & plumbeis, nec in globis inæqualibus externarum ſuperficierum ſed potiùs ſolidorum rationem ſequeretur. Porrò ſuperioribus experimentis jam probatum eſt in velocioribus globorum motibus, reſiſtentias quadratis diametrorum proportionales eſſe quam proximè, concludendum igitur eſt nullam eſſe notabilem in partibus corporum internis reſiſtentiam, quod tamen deinceps pluribus aliis argumentis demonſtrabit Newtonus. Verum ſi medium quoddam æthereum vel longe ſubtiliſſimum omnes omnium corporum poros & meatus repleret, propter medii illius ætherei ſummam denſitatem atque inertiam omni materiæ propriam, partes internæ corporum per magnam reſiſtentiam ſentirent. At qui Carteſianum mundi pleni ſyſtema emendarunt noviſque inventis ornarunt eruditiſſimi ſagaciſſimique Mathematici, ii, repudiatis veteribus effugiis, quibus Carteſianorum vulgus utitur, ex ſubtilitate ac mobilitate ætheris & pororum quibus corpora omnia pertuſa ſunt diſpoſitione petitis, hoc unum reſponſum proferunt, æthereum materiam corporum gravium motibus minimè reſiſtere, quod ſit omni gravitate deſtituta. Duplicis itaque generis materiam in univerſo diſtinguunt, gravem alteram cujus partes in vorticulos diviſæ non ſunt, alteram non gravem, omnis tamen gravitatis cauſam, cujus partes ex tenuiſſimis variorum ordinum vorticulis elaſticis conſtant. Cum autem vis motrix ad datum corpus grave datâ celeritate movendum adhibenda, decreſcente corporis hujus gravitate, in eâdem ratione decreſcat, nullaque fit ætheris gravitas, conſequens eſſe aiunt ut corpus grave quod in æthere datâ celeritate fertur, nonniſi infiniteſimam motûs ſui partem ex reſiſtentiâ ætheris finito quovis tempore deperdat. Verùm præterquam quod totum hoc ſiſtema, ut ut elegans ac venuſtum, fictis ferè ad arbitrium hypotheſibus, quas Newtonus è Phyſicâ experimentali vellet eliminari, nititur, plurimiſque & graviſſimis aliis ex Mechanicâ atque Aſtronomiâ difficultatibus premitur, adductum modò reſponſum his etiam laborat incommodis. Primùm quidem evidens eſt vim illam quæ ad corpus grave contrà gravitatis directionem ſuſti-nen-

LIBER SECUND. SECT. VI. PROP. XXXI. THEOR. XXV.

Arcus descensu primo a puncto in filo notato descriptus, digitorum	64	32	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
Arcus ascensu ultimo descriptus, digitorum	48	24	12	6	3	$1\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$
Arcuum differentia motui amisso proportionalis, digitorum	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
Numerus Oscillationum in aqua			$\frac{29}{60}$	$1\frac{1}{5}$	3	7	$11\frac{1}{4}$	$12\frac{2}{3}$	$13\frac{1}{3}$
Numerus Oscillationum in aere	$85\frac{1}{2}$		287	535					

In experimento columnæ quartæ, motus æquales oscillationibus 535 in aere, & $1\frac{1}{5}$ in aquâ amissi sunt. Erant quidem oscilla-

nendum necessaria est, cum corporis pondere decrescere debere; sed non itâ manifestum est vim motricem ad datum corpus grave datâ celeritate movendum adhibendam, in ratione ponderis decrescere oportere, ubi vis illius motricis directio gravitatis directioni opposita non est, sed illi perpendicularis aut cum illâ conspirans. Præterea materia omnis ætherea circa solem, stellas, atque planetas singulos pernicissimo motu in orbem acta vi centrifugâ pollet quâ à centris magnorum vorticum, atquè etiam à centris singulorum vorticulorum propriis recedere nititur, undè cæterorum corporum gravitas ortum habet; at vis illa centrifuga quæ cum vi centripetâ seu gravitate conferri potest, idem præstare in æthere debet ratione motûs in datâ materiæ quantitate datâ vi motrice imprimendi, quod in cæteris corporibus gravitas præstat. Nulla igitur esse ratiò videtur cur corpus grave datâ celeritate motùm nonnisi infinitesimam suæ celeritatis particulam ex ætheris non gravis, resistentiâ amittat siquidem illud vi centrifugâ pollet; Et, si materia ætherea suâ vi centrifugâ vel certè vi indè ortâ corporum gravitatem producat, eorumque motum finitum acceleret & extinguat finito tempore, multò magis eadem materia corpus grave movere, aut motum ejus finito tempore extinguere debet, si finitâ velocitate in illud incurrat ac continuò urgeat, cum vis centrifuga infinitesima sit si cum vi quâ corpus spatium finitum tempore infinito describit, conferatur. 187.

* Et quidem resistentia ex gravitate materiæ occurrentis non pendet, sed ex ejus inertiâ, quâ fit ut nullum corpus ab alio motum suscipiat quin tantumdem motus in eo destruat, idque Mechanici communiter statuunt tam ex consensu omnium quorumcumque Phænomenorum, ubi (semotâ gravitatis consideratione) nullus motus motum producendo non consumitur, quam ex Principiis Metaphysicis quâ liquet quod si res ita se non haberet, vel minimus motus infinitum motum produceret, totaque Universi moles ex Atomi progressione dimoveretur, quod absurdum. Unde si Æther non resisteret, hoc est vi inertiæ careret, fingendæ forent duæ materiæ species quarum altera vi inertiæ prædita foret, altera verò non, ita ut quamvis ab occurrente materia dimoveatur, nihil tollat de ejus motu; simul autem statuitur quod id æther corporum motum sistere potest aut mutare quomodocumque, nam si æther sit gravitatis caussa oportet ut illa ipsa materia ætherea quæ corporis moti actione movetur dum tamen nihil quicquam de illius motu tollit, possit illud idem corpus si sursum feratur sistere, in adversum ejus directionem mutare &c. Quæ Metaphysicè etiam inter se repugnare videntur, nec satis fuisse perpensa ab ingeniosissimis Cartesianismi restauratoribus.

DE MOTU CORPORUM.

oscillationes in aere paulo celeriores quàm in aquâ. At si oscillationes in aquâ in eâ ratione accelerarentur ut motus pendulorum in medio utroque fierent æquiveloces, maneret numerus idem oscillationum $1\frac{1}{5}$ in aquâ, quibus (h) motus idem ac prius amitteretur; ob resistentiam auctam & simul quadratum temporis diminutum in eâdem ratione illâ duplicatâ. Paribus igitur pendulorum velocitatibus motus æquales in aere oscillationibus 535 & in aquâ oscillationibus $1\frac{1}{5}$ amissi sunt; (i) ideoque resistentia penduli in aquâ est ad ejus resistentiam in aere ut 535 ad $1\frac{1}{5}$. Hæc est proportio resistentiarum totarum in casu columnæ quartæ.

Designet jam $AV + CV^2$ differentiam arcuum in descensu & subsequente ascensu descriptorum à globo in aere cum velocitate maximâ V moto; & cum velocitas maxima in casu columnæ quartæ sit ad velocitatem maximam in casu columnæ primæ, ut 1 ad 8; & differentia illa arcuum in casu columnæ quartæ ad differentiam in casu columnæ primæ (k) ut $\frac{2}{535}$ ad $\frac{16}{85\frac{1}{2}}$, seu ut $85\frac{1}{2}$ ad 4280: scribamus in his casibus 1 & 8 pro-

(h) * *Motus idem ac prius amitteretur.* Differentia arcuum motui amisso proportionalis, est ut resistentia & quadratum temporis conjunctim (per cor. 5. Lem. X); sed aucta paululum velocitate, resistentia quamproximè augetur in ejus ratione duplicatâ (per hyp.) & simul quadratum temporis minuitur in eâdem ratione illâ duplicatâ, quia totus arcus descriptus numero oscillationum $1\frac{1}{5}$ idem quam proximè manet. Quarè motus amissus numero oscillationum $1\frac{1}{5}$ idem manet, si oscillationes in aquâ accelerentur ut dictum est (vid. not. sup. c).

(i) * *Ideoque resistentia penduli.* Nam motus in aëre amissus unâ mediocri oscillatione, quâ arcus digit. 14 describitur, est pars $\frac{1}{535}$ motûs totius oscillationibus 535, amissi; Et similiter motus in aquâ amissus æquali oscillatione quâ arcus digit. 14 pari velocitate describeretur est quam proximè pars $\frac{1}{1\frac{1}{5}}$ ejusdem motûs totius amissi oscillationibus $1\frac{1}{5}$ in aquâ & oscillationibus 535 in aëre. Quarè cum resistentiæ totæ unâ oscillatione mediocri sint ut partes illæ motûs amissæ, est resistentia penduli in aquâ ad ejus resistentiam in aëre ut $\frac{1}{1\frac{1}{5}}$ ad $\frac{1}{535}$, id est, ut 535 ad $1\frac{1}{5}$.

(k) * *Ut* $\frac{2}{535}$ *ad* $\frac{16}{85\frac{1}{2}}$. Dividendo nimirum arcuum differentias per numerum os-

8 pro velocitatibus, atque $85\frac{1}{2}$ & 4280 pro differentiis arcuum, & fiet $A+C=85\frac{1}{2}$ & $8A+64C=4280$ ſeu $A+8C=535$; indeque per reductionem æquationum proveniet $7C=449\frac{1}{2}$ & $C=64\frac{3}{14}$ & $A=21\frac{2}{7}$: atque ideo reſiſtentia, (l) cum ſit ut $\frac{7}{11}AV+\frac{3}{4}CV^2$, erit ut $13\frac{6}{11}V+48\frac{9}{56}V^2$. Quare in caſu columnæ quartæ, ubi velocitas erat 1, reſiſtentia tota eſt ad partem ſuam quadrato velocitatis proportionalem, ut $13\frac{6}{11}+48\frac{9}{56}$ ſeu $61\frac{12}{17}$ ad $48\frac{9}{56}$; & idcirco reſiſtentia penduli in aquâ eſt ad reſiſtentiæ partem illam in aere, quæ quadrato velocitatis proportionalis eſt, quæque ſola in motibus velocioribus conſiderenda venit, (m) ut $61\frac{12}{17}$ ad $48\frac{9}{56}$ & 535 ad $1\frac{1}{5}$ conjunctim, id eſt, ut 571 ad 1. Si penduli in aquâ oſcillantis filum totum fuiſſet immerſum, reſiſtentia ejus fuiſſet adhuc major; adeo ut penduli in aquâ oſcillantis reſiſtentia illa, quæ velocitatis quadrato proportionalis eſt, quæque ſola in corporibus velocioribus conſideranda venit, ſit ad reſiſtentiam ejuſdem penduli totius, eadem cum velocitate in aere oſcillantis, (n) ut 850 ad 1 circiter, hoc eſt, ut denſitas aquæ ad denſitatem aeris quamproxime.

In hoc calculo ſumi quoque deberet pars illa reſiſtentiæ penduli in aquâ, quæ eſſet ut quadratum velocitatis, ſed (quod mirum forte videatur) reſiſtentia in aqua augebatur in ratione velocitatis pluſquam duplicatâ. Ejus rei cauſam investigan-

oſcillationum ut differentia in unâ mediocri oſcillatione habeatur, quemadmodum ſuprà factum eſt.

(l) * *Cum ſit ut* $\frac{7}{11}AV+\frac{3}{4}CV^2$. (per cor. prop. 30.).

(m) * *Ut* $61\frac{12}{17}$ *ad* &c. Eſt enim, ex ſuprà dictis, reſiſtentia in aquâ ad reſiſtentiam totam in aere ut 535 ad $1\frac{1}{5}$ & reſiſtentia tota in aere ad reſiſtentiæ partem illam in aere quæ velocitatis quadrato proportionalis eſt ut $61\frac{12}{17}$ ad $48\frac{9}{56}$, & idcircò (ex æquo) & per compoſitionem rationum) *reſiſtentia penduli in aquâ eſt ad reſiſtentiæ partem illam in aere, &c.*

(n) * *Ut* 850. *ad* 1, circiter. Si enim reſiſtentia fili ponatur ut ſuprà factum eſt, æqualis tertiæ parti reſiſtentiæ totius in aere, erit ferè reſiſtentia penduli in aquâ ad ejus reſiſtentiam totam in aere ut $535-\frac{6}{15}$ ad $1\frac{1}{5}-\frac{6}{15}$, ſeu ut 2673 ad 4, & $2673 \times 61\frac{12}{17}$ ad $4 \times 48\frac{9}{56}$, ut 850 ad 1 circiter.

 187.

gando, in hanc incidi, quod arca nimis angusta esset pro magnitudine globi penduli, & motum aquæ cedentis præ angustiâ suâ nimis impediebat. Nam si globus pendulus, cujus diameter erat digiti unius, immergeretur; resistentia augebatur, in duplicatâ ratione velocitatis quam proximè. Id tentabam construendo pendulum ex globis duobus, quorum inferior & minor oscillaretur in aquâ, superior & major proximè supra aquam filo affixus esset, & in aere oscillando, adjuvaret motum penduli eumque diuturniorem redderet. Experimenta autem hoc modo instituta se habebant ut (°) in tabulâ sequente describitur.

Arcus descensu primo descriptus	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
Arcus ascensu ultimo descriptus	12	6	3	$1\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$
Arcuum diff. motui amisso proport.	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
Numerus Oscillationum	$3\frac{3}{8}$	$6\frac{1}{2}$	$12\frac{1}{12}$	$21\frac{1}{5}$	34	53	$62\frac{1}{5}$

Conferendo resistentias mediorum inter se, effeci etiam ut pendula ferrea oscillarentur in argento vivo. Longitudo fili ferrei erat pedum quasi trium, & diameter globi penduli quasi tertia pars digiti. Ad filum autem proximè supra mercurium affixus erat globus alius plumbeus satis magnus ad motum penduli diutius continuandum. Tum vasculum, quod capiebat quasi libras tres argenti vivi, implebam vicibus alternis argento vivo & aquâ communi, ut pendulo in fluido utroque successivè oscillante, invenirem proportionem resistentiarum; & prodiit resistentia argenti vivi ad resistentiam aquæ ut 13 vel 14 ad 1 circiter: id est, ut densitas argenti vivi ad densitatem aquæ. Ubi globum pendulum paulo majorem adhibebam, putà cujus diameter esset quasi $\frac{1}{3}$ vel $\frac{2}{3}$ partes digiti, prodibat resistentia argen-

(o) * *In tabulâ sequente.* Arcuum differentiæ dividantur per numerum oscillationum in casu unoquoque, & prodibunt differentiæ in oscillatione unâ mediocri 1.1851; 0.3076; .0827; .0235; .0073; .0023 .0010 quæ sunt quam proximè ut quadrata velocitatum, sive ut 16; 4; 1; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{16}$ $\frac{1}{64}$ $\frac{1}{256}$ in majoribus oscillationibus; priores enim termini sunt proximè sequentium fere quadrupli, in minoribus verò oscillationibus præcedentes termini sunt in minore ratione ad sequentes.

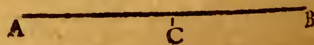
argenti vivi in eâ ratione ad resistentiam aquæ, quam habet numerus 12 vel 10 ad 1 circiter. Sed experimento priori magis fidendum est, propterea quod in his ultimis vas nimis angustum fuit pro magnitudine globi immersi. Ampliato globo, deberet etiam vas ampliari. Constitueram quidem hujusmodi experimenta in vasis majoribus & in liquoribus tum metallorum fusorum, tum aliis quibusdam tam calidis quam frigidis repetere: sed omnia experiri non vacat, & ex jam descriptis satis liquet resistentiam corporum celeriter motorum densitati fluidorum in quibus moventur proportionalem esse quam proximè. Non dico accuratè. Nam fluida tenaciora, pari densitate, proculdubio magis resistunt quâm liquidiora, ut oleum frigidum quam calidum, calidum quàm aqua pluvialis, aqua quàm spiritus vini. Verum in liquoribus, qui ad sensum satis fluidi sunt, ut in aere, in aquâ seu dulci seu salsâ, in spiritibus vini, terebinthi & salium, in oleo à fæcibus per destillationem liberato & calefacto, oleoque vitrioli & mercurio, ac metallis liquefactis, & si qui sint alii, qui tam fluidi sunt ut in vasis agitati motum impressum diutius conservent, effusique liberrimè in guttas decurrendo resolvantur, nullus dubito quin regula allata satis accuratè obtineat: præsertim si experimenta in corporibus pendulis & majoribus & velocius motis instituantur.

Denique cum nnonullorum opinio sit, medium quoddam æthereum & longè subtilissimum extare, quod omnes omnium corporum poros & meatus liberrimè permeet; à tali autem medio per corporum poros fluente resistentia oriri debeat: ut tentarem an resistentia, quam in motis corporibus experimur, tota sit in eorum externâ superficie, an vero partes etiam internæ in superficiebus propriis resistentiam notabilem sentiant, excogitavi experimentum tale. Filo pedum undecim longitudinis ab unco chalybeo satis firmo, mediante annulo chalybeo, suspendebam pyxidem abiegnam rotundam, ad constituendum pendulum longitudinis prædictæ. Uncus sursum præacutus erat acie concavâ, ut annulus arcu suo superiore aciei annixus liberrimè moveretur. Arcui autem inferiori annectebatur filum. Pendulum ita

De Motu Corporum.

constitutum deducebam à perpendiculo ad distantiam quasi pedum sex, idque secundum planum aciei unci perpendiculare, ne annulus, oscillante pendulo, supra aciem unci ultro citroque laberetur. Nam punctum suspensionis, in quo annulus uncum tangit, immotum manere debet. Locum igitur accuratè notabam, ad quem deduxeram pendulum, dein pendulo demisso notabam alia tria loca ad quæ redibat in fine oscillationis primæ, secundæ ac tertiæ. Hoc repetebam sæpius, ut loca illa quam potui accuratissimè invenirem. Tum pyxidem plumbo & gravioribus, quæ ad manus erant, metallis implebam. Sed prius ponderabam pyxidem vacuam, unà cum parte fili quæ circum pyxidem volvebatur ac dimidio partis reliquæ quæ inter uncum & pyxidem pendulam tendebatur. Nam filum tensum (p) dimidio ponderis sui pendulum à perpendiculo digressum semper urget. Huic ponderi addebam pondus aeris quem pyxis capiebat. Et pondus totum erat quasi pars septuagesima octava pyxidis metallorum plenæ. Tum quoniam pyxis metallorum plena, pondere suo tendendo filum, augebat longitudinem penduli, contrahebam filum ut penduli jam oscillantis eadem esset longitudo ac prius. Dein pendulo ad locum primo notatum retracto ac dimisso, numerabam oscillationes quasi septuaginta & septem, donec pyxis ad locum secundo notatum rediret, totidemque subinde donec pyxis ad locum tertio notatum rediret, atque rursus totidem donec pyxis reditu suo attingeret locum quartum. Unde concludo quod resistentia tota pyxidis plenæ non majorem habebat proportionem ad resistentiam

(p) * *Dimidio ponderis sui.* Fili tensi AB homogenei & æqualis ubique crassitiei centrum gravitatis est in loco medio C, (59. lib. 1.) ideóque vis quâ filum pondere suo toto P, ad rotandum circà A, urgetur, est ut $AC \times P$, seu ut $\frac{1}{2} P \times AB$. (63. lib. 1.) jam si inveniendum sit pondus Q in B locandum ut momentum $Q \times AB$ æquivaleat momento seu vi fili totius; erit $Q \times AB = \frac{1}{2} P \times AB$, ideóque $Q = \frac{1}{2} P$. Quarè filum tensum dimidio ponderis sui P pendulum à perpendiculo digressum semper urget.



tiam pyxidis vacuæ quàm 78 ad 77. Nam si æquales essent ambarum resistentiæ, pyxis plena ob vim suam insitam septuagies & octies majorem vi insitâ pyxidis vacuæ, motum suum oscillatorium tanto diutius conservare deberet, atque ideo completis semper oscillationibus 78 (q) ad loca illa notata redire. Rediit autem ad eadem completis oscillationibus 77.

Designet igitur A resistentiam pyxidis in ipsius superficie externâ, & B resistentiam pyxidis vacuæ in partibus internis; & si resistentiæ corporum æquivelocium in partibus internis sint ut ma-

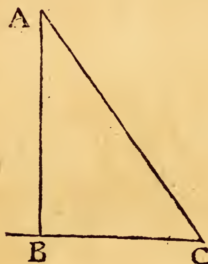
(q) * *Ad loca illa notata redire.* Si resistentiæ in singulis oscillationibus essent æquales, motus amissi, ut potè resistentiis proportionales, essent quoque æquales; sed motus amissi, paribus oscillationum temporibus, sunt ut massæ seu pondera corporum & spatia motibus amissis describenda conjunctim; ideoque spatia illa essent ut pondera inversè; hoc est, spatium motu pixidis vacuæ amisso in unâ oscillatione describendum, esset ad spatium motu pixidis plenæ oscillatione unâ amisso percurrendum ut 78 ad 1, & propterea spatia illa, completâ unicâ pixidis vacuæ oscillatione, & pixidis plenæ oscillationibus 78 absolutis, forent æqualia quamproximè, atquè ideò pixis plena, completis semper oscillationibus 78, ad loca notata rediret.

Cum in hâc Sectione 6ª. Newtonus de solo corporum in cycloide oscillantium motu egerit, multa verò à recentioribus authoribus inventa sint, quibus generalis motuum in curvis quibuslibet theoria longè promota est, principia quibus usi sunt sequenti problemate breviter exponemus.

PROBLEMA.

188. Tendente vi gravitatis uniformi ubique perpendiculariter ad planum horizontis, definire motum corporis per curvam quamlibet ascendentis vel descendentis in medio uniformi cujus resistentia est ut velocitatis functio quælibet.

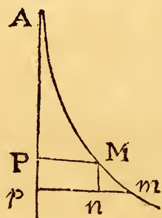
De corporum ascensu ac descensu in lineis rectis ad horizontem quemodocumque inclinatis agere hic necessum non est; 188. si enim corpus in lineâ rectâ AC ad horizontem BC utcumquè inclinatâ ascendat vel descendat, resistentia & celeritas in quibuscumque locis & spatium descriptum ac tempus quo descriptum est, definiuntur per Prop. 3. Sect. 1; 8am. & 9am. Sect. 2; 13am. & 14am. Sect. 3. ac per notas iisdem locis adjunctas. Cum enim vis gravitatis secundum directionem AB urgentis sit ad ipsius partem quæ agit juxtà directionem AC, in datâ ratione lineæ AC ad AB, seu in datâ ratione sinûs totius ad sinum anguli inclinationis ACB; si loco vis gravitatis horizonti perpendicularis adhibeatur in calculis & constructionibus pars illius data quæ secundum directionem AC agit, constructiones calculique in citatis locis non mutantur. Supereſt igitur ut corporis in curvâ lineâ ascendentis aut descendentis motum definiamus.



Des-

materia, ſeu numerus particularum quibus reſiſtitur: erit 78 B reſiſtentia pyxidis plenæ in ipſius partibus internis: ideoque pyxidis vacuæ reſiſtentia tota A + B erit ad pyxidis plenæ reſiſtentiam totam A + 78 B ut 77 ad 78, & diviſim A + B ad 77 B, ut 77 ad 1, indeque A + B ad B ut 77 × 77 ad 1, & diviſim A ad B ut 5928 ad 1. Eſt igitur reſiſtentia pyxidis vacuæ in partibus internis quinquies millies minor quam ejuſdem reſiſtentia in externâ ſuperficie, & amplius. Sic vero diſputamus ex hypotheſi quod major illa reſiſtentia pyxidis plenæ, non ab aliâ aliquâ causâ latente oriatur, ſed ab actione ſolâ fluidi alicujus ſubtilis in metallum incluſum.

Hoc



Deſcendat primùm corpus è loco dato A per curvam A M, ducatur verticalis A P, ad quam ex punctis M, & m, infinitè propinquis demittantur perpendicula M P, m p, & ex M ad p m perpendiculum M n. Gravitas conſtans ſecundùm directionem verticali A P parallelam ſemper agens ſit $= g$, reſiſtentia in loco M $= r$, velocitas corporis ibidem $= v$; tempus quo deſcribitur A M $= t$, A P $= x$, A M $= s$, P p $=$ M n $= dx$, & M m $= ds$. Jam verò M m, eſt ad M n, ſeu ds ad dx, ut vis gravitatis g ad ipſius partem in directione M m agentem quæ ideo erit $= \frac{g\,dx}{ds}$; ſubducatur vis reſiſtentiæ r, & vis reſidua quâ corpus in loco M, juxtà directionem M m urgetur erit $= \frac{g\,dx}{ds} - r$. Undè (18) fit $g\,dx - r\,ds = v\,dv$. Hujus autem æquationis fluens ità ſumi debet ut evaneſcentibus x & s evaneſcat quoque v ſi velocitas corporis in loco A nulla ſit, & fiat $v = c$, ſi velocitas corporis in A, ſit $= c$. Simili modo ſi corpus è loco dato A per arcum A M aſcendat, & omnia ut modò ſuppoſuimus maneant, erit (18) $g\,dx + r\,ds = -v\,dv$, cujus æquationis fluentem ità ſumi oportet ut poſitis x & $s = 0$, fiat v, æqualis velocitati in loco A datæ.

Si abciſſa x in verticali B C per curvæ A C D punctum infimum C ducta capiatur, ſitque B P $= x$, & cætera maneant ut ſupra, erit adhuc pro corporis deſcenſu $g\,dx - r\,ds = v\,dv$; at pro aſcenſu per arcum C μ ſi data ſint puncta A & B, dicaturque C μ vel A C $\mu = s$, erit $-g\,dx + r\,ds = -v\,dv$, ſeu adhuc $g\,dx - r\,ds = v\,dv$, quia creſcente s decreſcit x & contrà. Si vero dicatur C P $= x$ & C M $= s$, quia hæ quantitates reſpectu aliarum B P, & A M negativæ ſunt, fiet pro deſcenſu $-g\,dx + r\,ds = v\,dv$, ſeu $g\,dx - r\,ds = -v\,dv$, & pro aſcenſu ſi dicatur C $\mu = s$ erit $g\,dx + r\,ds = -v\,dv$ quarum æquationum altera in alteram abit, mutato ſigno quantitati r, præfixo. Ex datâ igitur lege reſiſtentiæ, loco r ſcribatur ipſius valor per v & datas quantitates, & ex datâ æquatione ad curvam A M, loco dx ſcribatnr valor ejus per ds, s & datas quantitates in ſuperioribus formulis ſeu æquationibus; & deinde per curvarum quadraturas vel per ſeries, capiantur, ut oportet, formularum fluentes, obtinebitur

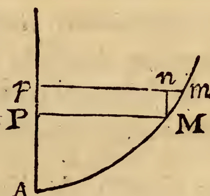
Hoc experimentum recitavi memoriter. Nam charta, in quâ illud aliquando descripseram, intercidit. Unde fractas quasdam numerorum partes, quæ memoriâ exciderunt omittere compulsus sum.

LIBER SECUND. SECT. VI. PROP. XXXI. THEOR. XXV.

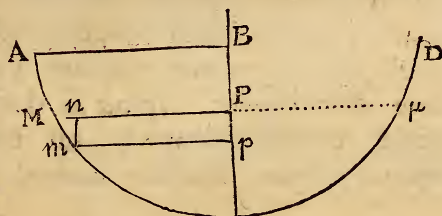
Nam omnia denuò tentare non vacat. Primâ vice, cum unco infirmo usus essem, pyxis plena citius retardabatur. Causam quærendo, reperi quod uncus infirmus cedebat ponderi pyxidis, & ejus oscillationibus obsequendo in partes omnes flectebatur. Parabam igitur uncum firmum, ut punctum suspensionis immotum maneret, & tunc omnia ita evenerunt uti supra descripsimus.

SEC-

tur v per s & contrà, atque etiam r per s, & quia tempus t, quo arcus s describitur est $S.\frac{ds}{v}$, dabitur quoque tempus. Q. E. I.



Exempli causâ. Sit resistentia partim uniformis, partim velocitatis quadrato proportionalis, quæ est Hypothesis naturæ, seu sit $r = \frac{aa+vv}{b}$, dicanturque $BP = x$, $AM = s$ & æquatio $gdx - rds = vdv$ in hanc migrabit $gdx - \frac{aads}{b} = vdv + \frac{vvds}{b}$; ut hoc secundum æquationis membrum debitam formam acquirat ponatur $ds = \frac{\frac{1}{2}bdz}{z}$, seu $s = \frac{1}{2}b\,L.z$, æquatio evadet $gzdx - \frac{1}{2}aadz = zvdv + \frac{1}{2}vvdz$, sumptis fluentibus, fit $g\,S.zdx - \frac{1}{2}aaz = \frac{1}{2}zvv$. Undè invenietur $vv = \frac{2g\,S.zdx}{z} - aa$. Est autem $S.zdx$, area curvæ cujus abscissa x & ordinata z; & z datur per s, ope logarithmicæ, & x per s ope æquationis ad curvam AM. Sit h numerus cujus logarithmus est unitas, seu $L.h = 1$, erit $s\,L.h = \frac{1}{2}b\,L.z$, & $\frac{2s}{b}\,L.h = L.h^{\frac{2s}{b}} = L.z$. atquè $h^{\frac{2s}{b}} = z$, undè habetur $vv = \frac{2g\,S.h^{\frac{2s}{b}}dx}{h^{\frac{2s}{b}}} - aa$.



Si in his æquationibus ponatur $a = 0$, definietur motus corporis in lineâ quâlibet curvâ descendentis & ascendentis in medio uniformi, cujus resistentia velocitatis quadrato proportionalis est. Cæterum totam hanc materiam copiosissimè & accuratissimè tractavit clariss. Eulerus tom. 2. Mechan. 188.

De Motu Corporum.

SECTIO VII.

De motu fluidorum & resistentiâ projectilium.

PROPOSITIO XXXII. THEOREMA XXVI.

Si corporum systemata duo similia ex æquali particularum numero constent, & particulæ correspondentes similes sint & proportionales, singulæ in uno systemate singulis in altero, & similiter sitæ inter se, ac datam habeant rationem densitatis ad invicem, & inter se temporibus proportionalibus similiter moveri incipiant (eæ inter se quæ in uno sunt systemate & eæ inter se quæ sunt in altero) & si non tangant se mutuo quæ in eodem sunt systemate, nisi in momentis reflexionum, neque attrahant, vel fugent se mutuò, nisi viribus acceleratricibus quæ sint ut particularum correspondentium diametri inversè & quadrata velocitatum directè: dico quod systematum particulæ illæ pergent inter se temporibus proportionalibus similiter moveri. (r)

Corpora similia & similiter sita, temporibus proportionalibus inter se similiter moveri dico, quorum situs ad invicem in fine temporum illorum semper sunt similes: putà si particulæ unius systematis cum alterius particulis correspondentibus conferantur. Unde tempora erunt proportionalia, in quibus similes & proportionales figurarum similium partes à particulis correspondentibus describuntur. Igitur si duo sint ejusmodi systemata, particulæ correspondentes, ob similitudinem incœptorum motuum, pergent similiter moveri, usque donec sibi mutuo occur-

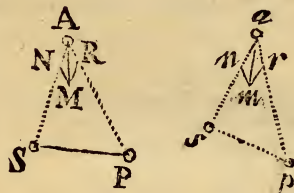
(r) * *Similiter moveri.* Sunto A & a, P & p, S & s, &c. particulæ in duobus systematibus sibi mutuò correspondentes. Particula A in suo systemate tempore T, describat spatium quam minimum A B, & particula correspondens a, in altero systemate tempore t, describat spatium a b, priori A B, simile similiterque situm, ità ut sit A B, ad a b, ut diameter particulæ A, ad diametrum particulæ a, sivè ut AS ad as, vel PS ad ps, & angulus ASB æqualis angulo asb, atque SAB æqualis sab. Et aliæ sibi mutuò correspondentes particulæ quiescant vel simili modo moveantur. His positis, demonstrandum est quod si sumantur tempora alia quæ sint ut T & t particulæ correspondentes erunt utrinque similiter positæ.

currant. Nam si nullis agitantur viribus, progredientur uniformiter (f) in lineis rectis per motus leg. I. Si viribus aliquibus se mutuo agitant, & vires illæ sint ut particularum correspondentium diametri inverse & quadrata velocitatum directè; quoniam particularum situs sunt similes & vires proportionales, (t) vires totæ quibus particulæ correspondentes

(f) * *In lineis rectis per mot. leg. I.* Ideoque ob velocitates uniformes & similes motuum directiones pergent similiter moveri temporibus proportionalibus, usque ad occursus suos primos.

(t) * *Vires totæ quibus particulæ correspondentes agitantur, similes habebunt determinationes, & erunt ad invicem ut correspondentium particularum Diametri inversè & quadrata velocitatum directè.*

* Particula *A* inter duas *S* & *P*, & particula *a* inter duas *s* & *p* sint similiter sitæ, & quâcumque celeritate in directione similiter positâ particulæ illæ *A* & *a* ferantur, trahanturque vel fugentur illæ particulæ *A* & *a* à particulis *S* & *P*, *s* & *p* per vires quæ sint ut Diametri particularum correspondentium inverse sive ut lineæ homologæ inverse, & quadrata velocitatum directè, dico 1°. quod directio vis compositæ trahentis particulas *A* & *a* similiter posita erit in utroque systemate, nam anguli S A P & s a p, quos faciunt vires agentes, ex hypothesi æquales sunt, vis autem composita sequetur Diagonalem quæ faciat angulos cum directione utriusque vis componentis quorum sinus sint reciprocè ut vires agentes, (per nat. virium compositarum, sit ea Diagonalis hic A M, illic a m, erit ergo sinus anguli S A M, ad sinum anguli P A M, inverse ut vis particulæ S ad vim particulæ *P* sive directè ut lineæ homologæ S A & P A (nam quoniam de unico corpore A nunc agitur ratio quadratorum velocitatum hic nihil mutat) pariter sinus anguli s a m est ad sinum Anguli p a m ut s a ad p a; sed est S A ad P A sicut s a ad p a ex hypothesi, ergo anguli æquales S A P & s a p in eadem ratione secantur per lineas A M, a m, ideoque anguli S A M & s a m, M A P & m a p sunt æquales, ergo directio vis compositæ trahentis particulas *A* & *a*



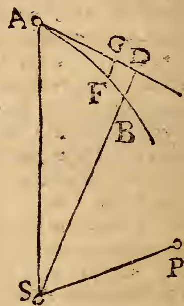
in singulo systemate similiter est posita. Q. erat 1um. 188.

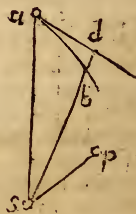
2°. Vires illæ compositæ erunt ut particularum Diametri inverse & quadrata velocitatum directè.

Secetur utcumque in directione AS lineola AN quæ vim particulæ S exprimat, ducaturque NM, parallela AP, & ex M ducatur M R parallela A S, fiet parallelogrammum A N M R, in quo M R = A N, & angulus A M R = ang. M A N, ideoque A N ad A R ut sinus anguli M A R ad sinum ang. M A N, sive ut P A ad S A, hoc est ut vires particularum S & *P*, ideoque A R exprimet vim particulæ *P*, & A M exprimet vim compositam ex viribus *S* & *P*. Sumatur in a s lineola a n, quæ sit ad AN, ut a s ad AS inversè, & ut quadratum velocitatis in *a* ad quadratum velocitatis in *A* directè, ductisque n m & m r parallelis lineis a p, a s erunt a n & a r ut vires particularum s & p, & a m exprimet vim ex iis compositam.

Sed ob similitudinem triangulorum ANM, a n m est A N ad A M sicut a n ad a m, sive vis particulæ *A*, ad vim compositam ex particulis *S* & *P*, ut vis particulæ *a* ad vim compositam ex particulis *s* & *p*, ideoque vicissim, vis particulæ *A* ad vim particulæ *a* ut, vis composita ex vi particularum *S* & *P*, ad vim compositam ex viribus particularum *s* & *p*; Sed vis particula *A* est ad vim particulæ *a*, inversè ut par-

tes agitantur, ex viribus singulis agitantibus (per legum corollarium secundum) compositæ, similes habebunt determinationes, perinde ac si centra inter particulas similiter sita respicerent; & erunt vires illæ totæ ad invicem ut vires singulæ componentes, hoc est, ut correspondentium particularum diametri inversè, & quadrata velocitatum directè: & propterea efficient ut correspondentes particulæ figuras similes describere pergant. (u) Hæc ita se habebunt (per corol. 1. & 8. prop. IV. lib. 1.) si modo centra illa quiescant. Sin moveantur, quoniam





particularum Diametri, & directè ut velocitatum Quadrata ex hypothesi, ergo vires compositæ sunt in eâdem ratione. Q. E. D.

Idem ratiocinium ad vires compositas ex pluribus particulis extendetur. Unde *vires totæ &c.*

(u) * *Hæc ità se habebunt.* (*Per cor.* 1. *&* 8. *prop.* 4. *lib.* 1.) Aut quod idem est per hoc Lemma.

189. Lemma. Si corpora duo A, a, circà centra immota S, s, projiciantur secundum directiones A D, a d, quæ cum distantiis A S & a s æquales angulos DAS, das constituunt, & urgeantur viribus acceleratricibus centra illa S, s respicientibus, quæ semper sint inter se ut quadrata velocitatum corporum directè & distantiæ à centris inversè, corpora illa figuras similes circà centra S & s describent, similesque & proportionales figurarum illarum partes temporibus proportionalibus percurrent.

In projectilium directionibus capiantur partes quam minimæ A D, a d distantiis A S, a s proportionales. Jungantur S D, s d & corpora A, a temporibus quibusvis T, t describant arcus A B, a b qui lineas S D, s d attingunt. Sumantur arcus A F, a b qui eodem tempusculo descripti sint, & ductâ F G parallelâ S D, erit (4. lib. 1.) F G ad b d ut vis centralis quâ corpus A urgetur ad vim centralem quâ urgetur corpus a; & quia vires illæ (per hyp.) sunt ut quadratum velocitatum directè & distantiæ A S, a s, inversè, velocitates autem sunt ut spatia quæ simul descripta fuissent in Tangente A G, a d, erit F G ad b d, ut $AG^2 \times as$ ad $ad^2 \times AS$. Sed (per cor. 1. Lem. XI.) $BD : FG = AD^2 : AG^2$; quare (per compositionem rationum & ex æquo) $Bd : bd = AD^2 \times as : ad^2 \times AS$. Cum igitur ob triangulorum A S D, a s d, similitudinem (ex hyp.) sit $AD : ad = AS : as$ & ideò $AD^2 \times as : ad^2 \times AS = AS : as$; erit $BD : bd = AS : as$, & ob similitudinem

niam (x) ob tranſlationum ſimilitudinem, ſimiles manent eorum ſitus inter ſyſtematum particulas; ſimiles inducentur mutationes in figuris quas particulæ deſcribunt. Similes igitur erunt correſpondentium & ſimilium particularum motus uſque (y) ad occurſus ſuos primos, & propterea ſimiles occurſus, & ſimiles reflexiones, & ſubinde (per jam oſtenſa) ſimiles motus inter ſe donec iterum in ſe mutuo inciderint, & ſic deinceps in infinitum. *Q. E. D.*

LIBER SECUND. SECT. VII. PROP. XXXII. THEOR. XXVI.

Corol. 1. Hinc ſi corpora duo quævis, quæ ſimilia ſint & ad ſyſtematum particulas correſpondentes ſimiliter ſita, inter ipſas temporibus proportionalibus ſimiliter moveri incipiant, ſintque eorum magnitudines ac denſitates ad invicem ut magnitudines ac denſitates correſpondentium particularum: hæc pergent temporibus proportionalibus ſimiliter moveri. Eſt enim eadem ratio partium majorum ſyſtematis utriuſque atque particularum.

Corol. 2. Et ſimiles & ſimiliter poſitæ ſyſtematum partes omnes quieſcant inter ſe: & earum duæ, quæ cæteris majores ſint, & ſibi mutuo in utroque ſyſtemate correſpondeant, ſecundum lineas ſimiliter ſitas ſimili cum motu utcumque moveri incipiant: hæ ſimiles in reliquis ſyſtematum partibus excitabunt motus, & pergent inter ipſas temporibus proportionalibus ſimiliter moveri; atque ideo ſpatia diametris ſuis proportionalia deſcribere.

PRO-

nem figurarum, ut AD ad ad, ideoque ob æquales angulos D & d, triangula ADB, adb erunt ſimilia, & propterea arcus AB, ab, ſimiles & ſimiliter ſiti. Simili modo demonſtrabitur quod corpora è locis B & b progreſſa ſimiles arcus ac ſimiliter poſitos deſcribant, atque ità deinceps. Deſcribent ergò figuras ſimiles circà centra S & s. His verò demonſtratis patet (196. lib. 1.) quod deſcribent ſimiles & proportionales figurarum ſimilium partes temporibus proportionalibus, ſeu quæ ſemper ſint ut tempora T & t.

(x) * *Ob tranſlationum ſimilitudinem.* Oriuntur enim centrorum illorum tranſlationes ex cauſis proportionalibus & ſimiliter agentibus, videlicet ex ſimilibus particularum ſimilium & correſpondentium motibus, adeò ut quemadmodum initio motûs centra ſimiliter moveri cœperunt, ſimiliter quoque deinceps moveri pergant. 189.

(y) * *Uſque ad occurſus ſuos primos &c.* Nam cum particularum correſpondentium diſtantiæ, poſt quævis tempora proportionalia, ſint ſemper in datâ diametrorum ratione in duobus ſyſtematibus (ex dem.), neceſſe eſt ut diſtantiæ temporibus proportionalibus evaneſcant, & proindè ut particularum occurſus primi con-

PROPOSITIO XXXIII. THEOREMA XXVII.

Iisdem positis, dico quod systematum partes majores resistuntur in ratione compositâ ex duplicatâ ratione velocitatum suarum & duplicatâ ratione diametrorum & ratione densitatis partium systematum.

Nam resistentia oritur partim ex viribus centripetis vel centrifugis quibus particulæ systematum se mutuo agitant, partim ex occursibus & reflexionibus particularum & partium majorum. Prioris autem generis resistentiæ sunt ad invicem ut vires totæ motrices à quibus oriuntur, (z) id est, ut vires totæ acceleratrices & quantitates materiæ in partibus correspondentibus; hoc est (per hypothesin) ut quadrata velocitatum directè & distantiæ particularum correspondentium inversè & quantitates materiæ in partibus correspondentibus directè: ideoque cum distantiæ particularum systematis unius sint ad distantias correspondentes particularum alterius, ut diameter particulæ vel partis in systemate priore ad diametrum particulæ vel partis correspondentis in altero, (a) & quantitates materiæ sint ut densitates partium & cubi diametrorum; resistentiæ sunt ad invicem ut quadrata velocitatum & quadrata diametrorum & densitates partium systematum. *Q. E. D.* (b) Posterioris generis resistentiæ sunt ut reflexionum correspondentium numeri & vires

contingant, ubi particulæ illæ figurarum similium partes similes descripserunt. Ex quo sequitur particularum illarum occursus primos similes fore, tum ratione directionum, quod jam demonstratum est., tum etiam ratione velocitatum & quantitatum motûs. Siquidem spatia percursa temporibus proportionalibus sunt semper in datâ ratione, ideoque velocitates in locis similibus sunt semper in datâ ratione, & indè ob particularum correspondentium similitudinem & datam densitatum rationem, quantitates motûs quæ sunt ut velocitates & densitates & volumina conjunctim, in locis similibus manent in datâ ratione. Reflexiones igitur quæ ex ejusmodi motibus atquè occursibus similibus nascuntur, similes erunt.

(z) * *Id est ut vires totæ acceleratrices & quantitates materiæ* (per def. 8. lib. 1.)

(a) * *Et quantitates materiæ sint &c.* Quantitates materiæ sunt ut densitates & volumina partium conjunctim (2. lib. 1.), & ob partium similitudinem, volumina sunt ut cubi laterum homologorum, seu diametrorum, ideóque quantitates materiæ sunt ut densitates partium & cubi diametrorum.

(b) * *Posterioris generis resistentiæ &c.* Si enim vires reflexionum supponantur æ-

gra-

vires conjunctim. Numeri autem reflexionum sunt ad invicem ut velocitates partium correspondentium directè, & spatia inter earum reflexiones inversè. Et vires reflexionum sunt ut velocitates & magnitudines & densitates partium correspondentium conjunctim; id est, ut velocitates & diametrorum cubi & densitates partium. Et conjunctis his omnibus rationibus, resistentiæ partium correspondentium sunt ad invicem ut quadrata velocitatum & quadrata diametrorum & densitates partium conjunctim. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur si systemata illa sint fluida duo elastica ad modum aeris, & partes eorum quiescant inter se: corpora autem duo similia & partibus fluidorum quoad magnitudinem & densitatem proportionalia, & inter partes illas similiter posita, secundum lineas similiter positas, utcunque projiciantur; vires autem acceleratrices, quibus particulæ fluidorum se mutuo agitant, sint ut corporum projectorum diametri inversè, & quadrata velocitatum directè: corpora illa temporibus proportionalibus similes excitabunt motus in fluidis, & spatia similia ac diametris suis (c) proportionalia describent.

Corol. 2. Proinde in eodem fluido projectile velox resistentiam patitur, quæ est in duplicatâ ratione velocitatis quam proximè. Nam si vires, quibus particulæ distantes se mutuo agitant,

quales, resistentiæ sunt ut numeri reflexionum seu occursuum; & si numeri reflexionum æquentur, resistentiæ sunt ut vires reflexionum correspondentium; unde, conjunctis his rationibus, resistentiæ quæ ex particularum & partium majorum occursibus & reflexionibus oriuntur, sunt semper ut reflexionum correspondentium numeri & vires conjunctim. Numeri autem reflexionum, cæteris paribus, sunt ad invicem ut velocitates partium correspondentium directè, &, cæteris paribus, sunt inversè ut spatia inter particularum & partium correspondentium occursus seu reflexiones intercepta, id est, inversè ut partium correspondentium diametri, ideóque *numeri reflexionum sunt ad invicem ut velocitates partium correspondentium directè* & earumdem diametri inversè. *Et vires reflexionum sunt ut* motûs quantitates in occursibus *id est, ut velocitates & diametrorum cubi & densitates partium correspondentium. Et conjunctis his omnibus rationibus &c.*

(c) * *Proportionalia describent.* Probatur enim ut in dem. prop. 32. lemmate (189) similes similium figurarum partes temporibus proportionalibus à corporibus illis semper describi. Undè corollarium hoc patet (per cor. 1. & 2. prop. 32.). 189.

tant, augerentur in duplicatâ ratione velocitatis, (d) resistentia foret in eâdem ratione duplicatâ accuratè; (e) ideoque in medio, cujus partes ab invicem distantes sese viribus nullis agitant, resistentia est in duplicatâ ratione velocitatis accuratè. Sunto igitur media tria A, B, C ex partibus similibus & æqualibus & secundum distantias æquales regulariter dispositis constantia. Partes mediorum A & B fugiant se mutuo viribus quæ sint ad invicem ut T & V, illæ medii C ejusmodi viribus omninò destituantur. Et si corpora quatuor æqualia D, E, F, G in his mediis moveantur, priora duo D & E in prioribus duobus A & B, & altera duo F & G in tertio C; sitque velocitas corporis D ad velocitatem corporis E, & velocitas corporis F ad velocitatem corporis G in subduplicatâ ratione virium T ad vires V: resistentia corporis D erit ad resistentiam corporis E, & resistentia corporis F ad resistentiam corporis G, (f) in velocitatum ratione duplicatâ; & propterea resistentia corporis D erit ad resistentiam corporis F ut resistentia corporis E ad resistentiam corporis G. Sunto corpora D & F æquivelocia ut & corpora E & G; & augendo velocitates corporum D & F in ratione quâcunque, ac diminuendo vires particularum medii B in eâdem ratione duplicatâ, (g) accedet medium B ad formam & conditionem medii C pro lubitu,

(d) * *Resistentia foret in eâdem ratione duplicatâ accuratè.* Nam si idem corpus variâ cum velocitate in uno eodemque fluido similiter projiciatur, eædem sunt resistentiæ, ac si corpora duo similia & æqualia similiter projicerentur in duobus fluidis priori omnino paribus; sed in hoc casu, ob æquales inter se partium correspondentium diametros & densitates, resistentiæ sunt in duplicatâ ratione velocitatum accuratè (per. prop. 33. & ejus coroll. 1.). Ergò &c.

(e) * *Ideoque in medio &c.* In medio cujus partes ab invicem distantes sese viribus quibuscumque in ratione velocitatis duplicatâ crescentibus agitant, resistentia (ex modò dem.) est semper in eâdem ratione duplicatâ; Quare si vires illæ quibus particulæ sese agitant, supponantur quam minimæ, manebit semper resistentia in ratione velocitatis duplicatâ accuratè; evanescant tandem illæ vires manet resistentia in ratione velocitatis duplicata; sed idem melius patet per secundam partem demonstrationis propositionis hujus 33.

(f) * *In velocitatum ratione duplicatâ.* (Ex demonstratis initio coroll. hujus.).

(g) * *Accedet medium B &c.* Si enim velocitates corporum D & F, quam maxime augerentur vires particularum medii B, manentibus viribus medii A & velocitate corporis E quam maxime decrescerent, quia est semper vis medii A ad vim medii B ut quadratum velocitatis corporis D ad quadratum velocitatis corporis E.

bitu, & idcirco resistentiæ corporum æqualium & æquivelocium *E* & *G* in his mediis, perpetuò accedent ad æqualitatem, ita ut earum differentia evadat tandem minor quam data quævis. Proinde cum resistentiæ corporum *D* & *F* sint ad invicem ut resistentiæ corporum *E* & *G*, accedent etiam hæ similiter ad rationem æqualitatis. Corporum igitur *D* & *F*, ubi velocissimè moventur, resistentiæ sunt æquales quam proximè: & propterea cum resistentia corporis *F* sit in duplicatâ ratione velocitatis, erit resistentia corporis *D* in eâdem ratione quam proximè.

(h) *Corol.* 3. Corporis in fluido quovis elastico velocissimè moti eadem ferè est resistentia ac si partes fluidi viribus suis centrifugis destituerentur, seque mutuo non fugerent: si modo fluidi vis elastica ex particularum viribus centrifugis oriatur, & velocitas adeo magna sit ut vires non habeant satis temporis ad agendum.

Corol. 4. Proinde cum resistentiæ similium & æquivelocium corporum, in medio cujus partes distantes se mutuo non fugiunt, (i) sint ut quadrata diametrorum; sunt etiam æquivelocium & celerrimè motorum corporum resistentiæ in fluido elastico ut quadrata diametrorum quam proximè.

Corol. 5. Et cum corpora similia, æqualia & æquivelocia, in mediis ejusdem densitatis, quorum particulæ se mutuo non fugiunt, sive particulæ illæ sint plures & minores, sive pauciores & majores, in æqualem materiæ quantitatem temporibus æqualibus impingant, eique æqualem motus quantitatem imprimant, & vicissim (per motus legem tertiam) æqualem ab eâdem reactionem patiantur, hoc est, æqualiter resistantur: manifes-

(h) * *Corollarium* 3. Patet per cor. 2. in quo vis T quâ particulæ medii A in quo corpus D movetur se fugiunt, qualiscumque supponitur; corporum D & F ubi velocissimè moventur, resistentiis manentibus æqualibus quam proxime, licet medii C in quo corpus F movetur, particulæ viribus centrifugis prorsus destituantur: Patet etiam ex eo quod supponatur vires non habere satis temporis ad agendum, unde casus redit ad eum in quo vires illæ nullæ sunt. 189

(i) * *Sint ut quadrata diametrorum.* Per 2am. partem dem. prop. hujus, ob datas corporum velocitates & medii densitatem datam.

DE MOTU CORPORUM.

nifeſtum eſt etiam quod in ejuſdem denſitatis fluidis elaſticis, ubi velociſſimè moventur, æquales ſint eorum reſiſtentiæ quam proximè; ſive fluida illa ex particulis craſſioribus conſtent, ſive ex omnium ſubtiliſſimis conſtituantur. Ex medii ſubtilitate reſiſtentia projectilium celerrimè motorum non multum diminuitur.

Corol. 6. Hæc omnia ita ſe habent in fluidis, quorum vis elaſtica ex particularum viribus centrifugis originem ducit. Quod ſi vis illa aliunde oriatur, veluti ex particularum expanſione ad inſtar lanæ vel ramorum arborum, aut ex aliâ quâvis causâ, quâ motus particularum inter ſe redduntur minus liberi: reſiſtentia, ob minorem medii fluiditatem, erit major quàm in ſuperioribus corollariis.

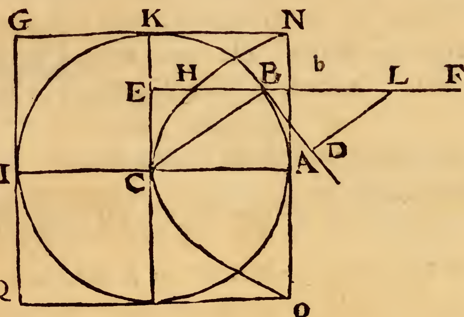
PROPOSITIO XXXIV. THEOREMA XXVIII.

Si globus & cylindrus æqualibus diametris deſcripti, in medio raro ex particulis æqualibus & ad æquales ab invicem diſtantias liberè diſpoſitis conſtante, ſecundum plagam axis cylindri, æquali cum velocitate moveantur: erit reſiſtentia globi duplo minor quàm reſiſtentia cylindri.

Nam quoniam actio medii in corpus eadem eſt (per legum corol. 5.) ſive corpus in medio quieſcente moveatur, ſive medii particulæ eâdem cum velocitate (k) impingant in corpus quieſcens: conſideremus corpus tanquam quieſcens, & videamus quo impetu urgebitur à medio movente. Deſignet igitur $ABKI$ corpus ſphæricum centro C ſemidiametro CA deſcriptum, & incidant particulæ medii datâ cum velocitate in corpus illud ſphæricum, ſecundum rectas ipſi AC parallelas: ſitque FB ejuſmodi recta. In eâ capiatur LB ſemidiametro CB æqualis, & ducatur BD quæ ſphæram tangat in B. In KC &

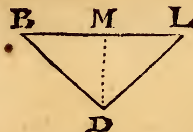
(k) * *Impingant in corpus quieſcens.* Eadem enim eſt in utroque caſu velocitas reſpectiva, eademque proindè vis percuſſionis (per dem. in cor. 5. leg. mot.) idem quoque manifeſtum eſt per motûs Leg. 3. quia fluidum & corpus ob reactionem actioni æqualem & contrariam, in utroque caſu in ſe mutuò agunt.

& *BD* demittantur perpendiculares *BE*, *LD*, & vis quâ particula medii, ſecundum rectam *FB* obliquè incidendo, globum ferit in *B*, erit ad vim quâ particula eadem cylindrum *ONGQ* axe *ACI* circa globum deſcriptum perpendiculariter feriret in *b*, (l) ut *LD* ad *LB* vel *BE* ad *BC*. Rurſus efficacia hujus vis ad movendum globum ſecundum incidentiæ ſuæ plagam *FB* vel *AC*, eſt ad ejuſdem efficaciam ad movendum globum ſecundum plagam determinationis ſuæ, id eſt, ſecundum plagam rectæ *BC* quâ globum directè urget (m) ut *BE* ad *BC*. Et (n) conjunjunctis rationibus, efficacia particulæ in globum ſecundum rectam *FB* obliquè incidentis, ad movendum eundem ſecundum plagam incidentiæ ſuæ, eſt ad



(l) * *Ut LD ad LB vel BE ad BC.* Si enim recta data LB exponat vim quâ particula medii circularem baſim cylindri perpendiculariter ferit in b, & vis illa (per leg. cor. 2.) reſolvatur in vires BD, LD, vis BD juxtà directionem tangentis in B agens nullam efficaciam habet ad globum promovendum & recta LD vim exponet quâ particula medii globulum perpendiculariter ferit in B. Quia verò radius CB, tangenti perpendicularis eſt, & ideo (per conſtr.) DL parallela CB, triangula rectangula CEB, BDL, ſimilia ſunt, imo ob BL=CB (per conſtr.) æqualia; Eſt igitur LD ad LB ut BE ad BC.

(m) 190. * *Ut BE ad BC.* Vis LD ductâ ex puncto D ad LB perpendiculari DM, iterum reſolvatur in vires LM & MD, & ob triangulorum LMD LDB, ſimilitudinem, erit vis LM ad vim LD, ut LD ad LB, ſeu ut BE ad BC; nulla verò ratio habenda eſt vis MD, cujus directio perpendicularis eſt ad axem AI, quia ſimili conſtructione factâ ad alteram hujus axis partem in puncto ſphæræ

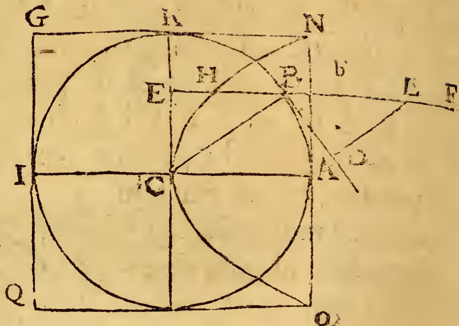


quod puncto B directè oppoſitum eſt, vis MD, vi æquali & directe oppoſitâ eliditur. Undè ſola conſideranda eſt vis LM quæ ſecundùm directionem axi AI parallelam agit. Eſt autem vis LM ad vim LB quâ particula medii circularem baſim cylindri perpendiculariter ferit in b, ut LD^2 ad LB^2, ob continuè proportionales LM, LD, LB. 190.

(n) * *Conjunctis rationibus.* Et ex æquo.

DE MOTU CORPORUM.

ad efficaciam particulæ ejusdem ſecundum eandem rectam in cylindrum perpendiculariter incidentis, ad ipſum movendum in plagam eandem, ut *B E* quadratum ad *B C* quadratum. Quare ſi in *b E*, quæ perpendicularis eſt ad cylindri baſem circularem *N A O* & æqualis radio *AC*, ſumatur *b H* æqualis



$\frac{BE\ quad.}{CB}$: erit *b H* ad *b E* ut effectus particulæ in globum ad effectum particulæ in cylindrum. (o) Et propterea ſolidum quod à rectis omnibus *b H* occupatur erit ad ſolidum quod à rectis omnibus *b E* occupatur, ut effectus particularum omnium in globum ad effectum particularum omnium in cylindrum. (p) Sed ſolidum prius eſt parabolois vertice *C*, axe *CA* & latere recto *C A* deſcriptum, & ſolidum poſterius eſt cylindrus para-

(o) * *Et propterea ſolidum.* Si in omnibus rectæ N A punctis erigantur perpendicula ut b H & b E, ſitque N H C curva quam punctum H perpetuò tangit, & recta K C locus omnium punctorum E; ſolidum quod perpendiculis omnibus b H; per totam baſim cylindri ductis occupatur, æquale erit conoidi ſeu figuræ ſolidæ quæ ex rotatione figuræ planæ NHCA circà axem C A factâ generatur, & ſolidum quod à rectis omnibus b E occupatur erit cylindrus ex rotatione rectanguli A K circà eundem axem C A factâ deſcriptus.

(p) * *Sed ſolidum prius.* Cum (per conſtr.) ſit $bH = \frac{BE^2}{CB}$ ideoque $bH \times CB = \overline{BE}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{CE}^2$ & (ex naturâ circuli) $BC = CA = KC$, ideoque $BE^2 = KC^2 - CE^2$ & $bH \times CB$, ſeu $\overline{KC - EH} \times KC$, ſeu $KC^2 - KC \times EH = KC^2 - CE^2$, ideoque $KC \times EH = CE^2$; ſed ſi ex puncto H duceretur ad C A, ordinata perpendicularis, hæc eſſet æqualis C E, & abſcinderet à C A, partem æqualem E H. Quarè rectangulum ſub abſciſſâ & datâ lineâ K C ſivè C A, æquale eſt quadrato ordinatæ ad C A perpendicularis; undè curva C H N, (per theor. 1. de Parab.) eſt Parabola cujus vertex C, axis C A, & latus rectum C A.

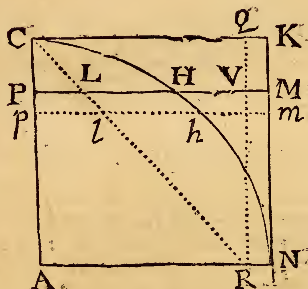
paraboloidi circumscriptus: & notum est (†) quod parabolois sit semissis cylindri circumscripti. Ergo vis tota medii in globum est duplo minor quam ejusdem vis tota in cylindrum. Et propterea si particulæ medii quiescerent, & cylindrus ac globus æquali cum velocitate moverentur, foret resistentia globi duplo minor quam resistentia cylindri. *Q. E. D.*

Scholium.

(q) Eâdem methodo figuræ illæ inter se quoad resistentiam comparari possunt, eæque inveniri quæ ad motus suos in mediis resistentibus continuandos aptiores sunt. Ut si basi circulari

(†) * *Et notum est quod &c.*

191. Lemma. Parabolois seu solidum ex rotatione Parabolæ CHN, circà axem CA genitum est semissis cylindri circumscripti, qui producitur ex rotatione rectanguli AK circà latus CA. Per punctum mobile P, erigatur ad axem CA normalis PM, parabolam secans in H, & rectam KN in M; & in rotatione figuræ totius circà axem CA, lineæ PH & PM circulos describent, qui erunt inter se ut radiorum PH, PM quadrata, seu (ex naturâ Parabolæ) & ob PM = AN, ut abscissæ CP, CA. Ducatur jam punctum P cum verticali PHM per totam altitudinem CA, & solidum ex rotatione figuræ CHN genitum erit ad cylindrum ex rotatione rectanguli CKNA ortum, ut summa omnium circulorum quos recta mobilis PH rotando describit, ad summam omnium circulorum quos describit recta PM, hoc est, ut summa omnium CP, ad summam omnium CA. In lineâ AN, capiatur AR æqualis AC, jungatur CR secans PH in L, & erigatur ad AR, perpendicularis RQ, secans PM in V; cum sit semper PL = CP, & PV = CA, summa omnium CP, seu PL, per totam altitudinem CA, est triangulum isosceles CRA, & summa omnium



CA, seu PV, per eandem altitudinem CA, est quadratum CARQ; cum igitur triangulum CRA, sit semissis quadrati CARQ, Parabolois est etiam semissis cylindri circumscripti Q. E. D.

(q) 192. *Eadem methodo &c.* Solidum 192.

De Motu Corporum.

lari *CEBH*, quæ centro *O*, radio *OC* deſcribitur, & altitudine *OD*, conſtruendum ſit fruſtum coni *CBGF*, quod omnium eâdem baſi & altitudine conſtructorum & ſecundum plagam axis ſui verſus *D* progredientium fruſtorum minimè reſiſtatur:

bi-

dum ex rotatione curvæ cujuſvis K B A, circà rectam A I poſitione datam genitum in medio reſiſtente moveatur ſecundùm directionem rectæ IA, & oporteat reſiſtentiam quam patitur conferre cum reſiſtentiâ cylindri ſecundùm eandem directionem moti & cujus baſis eſt circulus radio K C ad A C normali deſcriptus. Diametro CI ad arbitrium aſſumptâ deſcribatur ſemicirculus C S I, agatur per punctum I chorda I S, parallela B D curvam tangenti in puncto quovis B; ducatur per B recta B V parallela A I, & per S recta S H parallela C K, ambæ concurrentes in H, ſitque Q H E curva quam punctum H perpetuò tangit; & completo rectangulo CKGI, reſiſtentia ſolidi rotundi per converſionem curvæ K B A circà C A geniti erit ad reſiſtentiam baſis ipſius, ſeu circuli centro C & radio C K deſcripti, ut ſolidum ex rotatione figuræ K QHE circà CI genitum, ad cylindrum rotatione rectanguli C K G I circà eandem C I factâ deſcriptum. Producatur enim H B ad L, ut ſit B L = C I; ex puncto L demittatur ad B D perpendicularis L D, & ex D ad B L perpendicularis D M; & eodem modo quo ſuprà (190) patet efficaciam particulæ medii ad movendum ſolidum totum K B A ſecundùm plagam incidentiæ ſuæ L B eſſe ad efficaciam particulæ ejuſdem ſecundum eandem rectam in baſim circularem K C, perpendiculariter in P ad cylindrum qui rotatione rectanguli C K G I deſcribitur movendum in plagam eandem, ut eſt LD^2 ad LB^2, ſeu etiam ut eſt LM ad LB; ſed

ſed (per conſtr.) CI = LB, & ob angulum SIC = DBL & angulum ISC = BDL, eſt etiam CT ſeu PH = LM; Quarè ſolidum quod à rectis omnibus PH, occupatur erit ad ſolidum quod à rectis omnibus PV = CI, occupatur, aut quod idem eſt, ſolidum ex rotatione figuræ CKQHE circà CI, erit ad cylindrum ex rotatione rectanguli CKGI genitum, ut reſiſtentia ſolidi quod figura CKBA circà CA, rotata deſcribit, ad reſiſtentiam baſeos circularis quam deſcribit recta CK quæ eadem eſt cum reſiſtentiâ cylindri cujuslibet ejuſdem baſis, quia ſuperficies cylindri quam recta KG rotando circà AI deſcribit, nullam reſiſtentiam patitur, ſecundùm directionem motûs ipſi KG parallelam. Q. E. D.

193. Ex conſtructione liquet, ſi recta quæ curvam KBA tangit in A ſit ad axem CA normalis, punctum E coincidere cum puncto I, & ſi recta tangens curvam KBA, in K perpendicularis ſit ad KC, punctum Q in quo curva EH ſecat latus KG coincidere cum puncto K.

194. Ex puncto B demittatur ad CA perpendicularis BR, dicaturque CI $= a$, AR $= x$, BR = HT = CP $= y$, HP = CT $= z$, BN $= dx$, Nn perpendicularis ad BL curvæque occurrens in n $= dy$, ac proindè $Bn^2 = dx^2 + dy^2$. Et quoniam triangula BnN, ICS, ſimilia ſunt (per conſtr.) erit $Bn^2 : Nn^2 = CI^2 : CS^2 =$ CI : CT, hoc eſt, $dx^2 + dy^2 : dy^2 = a$ z. Et propterea $ady^2 = zdx^2 + zdy^2$, formula per quam ex datâ æquatione ad curvam KBA, inveniri poteſt æquatio ad curvam alteram EHQ & contrà; nam quoniam CP $= y$, ſi loco dx eruatur ex æquatione curvæ KBA ejus valor in y & dy habebitur æquatio quæ continebit z, y & dy ſive CP, PH & fluxionem PC, cum conſtantibus.

195. Ducta ſit ordinata ph alteri PH infinitè propinqua, & ſi radius ſit ad peripheriam circuli ut unitas ad numerum p, erit py peripheria circuli quem linea PC circà axem CI, rotando deſcribit, ideòque annulus cylindricus quem arcus PHhp in eâdem convolutione deſcribit, erit $pzydy$, & indè ſolidum ex rotatione figuræ CPHE, genitum, erit S. $pzydy$, fluente hâc ità ſumptâ ut factâ $y = 0$ evaneſcat. Quarè cùm cylindrus convolutione rectanguli CPVI, deſcriptus ſit $\frac{1}{2}payy$, reſiſtentia ſolidi ex revolutione figuræ ABR geniti, erit ad reſiſtentiam baſeos ipſius circuli radio BR deſcripti ut S. $pzydy$ ad $\frac{1}{2}payy$, ſeu ut S. $zydy$ ad $\frac{1}{2}ayy$.

196. Sit KBA ellipſis vel hyperbola cujus vertex A axis principalis AI. Sit ſemiaxis principalis $= b$, ſemilatus rectum $= c$, AR $= x$, RB $= y$, & erit $byy = 2bcx - cxx$ æquatio ad ellipſim; & $byy = 2bcx + cxx$, æquatio ad hyperbolam. Prioris æquationis fluxio $bydy = bcdx - cxdx$, ex quâ habetur $dx^2 = \frac{b^2y^2dy^2}{(bc - cx)^2} = \frac{by^2dy^2}{b^2cc - 2bccx + ccxx} = \frac{by^2dy^2}{bcc - cyy}$. Hinc æquatio (194) $ady^2 = zdx^2 + zdy^2$, in hanc abit * $ady^2 = \frac{zby^2dy^2}{-cy^2 + bcc} + zdy^2$ ſive dividendo per dy^2 & ad communem denominatorem revocando utrumque æquationis membrum fit $-acy^2 + abcc = by^2z - cy^2z + bccz$ ergo eſt $z = \frac{-acy^2 + abcc}{\overline{b-c} \times y^2 + bcc}$ & factâ diviſione $z = \frac{-ac}{b-c} + \frac{ab^2c^2}{(b-c) \times (\overline{b-c} \times y^2 + bcc)}$ unde erit $zydy = \frac{-acydy}{b-c} + \frac{ab^2c^2ydy}{(b-c) \times (\overline{b-c} \times y^2 + bcc)}$ ſumptiſque fluentibus eſt S. $zydy = \frac{-acy^2}{2(b-c)} + \frac{ab^2c^2}{2(b-c)^2} \text{L.} \overline{\overline{b-c} \times y^2 + bcc} + Q.\ \textit{conſt.}$ (ut patebit ſi hujus quantitatis fluxio ſumatur): Factâ autem $y = 0$ erit $0 = \frac{ab^2c^2}{2(b-c)^2} \text{L.} bcc + Q.\ \textit{conſt.}$ ideoque $Q.\ \textit{conſt.} = -\frac{ab^2c^2}{2(b-c)^2} \text{L.} bcc$, unde tandem habetur S. $zydy = -\frac{acy^2}{2(b-c)} + \frac{ab^2c^2}{2(b-c)^2}$ $(\text{L.} \overline{\overline{b-c} \times y^2 + bcc} - \text{L.} bcc)$ ſive S. $zydy = -\frac{acy^2}{2(b-c)} + \frac{ab^2c^2}{2(b-c)^2} \text{L.} \frac{\overline{b-c} \times y^2 + bcc}{bcc}$, Eſt ergo reſiſtentia conoïdis Elliptici ABR ad reſiſtentiam ſuæ baſeos, ſeu circuli radio BR deſcripti ut $-\frac{cy^2}{2(b-c)} + \frac{b^2c^2}{2(b-c)^2}$ $\text{L.} \frac{\overline{b-c} \times y^2 + bcc}{bcc}$ ad yy. Pro conoide

Hy-

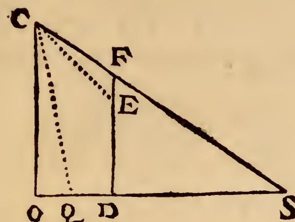
(r) bisseca altitudinem OD in Q & produc OQ ad S ut sit QS æqualis QC, & erit S vertex coni cujus frustum quæritur.

Hyperbolico, invenietur $a\,dy^2 = \frac{zby^2dy^2}{cy^2+bcc} + zdy^2$ unde eodem iterato calculo prodibit ratio ejus resistentiæ ad resistentiam baseos ut $+\frac{cy^2}{2(b+c)} + \frac{b^2c^2}{2(b+c)^2} \times L.\frac{\overline{b+c}\times y^2+bcc}{bcc}$ ad y^2. Pro conoide Parabolico, fiat in formulâ resistentiæ Conoidis Elliptici axis b Infinitus, cæterisque terminis in quibus b non occurrit deletis, erit Conoidis Parabolici resistentia ad resistentiam suæ Baseos ut $\frac{b^2c^2}{2b^2} \times L.\frac{by^2+bcc}{bcc}$ ad y^2, sive ut $c^2\,L.\frac{y^2+cc}{cc}$ ad yy.

197. Sit KBA linea recta, & quia chorda IS parallela est rectæ KA, (192) punctum H est semper in lineâ rectâ THQ, ideóque resistentia coni revolutione trianguli KAC circà AC geniti erit ad resistentiam circuli radio CK descripti, ut cylindrus ex rotatione rectanguli CKQT ad cylindrum ex rotatione rectanguli CKGI circà CI, id est, ob communem utriusque cylindri basim, ut altitudo CT ad altitudinem CI; & est CT ad CI, in ratione duplicatâ CS ad CI vel KC ad KA, seu in ratione duplicatâ sinûs anguli KAC ad sinum totum. Simili modo resistentia coni quem recta BA rotata describit est ad resistentiam circuli radio BR descripti in eâdem ratione duplicatâ KC ad KA; & (dividendo) resistentia annuli conici quem recta KB, circà CA rotata describit est ad resistentiam annuli circularis quem in eâdem convolutione describit recta KP in eâdem duplicatâ ratione KC ad KA. Resistentia verò coni truncati convolutione figuræ KBR circà CR, geniti, est ad resistentiam baseos ipsius sive circuli radio CK, descripti ut solidum quod figura CKQHVI, circà CI rotando describit, ad cylindrum ortum ex rotatione rectanguli CKGI. Est autem solidum prius summa duorum cylindrorum, revolutione rectangulorum CKQT & THVI circà CI productorum, hoc est, (ob areas circulorum radiorum quadratis proportionales) ut summa $CK^2 \times CT + CP^2 \times TI$.

(r) 198. * *Bisseca altitudinem &c.* Datis CK & CR invenienda sit positio rectæ KB ut

(f) Unde obiter, cum angulus CSB semper sit acutus, con-

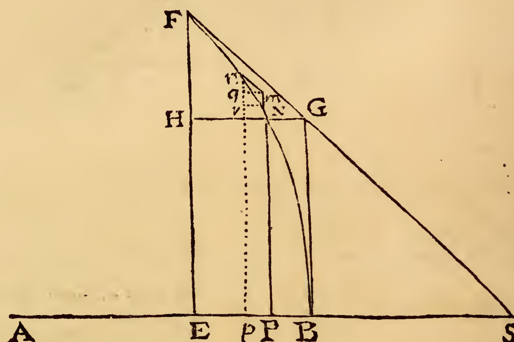


ut resistentia frusti conici quod per revolutionem figuræ KBR circà CA producitur sit omnium minima. Resistentia illa est ut $CK^2 \times CT + CP^2 \times TI$; sed $KA^2 : CK^2 = CI : CT = \frac{CK \times CI}{KA^2}$; & similiter $KA^2 : CA^2 = CI : TI = \frac{CA^2 \times CI}{KA^2}$. Quarè ob datam CI, resistentia coni truncati erit ut $\frac{CK^4 + CP^2 \times CA^2}{KA^2}$. Dicantur $KC = b$, $CR = 2c$, $CA = x$, ideóque $KA^2 = bb + xx$, & quia $CA\ (x) : KC\ (b) = RA\ (x - 2c) : BR$, seu CP, erit $CP = \frac{bx - 2cb}{x}$, & indè resistentia coni truncati erit ut $\frac{b^4 + (bx - 2cb)^2}{bb + xx}$ $= \frac{b^4 + b^2x^2 - 4b^2cx + 4c^2b^2}{bb + xx} = bb + \frac{4bbcc - 4bbcx}{bb + xx}$. Capiatur hujus quantitatis fluxio & (40) ponatur nihilo æqualis, fiet $-\frac{4bbcdx}{bb + xx} - 2xdx\frac{(4bbcc - 4bbcx)}{(bb + xx)^2} = 0$, sive $\frac{1}{bb + xx} - \frac{2cx - 2xx}{(bb + xx)^2} = 0$, ideoque $-bb - xx - 2cx + 2xx = 0$, undè habetur $xx - 2cx = bb$, & indè eruitur $x = c + \sqrt{bb + cc}$. Biseca igitur altitudinem CR in r, ut sit $Cr = c$, & juncta $Kr = \sqrt{bb + cc}$, erit x, seu $CA = Cr + Kr$, sicut Newtonus in constructione posuit. 198.

(f) 199. * *Undè obiter.* Angulus externus (vid. fig. textûs) æqualis est summæ angulorum æqualium QCS & QSC, id est, angulo CSB; & quia COQ rectus est, angulus CQO ideoque & æqualis CSB, est semper acutus. Altitudo OD quamminima evadat tandemque evanescat; & quoniam (in hâc hypoth.) rectæ OC, OS, QS, CQ æquales fiunt, angulus CSO, & æqualis DFS fit semirectus, ejusque complementum ad duos rectos DFC grad. 135. Ducatur ad FD recta quælibet CE & evanescente OD resistentiâ coni truncati quem figura CFD circà OS rotata describit, erit in suo genere minima (198), ideóque minor quam resistentia coni truncati ex revolutione figuræ CED circà OS geniti; subducatur utrinquè resistentia circuli quem recta DE rotando describit; & resistentia superficiei ex rotatione figuræ CFE circà OS, minor erit quam resistentia annuli conici quem in eádem revolutione describit recta CE.

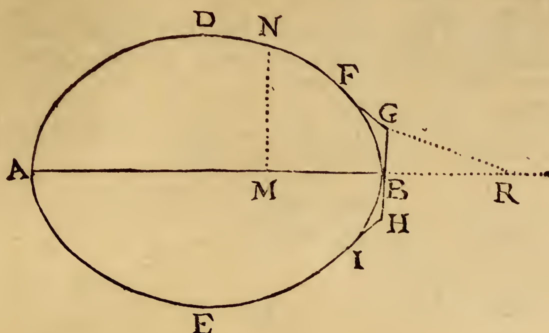
DE MOTU CORPORUM.

(^{t}) consequens est, quod si solidum *ADBE*, convolutione figuræ ellipticæ vel ovalis *ADBE* circa axem *AB* factâ generetur, & tangatur figura generans à rectis tribus *FG*, *GH*, *HI* in punctis *F*, *B* & *I*, eâ lege ut *GH* sit perpendicularis ad axem in puncto contactus *B*, & *FG*, *HI* cum eâdem *GH* contineant angulos *FGB*, *BHI* graduum 135, solidum, quod convolutione



(t) 200. *Consequens est.* Ut hæc consequentia pateat, demonstrandum est resistentiam superficiei quæ per rotationem figuræ FGB circà axem AB gignitur, minorem esse resistentiâ superficiei quam in eâdem revolutione arcus FB, describit. Ductis itaquè ad curvam ordinatis verticalibus & infinitè propinquis PN, pn, & ex puncto n ad PN productam rectâ nm, parallelâ FG, atquè ex m & N in pn perpendicularibus mq, Nr; dicantur FE ad axem AB normalis $=b$, GB $=c$, BP $=x$, PN $=y$, & quia productâ FG ut axi occurrat in s, est ob angulos EFS, BGS semirectos (per hyp.) ES $=$ FE $=b$, & BS $=$ GB $=c$, erit EB $=b-c$. Est quoquè Pp $=$ mq $=$ qn $=dx$, rn $=dy$, & hinc qr $=dy-dx$, ac proindè Pm $=y+dy-dx$, & pn $=y+dy$. Vis particulæ fluidi in GB perpendiculariter incidentis sit $=a$, & radius circuli ad peripheriam ut 1 ad p; his positis, resistentia circuli radio PN descripti exponi poterit (195) per $\frac{1}{2}payy$; resistentia circuli radio Pm descripti per $\frac{1}{2}pa(y+dy-dx)^2 = \frac{1}{2}payy+paydy-paydx$, neglectis scilicet terminis qui respectu $paydy$ & $paydx$, evanescunt. Hinc resistentia annuli circularis quem recta Nm, rotando describit, exponetur per differentiam $paydy-paydx$. Resistentia circuli radio pn descripti erit ut $\frac{1}{2}pa(y+dy)^2 = \frac{1}{2}payy+paydy$, ex quâ si auferatur resistentia circuli radio Pm descripti, remanebit resistentia annuli circularis ex rotatione rectæ qn geniti $=paydx$ & cum sit (197), nm^2 ad nq^2, seu FS^2 ad FE^2, sivè 2 ad 1, ut illius annuli resistentia ad resistentiam superficiei ex revolutione rectæ nm genitæ, hæc resistentia erit ut $\frac{1}{2}paydx$. Quarè resistentia superficiei quam figura nmN circà EB rotata describit, exponatur per quantitatem $paydy-\frac{1}{2}paydx$, &, sumptis fluentibus, harum resistentiarum summa per totum arcum BN exponetur per $\frac{1}{2}payy-\frac{1}{2}pa \times$ BNP aream, cui nihil addendum est nec subducendum; cum factâ $y=0$, hæc fluens evanescat, ut oportet. Si verò loco y scribatur b, seu FE, resistentia om-

tione figuræ *ADFGHIE* circa axem eundem *AB* generatur, minus reſiſtitur quam ſolidum prius, ſi modo utrumque ſecundum plagam axis ſui *AB* progrediatur, & utriuſque termi-



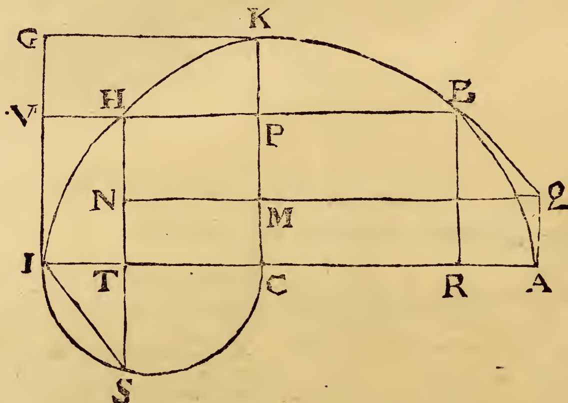
nus *B* præcedat. Quam quidem propoſitionem in conſtruendis navibus non inutilem futuram eſſe cenſeo.

omnium ſuperficierum quæ ex rotatione figurarum nmN, per totum arcum FB, deſcriptarum generarentur, erit ut $\frac{1}{2}pabb - \frac{1}{2}pa \times$ BNFE aream.

Porrò reſiſtentia circuli radio GB deſcripti exponenda eſt per $\frac{1}{2}pacc$, & reſiſtentia circuli radio FE deſcripti per $\frac{1}{2}pabb$; ideóque ductâ GH ad FE normali, reſiſtentia annuli circularis ex rotatione rectæ FH, per $\frac{1}{2}pabb - \frac{1}{2}pacc$; unde cum ſit FS^2 ad FE^2, ſeu 2 ad 1 ut annuli illius reſiſtentia ad reſiſtentiam ſuperficiei ex rotatione rectæ FG, hæc reſiſtentia erit ut $\frac{1}{4}pabb - \frac{1}{4}pacc$, totaque proindè reſiſtentia coni truncati ex rotatione figuræ FGB geniti exponetur per $\frac{1}{4}pabb + \frac{1}{4}pacc$. Quare reſiſtentia omnium ſuperficierum quas figuræ nmN, per totum arcum BNF diſtributæ rotando deſcribunt, eſt ad reſiſtentiam fruſti conici ex revolutione figuræ FGB orti ut $\frac{1}{2}pabb - \frac{1}{2}pa \times$ BNFE, ad $\frac{1}{4}pabb + \frac{1}{4}pacc$; ſive dividendo per $\frac{1}{4}pa$, ut $2bb - 2$ BNFE ad $bb + cc$. Si area BNFE æqualis eſſet trapezio BGFE, 200.
cum hoc ſit $= \frac{1}{2} EB \times \overline{FE + BG} = \frac{bb-cc}{2}$, foret $2bb - 2$ BNFE $= bb + cc$; ideóque prædictæ reſiſtentiæ duæ æquales eſſent; ſed trapezium BGFE majus eſt areâ BNFE, quæ (per hyp.) tota in trapezio continetur, & propterea quantitas $2bb - 2$ BNFE, major eſt quantitate $bb + cc$; reſiſtentia igitur omnium ſuperficierum ex rotatione figurarum nmM, ſuperat reſiſtentiam coni truncati ex revolutione figuræ FGB producti. Verum (199) reſiſtentia ſuperficiei quam figura nmN circà EB rotando deſcribit, minor eſt reſiſtentiâ ſuperficiei quam in eâdem rotatione deſcribit nN; ideóque reſiſtentia omnium ſuperficierum quæ figuræ nmN, per totum arcum BNF diſtributæ rotando deſcribunt, minor eſt reſiſtentiâ totius ſuperficiei ex rotatione arcûs BNF genitæ. Ergò reſiſtentia coni truncati per rotationem figuræ FGB deſcripti minor quoque eſt quam reſiſtentia ſuperficiei ex rotatione arcûs BNF productæ. Q. E. D.

201. Quæcumque igitur ſit figura (in textu) ANB, regularis vel irregularis,

modò arcus FB concavitatem axi AB obvertat, & totus intrà lineas FG, BG contineatur, per hanc Newtoni propositionem inveniri semper potest alia figura majoris capacitatis & minoris resistentiæ; Quod in construendis navibus usum habere potest. Resistentia adhuc minuitur si loco circuli radio GB descripti adjungatur conus quem recta GR, ad axem productum utcumque ducta rotando describit. In omnibus autem curvis, quæ æquatione inter abscissas x & ordinatas y definiuntur, facillimè invenitur punctum B per quod ducta tangens angulum semirectum cum ordinatâ perpendiculari constituit. Quia in illo puncto B, ordinatæ fluxio dy æqualis est fluxioni abscissæ dx. ut si æquatio ad curvam sit $a^2x=y^3$, & sumptis fluxionibus $a^2dx=3y^2dy$, ponendo $dx=dy$, habetur $a^2=3y^2$, & hinc $y=a\sqrt{\frac{1}{3}}$, undè per æquationem $a^2x=y^3$, invenitur $x=\frac{1}{3}a\sqrt{\frac{1}{3}}$.



PROBLEMA.

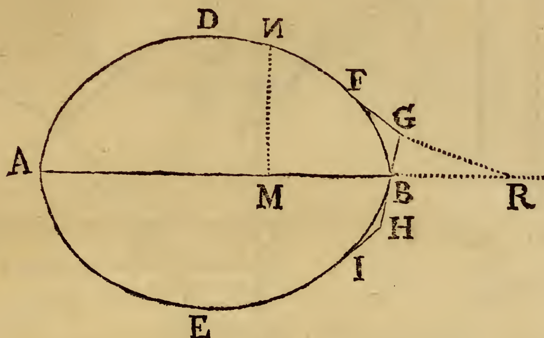
202. Datâ curvâ KBA quam recta QA ad axem CA perpendicularis tangit in A, invenire punctum B per quod si ducatur tangens altera BQ priori QA occurrens in Q, resistentia solidi per convolutionem figuræ KBQA, circà axem CA descripti sit in suo genere minima.

Eâdem constructione quâ suprà (192) factâ, ex puncto Q ducatur ad HT perpendicularis QN secans KC in M dicanturque $CI=a$, $AR=x$, BR seu $PC=y$, PH seu $TC=z$, $QA=v$, & peripheria circuli radio 1 descripti $=p$. His positis resistentia solidi ex revolutione arcûs BA circà axem CA geniti exponi potest per S. $pzydy$, (195); resistentia verò coni truncati ex rotatione figuræ BQA circà CA, per $\frac{1}{2}pavv+\frac{1}{2}pyyz-\frac{1}{2}pvvz$. Sit R resistentia data solidi ex rotatione arcûs totius KBA geniti, & resistentia superficiei quam in eâdem rotatione describit arcus KB, erit $R-$ S. $pzydy$, ideòque resistentia solidi per rotationem figuræ KBQA; erit $R-$ S. $pzydy+\frac{1}{2}pavv+\frac{1}{2}pyyz-\frac{1}{2}pvvz$. Hujus quantitatis fluxio nihilo æqualis fiat (40) & ob datam R, habebitur $-pzydy+pavdv+pzydy+\frac{1}{2}pyydz-pzvdv-\frac{1}{2}pvvdz=0$; undè invenitur $(z-a)2vdv=(yy-vv)dz$. Cùm igitur sit etiam (194) $ady^2=zdx^2+zdy$, ex his æquationibus & ex æquatione ad curvam KBA, invenientur valores litterarum x, y, v, seu RA, RB, & AQ. Q. E. I.

Exempli causâ. Sit KBA parabola, cujus vertex A, axis AC, latus rectum $=4c$, & ideò $4cx=yy$, erit $AQ=v=\frac{1}{2}y$, ex naturâ Tangentis Parabolæ, $\frac{1}{4}yy=cx=vv$, $cdx=2vdv$, $yy-vv=3cx$, $ydy=2cdx$, $dy^2=\frac{cdx^2}{x}$. Undè æquatio

LIBER SECUND. SECT. VII. PROP. XXXIV. THEOR. XXVIII.

(u) Quod si figura $DNFG$, ejusmodi sit curva, ut, si ab ejus puncto quovis N ad axem AB demittatur perpendiculum NM, & à puncto dato G ducatur recta GR quæ parallela sit rectæ figuram tangenti in N, & axem productum secet in R, fuerit MN ad GR ut GR *cub.* ad $4BR \times GBq$; solidum



quod figuræ hujus revolutione circa axem AB factâ describitur, in medio raro prædicto ab A versus B movendo, minus resistetur quam aliud quodvis eâdem longitudine & latitudine descriptum solidum circulare.

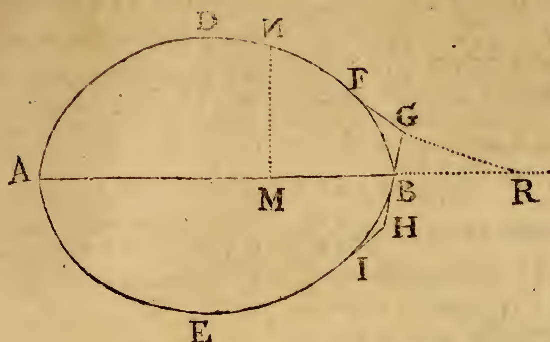
tio $ady^2 = zdx^2 + zdy^2$, in hanc mutatur $\frac{acdx^2}{x} = zdx^2 + \frac{czdx^2}{x}$, ex quâ habetur $z = \frac{ac}{c+x}$, & $dz = \frac{-acdx}{(c+x)^2}$. Ex his verò omnibus æquatio $(z-a)\, 2vdv = (yy-vv)\, dz$, in hanc migrat $-\frac{acxdx}{c+x} = -\frac{3accxdx}{(c+x)^2}$, sive $1 = \frac{3c}{c+x}$ ex quâ

eruitur $x = 2c$, & hinc $y = 2c\sqrt{2}$, & 202.
$z = \frac{1}{3}a$. Quarè cum sit a ad z, in ratione duplicatâ sinûs totius ad sinum anguli BQM, erit $\sqrt{3}$ ad 1 ut sinus totus ad sinum anguli BQM, qui proindè est 35° 16′, angulus QBR, 54°. 44′ & angulus BQA 125°. 46′.

(u) 203. *Quod si figura &c.* Invenienda

DE MOTU CORPORUM.

ſit curva L D, quæ circà axem C B rotata deſcribat ſuperficiem ſolidi quod in fluido motum ſecundùm axis directionem à C, verſus B, minorem patiatur reſiſtentiam quam ſolidum quodvis aliud per puncta L & D pari ratione deſcriptum & ſimiliter motum. Ex punctis curvæ infinitè propinquis N, n, Q, demittantur ad axem C B ordinatæ N M, n m, P Q & ad n m, Q P, perpendicula N r, n s. Sit p peripheria circuli cujus radius eſt unitas, & data a vim exponat quâ ſingulæ fluidi particulæ in rectam N M perpendiculariter incurrunt. His poſitis reſiſtentia annuli circularis quem recta n r, circà axem C B rotata deſcribit, exponi poteſt, ut ſuprà, per $\frac{1}{2}\, pa\, (\mathrm{nm}^2 - \mathrm{NM})^2$ ſeu per $pa\ \mathrm{NM} \times \mathrm{nr}$, ob $\mathrm{nm}^2 - \mathrm{NM}^2 = \mathrm{nm} + \mathrm{NM} \times \mathrm{nm} - \mathrm{NM} = 2\, \mathrm{MN} \times \mathrm{nr}$. Et quia nN^2 eſt ad nr^2 ut reſiſtentia illa ad reſiſtentiam ſuperficiei quam linea n N circà C B rotata deſcribit (196) hæc reſiſtentia erit ut $\frac{pa \times \mathrm{MN} \times \mathrm{nr}^3}{\mathrm{nN}^2}$; eodemque modo patet reſiſtentiam ſuperficiei ex rotatione lineæ Q n genitæ exponi poſſe per $\frac{pa \times \mathrm{mn} \times \mathrm{QS}^3}{\mathrm{Qn}^2}$. Fingatur curvam hanc in aliam mutari Q h N inter puncta N, Q ductam & Q S, n r tanquam magnitudine datas aſſumi variantibus N r, & n s, dicanturque conſtantes $\mathrm{MN} = b$, $\mathrm{mn} = c$, $\mathrm{nr} = f$, $\mathrm{Qs} = g$ & variabiles $\mathrm{Nn} = v$, $\mathrm{nQ} = z$, $\mathrm{Nr} = m$, $\mathrm{ns} = n$, & reſiſtentia ſuperficiei quam arculus Q n N circà C B rotando deſcribit, exponetur per $\frac{pabf^3}{vv} + \frac{pacg^3}{zz}$, ſi curva Q n N ſit ea quæ minimam reſiſtentiam patitur, hujus quantitatis fluxio (40 & per hyp.) nihilo æquanda eſt, & indè habetur $-\frac{2pabf^3 v\,dv}{v^4} - \frac{2pacg^3 z\,dz}{z^4} = 0$. Producta ergo lineâ s n, uſque ad novum punctum h, ad quod ducuntur lineæ N h, Q h, in has cadant perpendicula n e, n t, & evaneſcente n h, erit $\mathrm{th} = dz$ & $\mathrm{eh} = -dv$. Quia verò, evaneſcente n h triangula n e h, n r N, & n t h, Q s n, ſimilia ſunt; erit $\mathrm{Nn}\ (v) : \mathrm{Nr}\ (m) = \mathrm{nh} : \mathrm{eh}\ (-dv)$, &



& sn (nv) : Qn (z) = th (dz) : nh, ideòque ex æquo, $nv : mz = dz : -dv = \frac{mzdz}{nv}$. Loco $-dv$, scribatur hic ipsius valor in æquatione modò inventâ, & illa in hanc migrabit $\frac{2pabf^3mzvdz}{nv^5} = \frac{2pacg^3zdz}{z^4}$, & hinc fit $\frac{2pabf^3m}{v^4} = \frac{2pacg^3n}{z^4}$ seu $\frac{2pa \times MN \times nr^3 \times Nr}{Nn^4} = \frac{2pa \times mn \times Qs^3 \times ns}{Qn^4}$. Undè manifestum est quantitatem $\frac{MN \times nr^3 \times Nr}{Nn^4}$, pro quolibet curvæ puncto N, datam seu constantem esse.

* Quæ quidem curva DNFG (vide figuram textus) talis esse debet, ut angulus quem facit in G cum linea BG sit semirecti complementum per notam 200. illic ergo linea BG data, est ipsa ordinata MN & Triangulum nRN est Rectangulum æquicrurum ideoque $Nr = nr$ & $Nn^2 = 2nr^2$ ergo quantitas constans $\frac{MN \times nr^3 \times Nr}{Nn^4}$ in hanc abit $\frac{GB \times nr^4}{4nr^4} = \frac{GB}{4}$. Talis ergo est hujus curvæ natura ut quovis in puncto ducatur ordinata MN sit semper $\frac{MN \times nr^3 \times Nr}{Nn^4} = \frac{GB}{4}$, sive ponendo pro MN, y; pro nr, dy; pro Nr, dx; pro Nn^2, $dx^2 + dy^2$, erit $\frac{ydy^3dx}{dx^2+dy^2} = \frac{GB}{4}$: sive adhibendo constructionem Newtoni, si ducatur GR Tangenti Parallela, ob triangula GBR, nrN ubique similia, erit $\frac{GB}{GR} = \frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$ & $\frac{BR}{GR} = \frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$ ideoque $\frac{GB^3 \times BR}{GR^4} = \frac{dy^3dx}{dx^2+dy^2}$ & $\frac{MN \times GB^3 \times BR}{GR^4} = \frac{GB}{4}$ sive $MN \times GB^2 \times 4BR = GR^4$ unde est $MN : GR = GR^3 : GB^2 \times 4BR$. Q. E. D. 203.

Dicatur $GB = a$, fiet $\frac{y^3dy^3dx}{(dx^2+dy)^2} = \frac{a}{4}$ ideoque $4ydxdy^3 = a(dx^2+dy)^2$, ex quâ curvæ LND per Logarithmicam constructio eruitur. Ponatur $dx = \frac{zdy}{a}$, & hoc valore loco dx in æquatione ad curvam substituto, habetur $\frac{4yzdy^4}{a} = \frac{a(zz+aa)^2dy^4}{a^4}$, undè invenitur $y = \frac{(zz+aa)^2}{4a^2z} = \frac{z^3}{4aa} + \frac{1}{2}z + \frac{aa}{4z}$, & (sumptis fluxionibus) $dy = \frac{3z^2dz}{4aa} + \frac{1}{2}dz - \frac{aadz}{4zz}$; loco dy scribatur hic ipsius valor in æquatione assumptâ $dx = \frac{zdy}{a}$, & fit

fit $dx = \frac{3z^3dz}{4a^3} + \frac{zdz}{2a} - \frac{adz}{4z}$, sumptisque fluentibus $x = \frac{3z^4}{16a^3} + \frac{zz}{4a} - \frac{1}{4}aL.z$ $+ Q$ *const.* Porrò si assumatur abscissæ initium in loco B, ubi ordinata BL est omnium minima, id est (40) ubi $dy = 0$ quo supposito, fit $\frac{3z^2dz}{4aa} + \frac{1}{2}dz - \frac{aadz}{4zz} = 0$, ideoque $3z^2 + 2aa = \frac{a^4}{z^2}$ & $z^4 + \frac{2}{3}a^2z^2 = \frac{1}{3}a^4$ undè habetur $z = a\sqrt{\frac{1}{3}}$ (& $y = \frac{4}{3}a\sqrt{\frac{1}{3}}$), substituto hoc valore loco z, in æquatione quæ dat abscissæ x valorem, habebitur ex Hypothesi initium axeos eritque $x = 0 = \frac{5a}{48} - \frac{1}{4}aL.a\sqrt{\frac{1}{3}}$ $+ Q$ *const.* & ideo $Q = -\frac{5a}{48} + \frac{1}{4}aL.a\sqrt{\frac{1}{3}}$.

* Erit igitur abscissa $x = \frac{3z^4}{16a^3} + \frac{zz}{4a} - \frac{5a}{48} - \frac{1}{4}a \times \overline{L.z - L.a\sqrt{\frac{1}{3}}}$ & ut habeatur origo abscissarum, notandum quod ordinata in B sive GB æqualis sit a, ex suprà demonstratis, cum itaque sit ubique $y = \frac{(zz + aa)^2}{4a^2z}$ erit in eo puncto $a = \frac{(zz + aa)^2}{4a^2z}$ ex quâ æquatione si eruatur valor z invenietur $z = a$, ac per consequens erit $x = \frac{3a^4}{16a^3} + \frac{aa}{4a} - \frac{5a}{48} - \frac{1}{4}aL.\frac{a}{a\sqrt{\frac{1}{3}}} = \frac{a}{3} - \frac{1}{4}aL.\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{3}}} = \frac{a}{3} - \frac{1}{4}a \times L.\sqrt{3}$. Describatur ergo Logarithmica XV, Asymptoto YZ & subtangente æquali $\frac{1}{4}$GB, sive $\frac{1}{4}a$, in quâ sumatur ubivis ordinata pm, quæ producatur in r donec pr $= 3$ pm, ducatur ad Logarithmicam rt quæ sit Asymptoto parallela, erit $\frac{1}{2}$ rt æqualis Logarithmo $\sqrt{3}$ in Logarithmica cujus subtangens $\frac{1}{4}a$, itaque $\frac{GB}{3} - \frac{1}{2}$rt $= x$, quo valore translato ex B ad A in axe producto habetur A origo abscissarum: In eo puncto A ductâ perpendiculari ALg, describatur Logarithmicâ SX cujus ea linea ALg sit Asymptotus, & $\frac{1}{4}$GB sive $\frac{1}{4}a$ subtangens, & quæ producto axe in E ut sit $AE = a\sqrt{\frac{1}{3}}$ transeat per punctum E & sumptâ AR magnitudinis arbitriæ pro z, ductâque RS parallelâ BL Logarithmicæ occurrente in S capiatur abscissa AM, seu $x = \frac{3z^4}{16a^3} + \frac{zz}{4a} - \frac{5a}{48} \mp$ RS nimirum $-$RS, cum est AR $>$ AE, & $+$RS ubi AR $<$ AE; ac denique capiatur ordinata MN, seu $y = \frac{(zz + aa)^2}{4aaz}$; punctum N erit in curvâ quæsitâ LD. Quod ut pateat, demonstrandum superest, esse $\mp RS = -\frac{1}{4}a\overline{L.z - L.a\sqrt{\frac{1}{3}}}$. Hoc autem manifestum est; nam RS, est differentia logarithmorum correspondentium quantitatibus AR & AE, (sive z & $a\sqrt{\frac{1}{3}}$) sumptorum in Logisticâ cujus subtangens est $\frac{1}{4}a$, & hæc differentia positiva est, ubi AR $(z) >$ AE $(a\sqrt{\frac{1}{3}})$ negativa ubi AR $(z) <$ AE $(a\sqrt{\frac{1}{3}})$, & nulla, cum sit AR $=$ AE, seu $z = a\sqrt{\frac{1}{3}}$, ut oportet. Quarè cum AR superat AE, est $-RS = -\frac{1}{4}a \times \overline{Lz - L.a\sqrt{\frac{1}{3}}}$ & ubi AE superat AR, fit $+RS = -\frac{1}{4}a\overline{L.z - La\sqrt{\frac{1}{3}}}$. Est igitur semper $\mp RS = -\frac{1}{4}a\overline{Lz - La\sqrt{\frac{1}{3}}}$.

204. Datâ minimâ ordinatâ AL, curva LND, describi potest. Nam cum sit (ex dem.) $AL = \frac{4}{3}a\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3}AE$, & GB sive $Ag = a$, datâ AL dantur Ag, AE, & subtangens Logarithmicæ quæ proindè poterit describi.

205. Datis duabus ordinatis MN & CD magnitudine, curva describi potest. Si enim in æquatione $y = \frac{(zz + aa)^2}{4aaz}$ loco y scribantur seorsim datæ MN, & CD dabuntur z & a undè dabitur minima ordinata $AL = \frac{4}{3}a\sqrt{\frac{1}{3}}$.

206. Datâ ordinatâ quâlibet CD cum abscissâ correspondente CA, curva describi potest. Si enim in æquatione $y = (zz$

$\frac{(zz+aa)^2}{4aaz}$, loco y ſcribatur data CD, habebitur z per a & datas quantitates; deinde ſi in æquatione alterâ $x = \frac{3z^4}{16a^3} + \frac{zz}{4a} - \frac{5a}{48} - \frac{1}{4}a\,L.z - La\sqrt{\frac{1}{3}}$, loco x ſubſtituatur data CA & loco z, ejus valor per a & datas inventus, dabitur æquatio inter a & datas quantitates, & ex hâc æquatione invenietur linea a, quâ datâ, datur ordinata minima AL.

207. Recta gR, parallela eſt tangenti per punctum N ductæ. Eſt enim (per conſtr.) $dx = \frac{z\,dy}{a}$, ideoque nr (dy) : rN (dx) = gA (a) : AR (z) ex quâ proportione & propter angulum rectum in r, & in A, patet triangula nrN, gAR, ſimilia eſſe, & propterea gR parallelam nN, ſeu tangenti per N ductæ. Hinc cum AE ſit æqualis $a\sqrt{\frac{1}{3}} = z$ ubi $z = 0$ (103) erit gE tangenti per L ductæ parallela, ſitque Ag $= a$ eſt $gE^2 = \frac{a^2}{3} + a^2 = \frac{4a^2}{3}$ atque adeo $gE = 2a\sqrt{\frac{1}{3}} = 2AE$ erit gE ad AE ut 2, ad 1, & ità ſinus totus ad ſinum anguli AgE, ſive ad ſinum anguli quem curva conſtituit cum minimâ ordinatâ AL, qui proinde eſt 30°. 207.

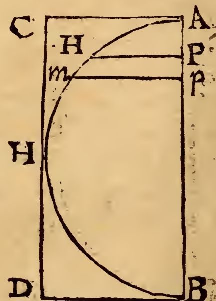
208. Quoniam AR, in infinitum creſcere ac decreſcere poteſt ſi capiatur ſemper AR > BE, deſcribetur curvæ ramus LND, qui concavitatem axi BC obvertit, & ab utroque axe AC, Ag, in infinitum recedit; at ſi ſemper ſumatur BR < BE, deſcribetur alter curvæ ramus LO,

DE MOTU CORPORUM.

qui priori LD convexitatem offert, & ab utroque axe BC, BG, in infinitum abscedit; curva igitur DLO punctum regressûs habet in L, & solidum minimæ resistentiæ ex ejus circà axem AC revolutione genitum, convexum vel concavum, & partim convexum, partim concavum esse potest.

209. Quoniam $dx = \frac{zdy}{a}$, erit areæ curvæ elementum $ydx = \frac{zydy}{a}$, elementum arcus curvæ $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{dy\sqrt{aa+zz}}{a}$, elementum superficiei à curvâ circà axem AC rotatâ genitæ $= \frac{2pydy\sqrt{aa+zz}}{a}$ (si p sit semiperipheria circuli cujus radius est unitas); elementum solidi in eâdem revolutione descripti $= \frac{pzy^2dy}{a}$; & resistentia superficiei $\frac{2pydy\sqrt{aa+zz}}{a}$, erit $\frac{ady^2}{dx^2+dy^2}ydy = \frac{ady^2}{dy^2 \times aa+zz}ydy$, sive ut $\frac{ydy}{aa+zz}$. Porrò si in his fluxionibus loco y, & dy, substituantur ipsarum valores qui ex æquationibus $y = \frac{(zz+aa)^2}{4aaz}$, & $dy = \frac{3z^2dz}{4aa} + \frac{1}{2}dz - \frac{aadz}{4zz}$ habentur, fluens $S.ydx$, seu area curvæ inveniri poterit algebraicè, aliæ verò fluentes ab hyperbolæ quadraturâ pendent.

Schol. Quæ ad solidum minimæ resistentiæ spectant, ea ferè omnia mutuati sumus ex Illmo. Marchione Hospitalio, tum in act. Lipsiens. an. 1699, tum in monum. Paris. ejusdem anni. De eodem solido plurima etiam dederunt celeb. viri Joh. Bernoull. in act. Lips. an. 1699. 1700. Hermannus in Phoronomiâ, & Facio ad calcem libri de murorum inclinatione &c. Sed qui totam hanc Newtoni propositionem maximâ universalitate pertractatam habere volunt, legant tractatum a Clariss. Bouguero editum, & ab Academiâ Regiâ Parisiensi an. 1727. præmio condecoratum, cui titulus; *De la mâture des Vaisseaux*, nec non monum. Paris. an 1733. in quibus elegantissima & universalissima legitur ultimæ Scholii Newtoniani partis solutio. Rem a clariss. autore demonstratam hic observatu dignissimam judicamus, videlicet, solidum rotundum cujus constructionem modò dedimus, in quâlibet hujus solidi directione & juxtà quamlibet fluidi impulsionem, minimam omnium pati resistentiam, exceptis quibusdam casibus qui in navigationis praxi vix unquam occurrunt, cum scilicet directio solidi majores angulos cum axe constituit; & quod mirum est, in his casibus, solidum illud quod erat minimæ resistentiæ & navigationi aptissimum, solidum maximæ resistentiæ & ad usum navigationis omnium minime idoneum evadit. Quæ verò ad universalem solidorum in fluidis resistentiam pertinent, peti possunt ex aureo Joh. Bernoullii libello qui in scribitur: *Essai d'une nouvelle Theorie de la manœuvre des Vaisseaux*. & ex *Hermanni Phoronomiâ*.



210. Lemma. *Sphæra est ad cylindrum circumscriptum ut duo ad tria.* Sphæra generatur per revolutionem semicirculi AHB circà diametrum AB, & cylindrus sphæræ circumscriptus per revolutionem rectanguli ACBD, cujus latera AC, BD circuli radio sunt æqualia. Ductis ordinatis infinitè propinquis PM, pm, dicantur AC $= r$, semiperipheria AHB $= p$, AP $= x$, Pp $= dx$, & quia circulorum areæ sunt in ratione duplicatâ radiorum, erit quadratum radii CA, seu rr, ad aream circuli AHB, nempè rp, ut MP², seu $2rx - xx$ ad aream circuli radio PM descripti, quæ ideò erit $2px - \frac{pxx}{r}$; & hinc

so-

PROPOSITIO XXXV. PROBLEMA VII.

Si medium rarum ex particulis quam minimis quiescentibus æqualibus & ad æquales ab invicem distantias liberè dispositis constet: invenire resistentiam globi in hoc medio uniformiter progredientis.

Cas. 1. Cylindrus eâdem diametro & altitudine descriptus progredi intelligatur eâdem velocitate secundum longitudinem axis sui in eodem medio. Et ponamus quod particulæ medii, in quas globus vel cylindrus incidit, vi reflexionis quam maximâ resiliant. Et cum resistentia globi (per propositionem novissimam) sit duplo minor quam resistentia cylindri, & globus sit ad cylindrum ut duo ad tria, & cylindrus incidendo perpendiculariter in particulas, ipsasque quam maximè reflectendo, (x) duplam sui ipsius velocitatem ipsis communicet: cylindrus, quo tempore dimidiam longitudinem axis sui uniformiter progrediendo describit, communicabit motum particulis, (y) qui sit ad totum cylindri motum ut densitas medii ad densitatem cylindri; & globus, quo tempore totam longitudinem diametri suæ uniformi-

solidum ex rotatione elementi P M m p, circà A B genitum, erit $2pxdx - \frac{pxxdx}{r}$, sumptisque fluentibus, solidum ex rotatione segmenti circularis A M P ortum, erit $pxx - \frac{px^3}{3r}$, & factâ A P = A B, seu $x = 2r$, sphæra tota habetur $= 4prr - \frac{8}{3}prr = \frac{4}{3}prr$. Sed cylindrus sphæræ circumscriptus est factum ex areâ circuli radio A C descripti in cylindri altitudinem AB, seu est $2prr$. Quarè sphæra est ad cylindrum circumscriptum ut $\frac{4}{3}prr$ ad $2prr$, id est, ut 4 ad 6, sivè ut 2 ad 3. Q. E. D.

(x) * *Duplam sui ipsius velocitatem* &c. Cum singulæ particulæ, cylindri respectu, minimæ sint, si nulla esset particularum medii reflexio, eâdem cum cylindro velocitate moverentur; ac accedente vi reflexionis perfectâ, velocitas illa duplicatur (53. lib. 1.). 210.

(y) * *Qui sit ad totum cylindri motum* &c. Quantitates motûs sunt ut velocitates & massæ conjunctim; massæ verò sunt ut volumina & densitates; ideòque quantitates motûs ut velocitates & volumina & densitates conjunctim. Cum igitur cylindrus quo tempore dimidiam longitudinem axis sui uniformiter progrediendo describit, medii volumen dimidio volumini cylindri æquale duplâ cum velocitate moveat, sitque proindè factum ex volumine cylindri in ipsius velocitatem æquale facto ex volumine medii moto in ejus velocitatem, motus particulis medii communicatus, erit ad totum cylindri motum ut densitas medii ad densitatem cylindri.

miter progrediendo describit, (z) communicabit motum eundem particulis; (a) & quo tempore duas tertias partes diametri suæ describit, communicabit motum particulis, qui sit ad totum globi motum ut densitas medii ad densitatem globi. Et propterea globus resistentiam patitur, quæ sit ad vim quâ totus ejus motus vel auferri possit vel generari quo tempore duas tertias partes diametri suæ uniformiter progrediendo describit, ut densitas medii ad densitatem globi.

Cas. 2. Ponamus quod particulæ medii in globum vel cylindrum incidentes non reflectantur; & cylindrus incidendo perpendiculariter in particulas simplicem suam velocitatem ipsis communicabit, ideoque resistentiam patitur duplo minorem quàm in priore casu, & resistentia globi erit etiam duplo minor quàm prius.

Cas. 3. Ponamus quod particulæ medii vi reflexionis neque maximâ neque nullâ, sed mediocri aliquâ resiliant à globo; & resistentia globi erit in eâdem ratione mediocri inter resistentiam in primo casu & resistentiam in secundo. *Q. E. I.*

Corol. 1. Hinc si globus & particulæ sint infinite dura, & vi omni elasticâ, & propterea etiam vi omni reflexionis destituta: resistentia globi erit ad vim quâ totus ejus motus vel auferri possit vel generari, quo tempore globus quatuor tertias partes diametri suæ describit, ut densitas medii ad densitatem globi.

Co-

(z) * *Communicabit motum eundem particulis*, ob resistentiam globi resistentiâ cylindri duplo minorem. (prop. 34. lib. 2.).

(a) *Et quo tempore duas tertias partes &c.* * Huc redit compositio rationum à Newtono indicata: Totus Globi motus est ad Cylindri motum, ut 2 ad 3 hæc enim est utriusque massæ ratio; Totus Cylindri motus est ad motum à cylindro communicatum quo tempore dimidiam suam longitudinem describit ut densitas Cylindri (sive Globi) ad densitatem medii, motus ille à cylindro communicatus idem est cum motu à Globo communicato dum totam suam Diametrum percurrit; Denique motus ille à Globo communicatus dum totam suam Diametrum percurrit est ad motum ab eo Globo communicatum dum percurrit duas Diametri suæ tertias partes ut 3 ad 2, Ideoque totus Globi motus est ad motum ab eo communicatum dum percurrit duas Diametri suæ partes conjunctim ut 2 ad 3, ut densitas Globi ad densitatem medii, & ut 3 ad 2, sive primâ ratione & hâc ultimâ sese compensantibus ut densitas Globi ad densitatem medii. Q. E. D.

(b) *Corol.* 2. Resistentia globi, cæteris paribus, est in duplicatâ ratione velocitatis. LIBER SECUND. SECT. VII. PROP. XXXV. PROP. VII.

Corol. 3. Resistentia globi, cæteris paribus, est in duplicatâ ratione diametri.

Corol. 4. Resistentia globi, cæteris paribus, est ut densitas medii.

Corol. 5. Resistentia globi est in ratione quæ componitur ex duplicatâ ratione velocitatis & duplicatâ ratione diametri & ratione densitatis medii.

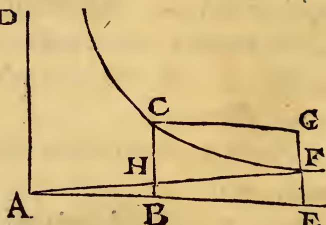
Corol. 6. Et motus globi cum ejus resistentia sic exponi potest. Sit *AB* tempus quo globus per resistentiam suam uniformiter continuatam totum suum motum amittere potest. Ad

A B

(b) * *Resistentia globi cæteris paribus est in duplicatâ ratione velocitatis.* * Sint globi æquales in eodem medio moti diversâ cum velocitate; motus totus uniuscujusque est ad motum ab ipso communicatum tempore quo duas tertias suæ Diametri percurrit, ut Densitates globorum ad densitates mediorum, ideoque ex hypothesi in eadem ratione, ergo etiam velocitas unius est ad velocitatem alterius ut motus ab illis communicati temporibus quibus duas tertias suarum Diametrorum (æquales quippe longitudines) percurrunt. Dividantur illa tempora in partes minimas utrinque æquales, & quia Resistentia singulis momentis, ejusdem Globi respectu, uniformis censetur, Resistentiæ momentaneæ erunt directè ut motus amissi & inversè ut tempora quibus amittuntur, sed motus amissi sunt ut velocitates directè & tempora sunt inversè ut velocitates, quia æquales longitudines percurruntur motibus qui uniformes, saltem quam proximè, censentur, ergo resistentiæ momentaneæ sunt bis ut velocitates, hoc est in ratione duplicatâ velocitatis.

(†) * *Resistentia globi cæteris paribus est in duplicatâ ratione Diametri.* * Sint globi æquiveloces, æque densi, in eodem medio moti, sed diversæ sint earum Diametri, fingantur duo Cylindri ejusdem cum iis Diametri, & etiam æquiveloces & æque densi, resistentiæ quas patientur Cylindri singulis momentis erunt ut numerus partium in quas incurrunt, illi verò numeri partium sunt ut Quadrata Diametrorum: Sed facile liquet resistentias Cylindrorum & globorum æquivelocium, ejusdem Diametri, in eodem medio esse in datâ ratione, ergo ut resistentia unius Cylindri ad resistentiam alterius, ita resistentia unius Globi ad resistentiam alterius, sunt ergo Globorum resistentiæ ut Quadrata Diametrorum.

DE MOTU CORPORUM.



AB erigantur perpendicula *AD*, *BC*. Sitque *BC* motus ille totus, & per punctum *C* aſymptotis *AD*, *AB* deſcribatur hyperbola *CF*. Producatur *AB* ad punctum quodvis *E*. Erigatur perpendiculum *EF* hyperbolæ occurrens in *F*. Compleatur parallelogrammum *CBEG*, & agatur *AF* ipſi *BC* occurrens in *H*. Et ſi globus tempore quovis *BE*, motu ſuo primo *BC* uniformiter continuato, in medio non reſiſtente deſcribat ſpatium *CBEG* per aream parallelogrammi expoſitum, idem in medio reſiſtente deſcribet ſpatium *CBEF* per aream hyperbolæ expoſitum, & motus ejus in fine temporis illius exponetur per hyperbolæ ordinatam *EF*, amiſsâ motus ejus parte *FG*. (c) Et reſiſtentia ejus in fine temporis ejuſdem exponetur per longitudinem *BH*, amiſsâ reſiſtentiæ parte *CH*. * Patent hæc omnia per corol. 1. & 3. prop. v. lib. II.

Corol. 7. Hinc ſi globus tempore T per reſiſtentiam R uniformiter continuatam amittat motum ſuum totum M: idem globus tempore *t* in medio reſiſtente per reſiſtentiam R in duplicatâ velocitatis ratione decreſcentem, (d) amittet motus ſui M partem $\frac{tM}{T+t}$, manente parte $\frac{TM}{T+t}$; & deſcribet ſpatium quod ſit ad ſpatium motu uniformi M eodem tempore *t* deſcrip-

(c) *Et reſiſtentia ejus in fine &c.* Reſiſtentia ſub initio ubi velocitas eſt BC, exponatur per eandem lineam BC, & quia reſiſtentiæ ſunt ut velocitatum quadrata, atque BC ad FE, ut velocitas ſub initio ad velocitatem in fine temporis BE reſiduam (cor. 1. prop. 5. lib. 2.) erit BC^2 ad FE^2 ut BC ad lineam quæ reſiſtentiam exponit in fine temporis BE, ideòque linea hæc $= \frac{FE^2}{BC}$. Sed (per theor. 4. de hyp.) & ob ſimilitudinem triangulorum ABH, AEF, eſt BC : FE = AE : AB = FE : HB, & hinc HB $= \frac{FE^2}{BC}$. Quarè recta HB exponet reſiſtentiam in fine temporis BE, & proindè recta CH partem amiſſam reſiſtentiæ illius quæ ſub initio exponebatur per lineam BC.

(d) * *Amittet motûs ſui partem &c.* Pars motûs *M* in fine temporis *t* reſidua dicatur *m*, & quia (ex dem.) $T : t = AB : BE$, & hinc $T + t : T = AE : AB$, & prætereà $M : m = CB : FE = AE : AB$; erit $T + t : T = M : m$, unde habetur $m = \frac{MT}{T+t}$, & inde motûs *M* pars amiſſa eſt $M - \frac{MT}{T+t} = \frac{tM}{T+t}$.

ſcriptum, ut logarithmus numeri $\frac{T+t}{T}$ multiplicatus per numerum 2, 302585092994 eſt ad numerum $\frac{t}{T}$, (e) propterea quod area hyperbolica *B C F E* eſt ad rectangulum *B C G E* in hâc proportione.

Scholium.

In hâc propoſitione expoſui reſiſtentiam & retardationem projectilium ſphæricorum in mediis non continuis, & oſtendi quod hæc reſiſtentia ſit ad vim quâ totus globi motus vel tolli poſſit vel generari quo tempore globus duas tertias diametri ſuæ partes velocitate uniformiter continuatâ deſcribat, ut denſitas medii

(e) * *Propterea quod area hyperbolica.* Dicantur AB $= a$, BC $= b$, BE $= x$, AE $= a + x$; & quia (theor. 4. de hyp.) FE $= \frac{ab}{a+x}$, elementum areæ CFEB, erit $\frac{abdx}{a+x}$, & area ipſa CFEB $= ab\,S.\frac{dx}{a+x}$, quæ fluens ità ſumenda eſt ut evaneſcat ubi ſit $x = 0$, ſed fluens S. $\frac{dx}{a+x}$ ità ſumpta eſt logarithmus numeri $\frac{a+x}{a}$, deſumptus ex logiſticâ cujus ſubtangens eſt unitas, aut quod idem eſt, ex hyperbolâ cujus dignitas unitati æqualis eſt (382. lib. 1. & 40. lib. 2.); Si enim ponatur $x = 0$, numerus $\frac{a+x}{a}$, evadit $= 1$, & ideò L. $\frac{a+x}{a} = 0$. Quarè area B C F E $= ab$ L. $\frac{a+x}{a}$; rectangulum verò BCGE $= bx$. Eſt ergò area hyperbolica BCFE ad rectangulum BCGE, ut ab L. $\frac{a+x}{a}$ ad bx, hoc eſt, dividendo per ab, ut L. $\frac{a+x}{a}$ ad $\frac{x}{a}$. Verum (ex dem. & hyp.) $\frac{a+x}{a} = \frac{T+t}{T}$, & $\frac{x}{a} = \frac{t}{T}$; Quare area Hyperbolica BCFE, eſt ad rectangulum BCGE, ut L $\frac{T+t}{T}$ ad $\frac{t}{T}$. Supereſt igitur inveniendus logarithmus numeri $\frac{T+t}{T}$, per logarithmicam cujus ſubtangens eſt unitas. Porrò ejuſdem numeri logarithmi diverſæ ſpeciei ſunt inter ſe in datâ ratione (38) & numerus 2, 302585092994 eſt logarithmus numeri denarii ſumptus in logarithmicâ cujus ſubtangens eſt unitas, & ejuſdem numeri denarii logarithmus in tabulis ſumptus eſt 1, 0000000 $= 1$; Quarè ut 1, ad 2, 302585092994, ità logarithmus numeri $\frac{T+t}{T}$ in tabulis ſumptus ad logarithmum ejuſdem numeri ſumptum in logarithmicâ cujus ſubtangens eſt unitas, vel in Hyperbolâ cujus dignitas eſt 1; habetur ergò logarithmus quæſitus, ſi logarithmus numeri $\frac{T+t}{T}$ ex tabulis ſumptus multiplicetur per numerum 2, 302585092994. 210.

medii ad densitatem globi, si modo globus & particulæ medii sint summè elastica & vi maximâ reflectendi polleant: quodque hæc vis sit duplo minor ubi globus & particulæ medii sunt infinitè dura & vi reflectendi prorsus destituta. In mediis autem continuis qualia sunt aqua, oleum calidum, & argentum vivum, in quibus globus non incidit immediatè in omnes fluidi particulas resistentiam generantes, sed premit tantum proximas particulas & hæ premunt alias & hæ alias, resistentia est adhuc duplò minor. Globus utique in hujusmodi mediis fluidissimis resistentiam patitur quæ est ad vim quâ totus ejus motus vel tolli possit vel generari quo tempore, motu illo uniformiter continuato, partes octo tertias diametri suæ describat, ut densitas medii ad densitatem globi. Id quod in sequentibus conabimur ostendere.

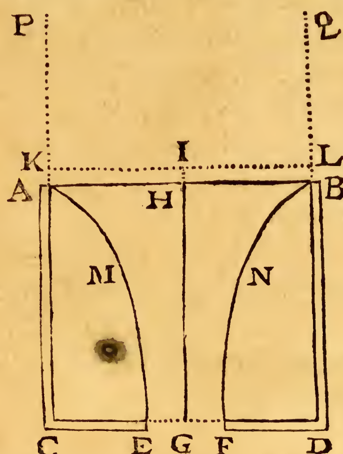
PROPOSITIO XXXVI. PROBLEMA VIII.

Aquæ de vase cylindrico per foramen in fundo factum effluentis definire motum.

SIt *ACDB* vas cylindricum, *AB* ejus orificium superius, *CD* fundum horizonti parallelum, *EF* foramen circulare in medio fundi, *G* centrum foraminis, & *GH* axis cylindri horizonti perpendicularis. Et finge cylindrum glaciei *APQB* ejusdem esse latitudinis cum cavitate vasis, & axem eundem habere, & uniformi cum motu perpetuo descendere, & partes ejus quam primum attingunt superficiem *AB* liquescere, & in aquam conversas gravitate suâ defluere in vas; & cataractam vel columnam aquæ *ABNFEM* cadendo formare, & per foramen *EF* transire, idemque adæquatè implere. Ea verò sit uniformis velocitas glaciei descendentis ut & aquæ contiguæ in circulo *AB*, quam aqua cadendo (f) & casu suo describendo altitudinem *IH* acqui-

(f) * *Et casu suo describendo altitudinem IH.* Hâc igitur Hypothesi idem præstatur ac si in loco A B nova superficies aquæ continuò crearetur, cum motu initiali qualem cadendo ex altitudine I H singula ejus superficiei particula acquirere potuisset, & deinde particulæ aquæ e loco A B vi propriæ gravitatis cadendo sese mutuò attrahe-

quirere poteſt; & jaceant *IH* & *HG* in directum, & per punctum *I* ducatur recta *KL* horizonti parallela & lateribus glaciei occurrens in *K* & *L*. Et velocitas aquæ effluentis per foramen *EF* (g) ea erit quam aqua cadendo ab *I* & caſu ſuo deſcribendo altitudinem *IG* acquirere poteſt. (h) Ideoque per theoremata *Galilæi* erit *IG* ad *IH* in duplicatâ ratione velocitatis aquæ per foramen effluentis ad velocitatem aquæ in circulo *AB*, hoc eſt, in duplicatâ ratione circuli *AB* ad circulum *EF*; (i) nam hi circuli ſunt reciprocè ut velocitates aquarum quæ per ipſos eodem tempore & æquali quantitate, adæquatè tranſeunt. De velocitate aquæ horizontem verſus hic agitur. Et motus horizonti parallelus quo partes aquæ cadentis ad invicem accedunt, cum non oriatur à gravitate, nec motum horizonti perpendicularem à gravitate oriundum mutet, hic non conſideratur. Supponimus quidem quod partes aquæ aliquantulum cohærent, & per cohæſionem ſuam inter cadendum accedant ad invicem per motus horizonti parallelos, ut unicam tantum efforment cataractam & non in plures cataractas dividantur; ſed motum horizon-



herent horizontaliter ad cataractam vel columnam A B N F E M formandam.

(g) * *Ea erit quam aqua* (per hyp.).

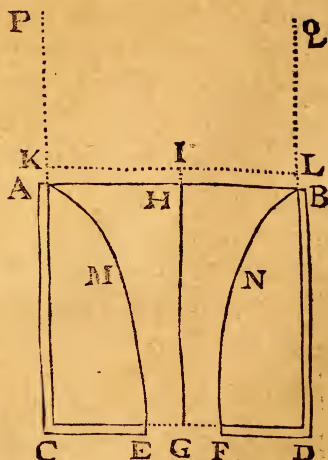
(h) * *Ideoque per theoremata Galilæi.* 28. lib. 1.

(i) 271. *Nam hi circuli* &c. Quoniam aqua per totam cataractam ABNFEM, eodem ſemper tenore fluere ſupponitur, neceſſe eſt ut eadem aquæ quantitas per ſingulas cataractæ ſectiones axi IG perpendiculares, ſeu per ſingulos circulos A B, M N, E F horizonti parallelos eodem tempore tranſeat. Nam ſi dato tempore major vel minor aquæ copia per circulum A B quam per circulum M N tranſiret, 271. aqua inter illos circulos vel intumeſceret vel decreſceret, & cataractæ figuram mutaret (contrà Hyp.). Quantitas aquæ per circulum quemlibet M N, dato tempore fluentis æquatur cylindro aqueo, cujus baſis eſt circulus M N, & altitudo eſt æqualis longitudini quam ſuperficies aquæ M N, cum velocitate acquiſitâ uniformiter progrediendo eodem tempore dato deſcriberet; & longitudo illa eſt ut aquæ per circulum M N fluentis velocitas (5. lib. 1.) & ideo quantitas aquæ per

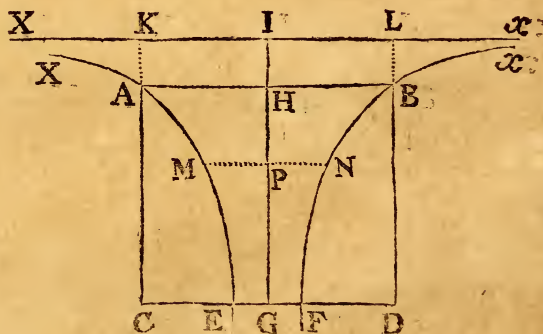
DE MOTU CORPORUM.

rizonti parallelum, à cohæſione illâ oriundum, hic non conſideramus.

Caſ. 1. Concipe jam cavitatem totam in vaſe, in circuitu aquæ cadentis *ABNFEM*, glacie plenam eſſe, ut aqua per glaciem tanquam per infundibulum tranſeat. Et ſi aqua glaciem tantùm non tangat, vel, quod perinde eſt, ſi tangat & per glaciem propter ſummam ejus polituram quam liberrimè & ſine omni reſiſtentiâ labatur; hæc defluet per foramen *EF* eâdem velocitate ac



per circulum MN dato tempore fluentis, eſt ut circulus MN & velocitas conjunctim. Quare cum data ſit quantitas aquæ per ſingulos circulos dato tempore tranſeuntis, circulus MN eſt reciprocè ut velocitas aquæ quæ per ipſum tranſit. Q. E. D.



272. His ità conſtitutis, facile eſt cataractæ figuram geometricè definire. Secet MN axem IG in P; & quia altitudo IP eſt in duplicatâ ratione velocitatis aquæ in P, hæc vero velocitas eſt inverſe ut circulus MN, & denique circulus MN eſt in ratione duplicatâ radii MP, eſt ideo IP ſeu abſciſſa in ratione quadruplicatâ inverſa radii ſeu ordinatæ MP, ſive IP ut $\frac{1}{MP^4}$, & ideo $MP^4 \times IP$, quantitas data. Eſt igitur curva EMA, Hyperbola quarti gradûs, aſymptotos habens IG, IK, quibus convexitatem obvertit. Producantur arcus EMA; & aſymptotus IK ad

ac prius, (k) & pondus totum columnæ aquæ *ABNFEM* impendetur in defluxum ejus generandum uti prius, & fundum vafis fuftinebit pondus glaciei columnam ambientis.

Liquefcat jam glacies in vafe; & effluxus aquæ, quoad velocitatem, idem manebit ac prius. (l) Non minor erit, quia glacies in aquam refoluta conabitur defcendere: non major, quia glacies in aquam refoluta non poteft defcendere nifi impediendo defcenfum aquæ alterius defcenfui fuo æqualem. Eadem vis eandem aquæ effluentis velocitatem generare debet.

Sed foramen in fundo vafis, propter obliquos motus particularum aquæ effluentis, paulo majus effe debet quam prius. Nam

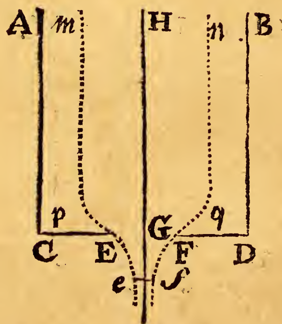
ad partes X in infinitum, & figura EAXXIG circà afymptotum feu axem IG, rotata cataractam defcribet in infinitum ad partes X, x, productam; figura verò EMAHG, hanc cataractæ partem quæ intra vas ABDC, continetur generabit.

273. Tota cataracta EAXxBF, æquatur cylindro cujus bafis eft circulus EF, & altitudo 2 IG. Sint enim altitudo IG $=x$, ordinata EG$=y$, a linea data, & (272) $x=\frac{a^5}{y^4}$, ideoque $y^4=a^5$ æquatio ad Hyperbolam EMAX. Et fi femiperipheria circuli cujus radius eft unitas, dicatur p erit circuli EF area $=pyy$, & cylindrus $EG\times 2IG=2pyyx=\frac{2pa^5}{yy}$. Cum verò fit $x=\frac{a^5}{y^4}$, ac proindè $dx=-\frac{4a^5dy}{y^5}$, cataractæ elementum $pyydx=-\frac{4pa^5dy}{y^3}=-4pa^5y^{-3}dy$, & fumptis fluentibus, tota cataracta ad afymptotum ufque Xx producta, erit $=\frac{2pa^5}{yy}=2EF\times IG$. Q. E. D.

(k) 274. *Et pondus totum &c.* Pondus quidem totum columnæ aquæ ABNFEM in defluxum ejus generandum impenditur; attamen totum aquæ motum non generat, cum motûs illius pars pendeat à motu fuperficiei A B, quæ (per hyp.) eam habet velocitatem quam aqua cadendo & cafu fuo defcribendo altitudinem IH acquirere poteft. Sed totum aquæ defluxum mathematicè confiderare poffumus tanquam genitum pondere aquæ totius, quæ in cataractâ EAXxBF, ufque ad afymptotum Xx producta continetur quæque æqualis eft cylindro aqueo bafi EF & altitudine 2IG, defcripto (273). 274.

(l) * *Non minor erit quia glacies in aquam refoluta conabitur defcendere*, atquè ità aquæ defcenfum accelerare; *non tamen major erit, quia glacies in aquam refoluta*, ob reactionem actioni æqualem & contrariam, *non poteft defcendere, nifi impediendo defcenfum aquæ alterius defcenfui fuo æqualem.* Idem igitur manet in aquâ totâ ad defcendendum & per foramen EF effluendum conatus. At *eadem vis eandem aquæ effluentis velocitatem generare debet.*

DE MOTU CORPORUM. (m) Nam particulæ aquæ jam non transſeunt omnes per foramen perpendiculariter; ſed à lateribus vaſis undique confluentes & in foramen convergentes, obliquis transſeunt motibus; & curſum ſuum deorſum flectentes in venam aquæ exilientis conſpirant, quæ exilior eſt paulo infra foramen quam in ipſo foramine, exiſtente ejus diametro ad diametrum foraminis ut 5 ad 6, vel $5\frac{1}{2}$ ad $6\frac{1}{2}$ quam proximè, ſi modo diametros rectè dimenſus ſum. Parabam utique laminam planam pertenuem in medio perforatam, exiſtente circularis foraminis diametro partium quinque octavarum digiti. Et ne vena aquæ exilientis cadendo acceleraretur & acceleratione redderetur anguſtior, hanc laminam non fundo ſed lateri vaſis effixi ſic, ut vena illa egrederetur ſecundum lineam horizonti parallelam. Dein ubi vas aqua plenum eſſet, aperui foramen ut aqua efflueret; & venæ diameter, ad diſtantiam quaſi dimidii digiti à foramine quam accuratiſſimè menſurata, prodiit partium viginti & unius quadrageſimarum digiti. (n) Erat igitur diameter foraminis hujus cir-



(m) * *Nam particulæ aquæ &c.* Clariſſ. Daniel Bernoullius paragr. 3. Sect. 4^{æ}. hydrodynamicæ obſervavit particulas ceræ hiſpanicæ aquis innatantes ità cum aquâ in vaſe moveri, ut quæ foraminis centro G imminent, per lineam verticalem H G, deſcendant, aliæ verò omnes utrinque poſitæ motu ferè verticali deſcendant primùm per lineas m p, n q, ferè ad fundum uſque CD, tumque curſum ſuum verſus foramen E F per lineas P E, q F ſenſim inflectant. Itaque vena aquæ exilientis E F ſe duplici de cauſâ contrahitur uſque in e f paulo infra foramen E F. Prima contractionis illius cauſa eſt acceleratio motûs, quæ omnibus gravibus cadentibus communis eſt, & quâ fit ut major ſit velocitas aquæ in loco inferiori e f quam in ſuperiore E F; quia enim aquam eſſe in ſtatu manente, eandemque proindè (271) illius quantitatem per ſectiones E F & e f, eodem tempore effluere ſupponimus, ſectio e f eſt ad ſectionem E F in ratione velocitatis aquæ in loco E F, ad ejus velocitatem in loco e f (271) & ideo ſectio e f, cæteris paribus, minor eſſe debet ſectione E F. Secunda contractionis venæ cauſa, quam ſolam hic conſiderat Newtonus, eſt obliquitas motûs particularum aquæ per lineas P E, q F, ad foramen E F tendentium; hinc enim fit, ut ſeclusâ etiam omni acceleratione motûs à gravitate ortâ, particulæ aquæ convergant, venamque contrahant, atque ideo motum ſuum accelerent.

(n) * *Erat igitur diameter foraminis hujus circularis ad diametrum venæ ut 25 ad*

circularis ad diametrum venæ ut 25 ad 21 quamproximè. Aqua igitur transeundo per foramen, convergit undique, & postquam effluxit ex vase, tenuior redditur convergendo, & per attenuationem acceleratur donec ad distantiam semissis digiti à foramine pervenerit, & ad distantiam illam tenuior (o) & celerior fit quam in ipso foramine in ratione 25×25 ad 21×21 seu 17 ad 12 quamproximè, id est in subduplicatâ ratione binarii ad unitatem circiter. (p) Per experimenta vero constat quod quantitas aquæ, quæ per foramen circulare in fundo vasis

ad 21 *quamproximè.* Hæc ratio in experimentis constans ferè manet, si aqua è vase satis amplo per exiguum foramen laminæ tenuissimæ insculptum effluat, licet in vase mutetur aquæ foramini incumbentis altitudo. Experimenta illa iterarunt celeberrimi Mathematici Marchio Polenus lib. de castellis & Daniel Bernoullius sect. 4ª. Hydrodynamicæ. Hæc sunt Illustr. Marchionis verba pag. 38. 39. « Proclive autem erit intelligere, confirmari ex allatis experimentis rationem inter diametros foraminum & aquæ contractæ diametros à viro summo Isaaco Newtono, ut antè diximus, constitutam. Non tamen inficias iverim perexiguam aliquam differentiam interesse inter contractiones aquæ effluentis ex minoribus foraminibus, & aquæ contractiones ex majoribus effluentis. Anteà descripti foraminis in laminâ ferreâ diameter ad diametrum aquæ contractæ fuit in eâ ratione quam habet numerus 52 ad 41; cum Newtoniana sit ratio numeri 50 ad 42. sic omninò eâdem lege, non semper contrahi aquæ venas ostendunt variæ contractiones in aquæ à variis frustis conicis effluxu observatæ, quin etiam huc debebunt referri illæ quas animadverti differentiæ inter diametros ad perpendiculum sumptas, & diametros secundum lineam horizonti parallelam mensas. At quanta sit differentia inter aquæ contractiones non ausim definire; neque verò illa Newtoniana ratio inter diametrum foraminis & contractæ aquæ diametrum simi debet ceu præcisa, cum ipse vir summus in citato opere hæc habeat; existente ejus (nempè aquæ contractæ (diametro ad diametrum foraminis ut 5 ad 6, vel 5 & $\frac{1}{2}$ ad 6 & $\frac{1}{2}$, quamproximè, si modo diametros rectè dimensus sum ». Bernoullius verò Sect. 4. parag. 7°. hæc habet: Interim assumptis laminâ tenui, vase amplissimo, foramine ad 4 vel 6 lineas in diametro assurgente, solet ratio inter foramen & Sectionem venæ contractæ non multum recedere ab illâ quam Newtonus statuit ». Verùm utriusque authoris experimenta demonstrant, rationem illam diametri venæ contractæ ad diametrum foraminis multum variari, si per oblongos variæque figuræ canales, non verò ex simplici foramine in tenuissimâ laminâ insculpto è vase effluat aqua. 274.

(o) * *Et celerior fit quam in ipso foramine.* Nam velocitates sunt reciprocè ut circuli per quos aqua eodem tempore transit (171), circuli verò sunt in ratione duplicatâ diametrorum; & ideo velocitas aquæ per sectionem circularem venæ contractæ transeuntis est ad velocitatem aquæ per foramen effluentis ut 25×25 ad 21×21 hoc est, 625 ad 441, quod utrumque divisum per 37 dat rationem 17 ad 12, vel utrumque divisum per 441, dat rationem 1.41 &c. ad 1, est verò Radix binarii numeri 1.41 &c., est ergo velocitas aquæ per venam contractam ad velocitatem per foramen in ratione radicis binarii numeri ad unitatem.

(p) *Per experimenta verò constat.* Datâ quantitate aquæ per datum foramen seu per datam venæ contractæ Sectionem dato tempore effluentis, sic illius veloci-

De Motu Corporum.

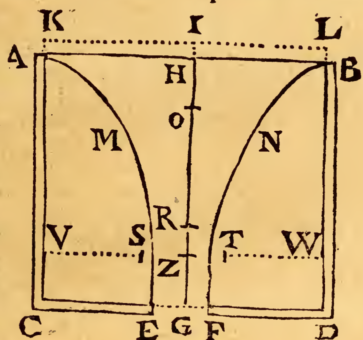
ſis factum, dato tempore effluit, ea ſit quæ cum velocitate prædictâ, non per foramen illud, ſed per foramen circulare, cujus diameter eſt ad diametrum foraminis illius ut 21 ad 25, eodem tempore effluere debet. Ideoque aqua illa effluens velocitatem habet deorſum in ipſo foramine quam grave cadendo & caſu ſuo (q) deſcribendo dimidiam altitudinem aquæ in vaſe ſtagnantis acquirere poteſt quamproximè. Sed poſtquam exivit ex vaſe, acceleratur convergendo donec ad diſtantiam à foramí-

tas inquiritur. Quoniam data aquæ quantitas æquatur cylindro vel priſmati cujus baſis eſt foramen datum aut venæ contractæ ſectio, & altitudo ſpatium quod aqua tempore dato cum illâ velocitate quam in foramine aut venæ Sectione habet, uniformiter progrediendo deſcriberet, dividitur quantitas aquæ data per foraminis aut Sectionis venæ aream, & quotiens erit ſpatium quod aqua dato tempore uniformiter progrediendo deſcriberet, atque ità nota fit aquæ velocitas cujus dimidium eſt altitudo ex quâ cadere debuit ut eam velocitatem acquireret. Sit jam a altitudo quam corpus grave tempore minuti unius ſecundi ſine reſiſtentiâ cadendo deſcribit, v velocitas hoc caſu acquiſita, & ideò $2a$ ſpatium quod velocitate uniformi v tempore minuti unius ſecundi deſcribi poteſt (30. lib. 1.) ſit b altitudo aquæ in vaſe ſtagnantis, c celeritas quam grave per altitudinem b ſine reſiſtentiâ cadendo acquirit, & s ſpatium quod cum celeritate c uniformiter progrediendo tempore minuti unius ſecundi deſcriberet, erit $a:b=vv:cc$ (28. lib. 1.) & $2a:s=v:c$ (5. lib. 1.) ideóque $a:b=4aa:ss$; undè habetur $ss=4ab$, & $s=\sqrt{4ab}$. Si igitur aqua è vaſe per venæ contractæ Sectionem effluat cum velocitate c quam grave cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem b aquæ in vaſe ſtagnantis acquirit, ſpatium s quod ex quantitate aquæ tempore minuti unius ſecundi è vaſe effluentis, ut ſuprà dictum eſt, habetur, debet eſſe æquale $\sqrt{4ab}$. Hinc ſi altitudo a, ſit pedum Pariſ. 14, erit $ss=56b$, quæ eſt ipſa regula quam D. Pitot in monum. Acad. Pariſ. an. 1730. tradidit. At ſi altitudo a ponatur eſſe pedum Pariſ. $15\frac{1}{12}$ ſeu $\frac{181}{12}$ (471. lib. 1.) erit $ss=\frac{181}{3}b$. Verùm ut aquæ in vaſe ſtagnantis altitudo & velocitas per foramen effluentis quo tempore experimentum capitur, eadem ad ſenſum maneant, ut oportet, uſurpari poteſt vas ſatis amplum exiguo pertuſum foramine, vel ſi vas paulò anguſtius adhibeatur, tantum aquæ affundi ſupernè debet quantum per inferius lumen effluit, & cavendum eſt ne affuſa aqua cum aliquo impetu cadendi extimam aquæ in vaſe ſtagnantis ſuperficiem attingat. Quibus autem artibus id poſſit effici fusè exponunt locis ſuprà citatis Marchio Polenus & Daniel Bernoullius quos lector conſulere poteſt. Attamen his adhibitis cautelis, velocitas aquæ per venæ contractæ Sectionem effluentis paulò minor per experimenta quam per theoriam invenitur, quod variis reſiſtentiis tribuendum eſſe videtur, & certè Illuſtr. Marchio Polenus, cum in libro de caſtellis pag. 64. opinatus fuiſſet velocitatem illam in experimentis valde eſſe minorem quam in theoriâ, pluribus deinde experimentis ad calculos revocatis priorem ſententiam mutavit in Epiſtola ad Marinonium.

(q) *Deſcribendo dimidiam altitudinem.* Velocitas quam corpus quodlibet grave, ſinè reſiſtentiâ cadendo & caſu ſuo deſcribendo dimidiam altitudinem aquæ in vaſe ſtagnantis acquirit, eſt ad velocitatem ejus per totam altitudinem aquæ cadendo acquiſitam ut 1 ad $\sqrt{2}$ (28. lib. 1.)

ramine diametro foraminis prope æqualem pervenerit, & velocitatem acquisiverit majorem in ratione subduplicatâ binarii ad unitatem circiter; quam utique grave cadendo, & casu suo describendo totam altitudinem aquæ in vase stagnantis, acquirere potest quamproximè.

In sequentibus igitur diameter venæ designetur per foramen illud minus quod vocavimus *EF*. Et plano foraminis *EF* parallelum duci intelligatur planum aliud superius *VW* ad distantiam diametro foraminis æqualem circiter & foramine majore *ST* pertusum; per quod utique vena cadat, quæ adæquatè impleat foramen inferius *EF*, atque ideo cujus diameter sit ad diametrum foraminis inferioris ut 25 ad 21 circiter. Sic enim vena per foramen inferius perpendiculariter transibit; & quantitas aquæ effluentis, pro magnitudine foraminis hujus, ea erit quam solutio problematis postulat quamproximè. Spatium vero, quod planis duobus & venâ cadente clauditur, pro fundo vasis haberi potest. Sed ut solutio problematis simplicior sit & magis mathematica, præstat adhibere planum solum inferius pro fundo vasis, & fingere quod aqua quæ per glaciem ceu per infundibulum defluebat, & è vase per foramen *EF* in plano inferiore factum egrediebatur, motum suum per-

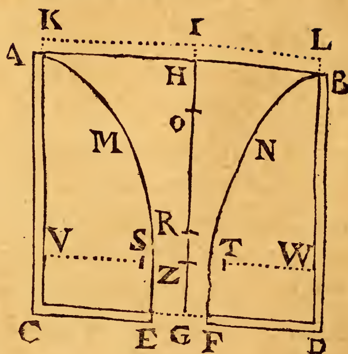


petuo

1). Sed, ex suprà ostensis, velocitas aquæ per vasis foramen transeuntis est ad velocitatem per venæ contractæ Sectionem fluentis, id est, ad velocitatem quam grave cadendo per totam altitudinem aquæ in vase stagnantis acquirit, in eâdem ratione 1, ad $\sqrt{2}$; Quare velocitas quam grave per dimidiam altitudinem aquæ stagnantis cadendo acquirit, æqualis est velocitati aquæ per foramen effluentis, modò tamen aqua per simplex foramen in tenuissimâ laminâ factum, ut suprà expositum est, effluat è vase. 274.

DE MOTU CORPORUM.

petuo servet, & (r) glacies quietem suam. In sequentibus igitur sit ST diameter foraminis circularis centro Z descripti per quod cataracta effluit ex vase ubi aqua tota in vase fluida est. Et sit EF diameter foraminis per quod cataracta cadendo adæquatè transit, sive aqua exeat ex vase per foramen illud superius ST, sive cadat per medium glaciei in vase tanquam per infundibulum.

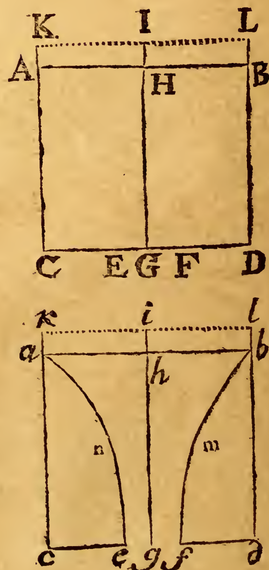


Et sit diameter foraminis superioris ST ad diametrum inferioris EF ut 25 ad 21 circiter, & distantia perpendicularis inter plana foraminum æqualis sit diametro foraminis minoris EF. Et velocitas aquæ è vase per foramen ST exeuntis ea erit in ipso foramine deorsum quam corpus cadendo à dimidio altitudinis IZ acquirere potest: velocitas autem cataractæ utriusque cadentis ea erit in foramine EF, quam corpus cadendo ab altitudine totâ IG (s) acquiret.

Cas.

(r) * *Et glacies quietem suam.* Sunto vasa duo æqualia A B D C, a b d c, in quorum primo glacies omnis in aquam resoluta sit, & in altero glacies quietem suam conservet, ut aqua cataractam a b n f e m formando effluat per foramen e f Sectioni venæ contractæ è foramine E F exilientis æquale; & loco vasis ABDC, in problematis solutione substitui poterit vas alterum a b d c, in quo aquæ per lumen e f effluentis eadem est velocitas quam aqua è vase A B D C exiliens habet in Sectione venæ contractæ, eademque proindè aquæ quantitas in defluxum impenditur, & propterea idem aquæ pondus fundo incumbit in utroque vase. Quoniam enim cataractæ a b n f e m figura & lex secundùm quam aqua cataractâ illâ movetur notæ sunt, problematis solutio & facilior & magis mathematica fiet, si loco vasis A B D C mente substituatur vas a b d c.

(s) * *Acquiret.* Hæc ex suprà demonstratis patent.



Caſ. 2. Si foramen *E F* non ſit in medio fundi vaſis, ſed fundum alibi perforetur: aqua effluet eâdem cum velocitate ac prius, ſi modo eadem ſit foraminis magnitudo. Nam grave majori quidem tempore deſcendit ad eandem profunditatem (t) per lineam obliquam quam per lineam perpendicularem, ſed deſcendendo eandem velocitatem acquirit in utroque caſu, (u) ut *Galilæus* demonſtravit.

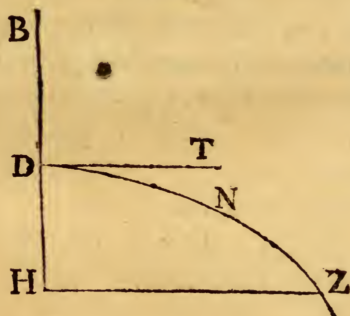
Caſ. 3. Eadem eſt aquæ velocitas effluentis per foramen in latere vaſis. Nam ſi foramen parvum ſit, (x) ut intervallum inter ſuperficies *A B* & *K L* quoad ſenſum evaneſcat, & vena aquæ horizontaliter exilientis figuram parabolicam efformet: ex (y) latere recto hujus parabolæ colligetur, quod velocitas aquæ effluentis ea ſit quam corpus ab aquæ in vaſe ſtagnantis altitudine *HG* vel *IG* cadendo acquirere potuiſſet. Facto

(t) * *Per lineam obliquam.* In hoc ſecundo caſu pars aquæ per lineas ad foramen obliquas deſcendit.

(u) * *Ut Galilæus demonſtravit.* (81. & 85. lib. 1.).

(x) 275. * *Ut intervallum inter ſuperficies AB & KL.* I H eſt ad I G in ratione quadruplicatâ diametri E F ad diametrum A B (272), aut quod idem eſt, in ratione duplicatâ areæ circuli E F ad aream circuli A B, ideòque ſi ratio E F ad A B parva ſit, minor adhuc erit ratio I H ad I G, & HG, IG erunt ad ſenſum æquales.

(y) * *Ex latere recto hujus Parabolæ.* Aquæ gutta e loco D, ſecundùm directionem quamlibet D T exiliat cum eâ velocitate quam per altitudinem B D cadendo acquirere poteſt, & ſublatâ medii reſiſtentiâ, deſcribat parabolam D N Z, cujus vertex D, tangens D T, & diameter D H ſeu verticalis B D producta (40. lib. 1.); capiatur abſciſſa D H æqualis altitudini B D, ducaturque ordinata H Z, quæ tangenti D T parallela erit; & quo tempore gutta aquæ vi gravitatis cadendo altitudinem B D vel D H deſcribit uniformi illâ velocitate quam caſu per B D acquiſivit, deſcribit longitudinem H Z ipſius B D vel D H duplam, (30. lib. 1.). Latus rectum



Parabolæ D N Z, pertinens ad diametrum D H eſt $\frac{HZ^2}{DH}$ (theor. 1. de parab.) ideòque cum ſit H Z = 2 D H = 2 B D, latus rectum eſt 4 B D. Igitur altitudo B D quam aqua cadendo deſcribere debet ut velocitatem acquirat cum quâ è loco D exilit, eſt quarta pars lateris recti ad diametrum D H parabolæ D N Z pertinentis. 275.

cto utique experimento inveni quod, si altitudo aquæ stagnantis supra foramen esset viginti digitorum & altitudo foraminis supra planum horizonti parallelum esset quoque viginti digitorum, vena aquæ prosilientis incideret in planum illud ad distantiam digitorum 37 circiter à perpendiculo quod in planum illud à foramine demittebatur captam. Nam sine resistentiâ, vena (z) incidere debuisset in planum illud ad distantiam digitorum 40, existente venæ parabolicæ latere recto digitorum 80.

Cas. 4. Quinetiam aqua effluens, si sursum feratur, eâdem egreditur cum velocitate. Ascendit enim aquæ exilientis vena parva motu perpendiculari ad aquæ in vase stagnantis altitudinem GH vel GI, nisi quâtenus ascensus ejus ab aeris resistentiâ aliquantulum impediatur; (a) ac proinde eâ effluit cum velocitate quam ab altitudine illâ cadendo acquirere potuisset. Aquæ stagnantis particula unaquæque undique premitur æqualiter (per prop. XIX. lib. 2.) & pressioni cedendo æquali impetu in omnes partes fertur, sive descendat per foramen in fundo vasis, sive horizontaliter effluat per foramen in ejus latere, sive egrediatur in canalem & inde ascendat per foramen parvum in superiore canalis parte factum. Et velocitatem quâ aqua effluit eam esse, quam in hâc propositione assignavimus, non solum ratione colligitur, sed etiam per experimenta notissima jam descripta manifestum est.

Cas. 5. Eadem est aquæ effluentis velocitas sive figura foraminis sit circularis sive quadrata vel triangularis aut alia quæcunque circulari æqualis. Nam velocitas aquæ effluentis non pendet à figurâ foraminis, sed oritur ab ejus altitudine infra planum KL.

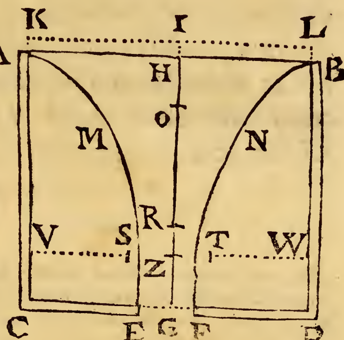
Cas. 6. Si vasis $ABDC$ pars inferior in aquam stagnantem im-

(z) * *Incidere debuisset in planum illud.* Sit enim (in fig. notæ superioris) altitudo $BD = DH$ digit. 20, & quia BD est pars quarta lateris recti parabolæ DNZ, quam aqua sine resistentiâ describeret, latus illud rectum est digit. 80, & ordinata HZ æqualis $2DH$ est digit. 40 differentia 3. digit. inter distantias 40. & 37. digit. resistentiis tribuenda est.

(a) * *Ac proindè eâ effluit cum velocitate.* (25. 26. lib. 1.)

LIBER SECUND. SECT. VII. PROP. XXXVI. PROBL. VIII.

immergatur & altitudo aquæ ſtagnantis ſupra fundum vaſis ſit GR: velocitas quâcum aqua quæ in vaſe eſt, effluet per foramen EF in aquam ſtagnantem, ea erit quam aqua cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem IR acquirere poteſt. Nam pondus aquæ omnis in vaſe quæ inferior eſt ſuperficie aquæ ſtagnantis, ſubſtinebitur in æquilibrio per pondus aquæ ſtagnantis, ideoque motum aquæ deſcendentis in vaſe minimè accelerabit. Patebit etiam & hic caſus per experimenta, ([b]) menſurando ſcilicet tempora quibus aqua effluit.



([c]) *Corol.* 1. Hinc ſi aquæ altitudo CA producatur ad K, ut ſit AK ad CK in duplicatâ ratione areæ foraminis in quâvis fundi parte facti, ad aream circuli AB: velocitas aquæ effluentis æqualis erit velocitati quam aqua cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem KC acquirere poteſt.

([d]) *Corol.* 2. Et vis, quâ totus aquæ exilientis motus generari poteſt, æqualis eſt ponderi cylindricæ columnæ aquæ, cujus baſis eſt foramen EF, & altitudo $2GI$ vel $2CK$. Nam aqua exiliens, quo tempore hanc columnam æquat, pondere ſuo ab altitudine GI cadendo velocitatem ſuam, quâ exilit, acquirere poteſt.

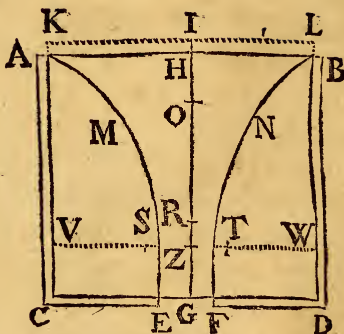
Co-

(b) * *Menſurando ſcilicet tempora quibus aqua effluit*, & quantitates aquæ iiſdem temporibus effluentis.

(c) * *Cor.* 1. Patet per not. 275 & caſ. 2um. ac 5um.

(d) * *Cor.* 2. De hujus corollarii veritate diù multumque diſputatum eſt inter Comitem Riccatum, Danielem Bernoullium, Petrum Antonium Michelottum, Jacobum Jurinum, aliosque eruditiſſimos viros. Cum enim in primâ principiorum editione, Newtonus, nondum obſervatâ contractione venæ, ſtatuiſſet, vim quâ totus aquæ exilientis motus generari poteſt, æqualem eſſe ponderi cylindricæ columnæ aquæ, cujus baſis eſt foramen EF, & altitudo GI, & in ſecundâ editione, habitâ ratione venæ contractæ, vim illam duplam feciſſet, priorem vis illius menſuram adverſus Comitem Riccatum & Jurinum tuebatur cum Michelotto Daniel Bernoullius quorum diſſertationes videre eſt in exercitationibus Mathematicis quæ an. 1724. Venetiis editæ ſunt. Verum Daniel Bernoullius paragr. 9°. ſect. 13æ hydrodynamicæ poſteriori ſententiæ Newtoni ità ſuffragatur: «iſta ſententia a me olim & «& ab aliis fuit impugnata, ab aliis rur- 275.

 «ſùs



Corol. 3. Pondus aquæ totius in vaſe *ABDC* eſt ad ponderis partem, quæ in defluxum aquæ impenditur, ut ſumma circulorum *AB* & *EF* ad duplum circulum *EF*. Sit enim *IO* media proportionalis inter *IH* & *IG*; & aqua per foramen *EF* egrediens, quo tempore gutta cadendo ab *I* deſcribere poſſet altitudinem *IG*, æqualis erit cylindro cujus baſis eſt circulus *EF* & altitudo eſt 2*IG*, id eſt, cylindro cujus baſis eſt circulus *AB* & altitudo eſt 2*IO*, (e) nam circulus *EF* eſt ad circulum *AB* in ſubduplicatâ ratione altitudinis *IH* ad alti-

«ſûs confirmata. Nunc autem poſtquam «hanc aquarnm motarum theoriam medi-«tatus ſum, lis ità dirimenda mihi vide-«tur ut cum aquæ ad motum uniformem «pervenerint, quæ quidem Hypotheſis eſt «Newtoni, tunc rectè altitudine 2 GI, vis «illa definiatur, ſed ab initio fluxûs, ubi «velocitas adhuc nulla eſt, vis ſimplici al-«titudini GI reſpondeat, moxque creſ-«cente velocitate, ſimul vis aquam ad ef-«fluxum animans creſcat, & tandem ad «eam magnitudinem exſurgat quam New-«tonus aſſignavit. . . . . Rectè etiam Ill. «Riccatus cum quo mihi de hoc argumen-«to res erat, interrogatus, undè vis illa «duplæ aquarum altitudini conveniens ori-«ri poſſit, cum obturato orificio, gutta «eidem imminens vi ſimplicis altitudinis «urgeri manifeſtè appareat, reſpondit diſ-«tinguendum eſſe ſtatum quietis à ſtatu mo-«tûs.» Jam verò hujus cor. 2. demonſtrationem dedimus (274.); aliam, quam Newtonus indicat, expoſuerunt comes Riccatus in citatis exercitationibus & Euſtachius Manfredius in adnotationibus ad cap. 1. tractatûs Guilelmini de naturâ fluminum (quod præclarum opus poſt fata ſummi viri, Clariſſ. Fratres Gabriel & Heraclitus Manfredi, an 1739. Bononiæ edi curarunt). Demonſtratio ſic poteſt exponi. Quo tempore cylindrus aquæ, cujus baſis æqualis eſt foramini EF, & altitudo GI vi ponderis ſui cadendo deſcriberet altitudinem IG, & velocitatem aquæ exilientis acquireret; eodem tempore è foramine EF efflueret aquæ quantitas æqualis alteri cylindro aqueo, cujus baſis eſt foramen EF, & longitudo 2 GI (30. lib. 1.), id eſt, cylindro prioris duplo; & ideò ob velocitatem quam cylindrus per altitudinem IG, cadendo acquirit, æqualem velocitati aquæ exilientis, quantitas motûs in illo cylindro vi ponderis ejuſdem cylindri genita, eſt ad quantitatem motûs eodem tempore in aquâ exiliente productam ut 1 ad 2. Sed vires uniformes quibus cylindri cadentis & aquæ exilientis motus generantur, ſunt ut motûs quantitates eodem tempore à viribus illis genitæ (15. lib. 1.). Quarè pondus cylindri aquæ, cujus baſis eſt foramen EF, & altitudo GI, eſt ad vim quâ totus aquæ exilientis motus generari poteſt ut 1 ad 2, & proindè hæc vis æqualis eſt ponderi cylindricæ columnæ aquæ cujus baſis eſt foramen EF & altitudo 2 GI. Q. E. D.

(e) * *Nam circulus* EF *eſt ad circulum AB, in ſubduplicatâ ratione altitudinis IH, ad altitudinem IG* (per cor. 1.) *id eſt, in ſimplici ratione mediæ proportionalis IO, ad altitudinem* IG; ideoque factum ex circulo AB in altitudinem 2 IO æquale eſt facto

titudinem *IG*, hoc eſt, in ſimplici ratione mediæ proportionalis *IO* ad altitudinem *IG*: & quo tempore gutta cadendo ab *I* deſcribere poteſt altitudinem *IH*, aqua egrediens (f) æqualis erit cylindro cujus baſis eſt circulus *AB* & altitudo eſt 2*IH*: & quo tempore gutta cadendo ab *I* per *H* ad *G* deſcribit altitudinum differentiam *HG*, aqua egrediens, (g) id eſt, aqua tota in ſolido *ABNFEM* æqualis erit differentiæ cylindrorum, id eſt, cylindro cujus baſis eſt *AB* & altitudo 2*HO*. Et propterea aqua tota in vaſe *ABDC* eſt ad aquam totam cadentem in ſolido *ABNFEM* ut (h) *HG* ad 2*HO*, id eſt, ut *HO*+*OG* ad 2*HO*, ſeu *IH*+*IO* ad 2*IH*. Sed pondus aquæ totius in ſolido *ABNFEM* in aquæ defluxum (i) impenditur: ac proinde pondus aquæ totius in vaſe eſt ad ponderis partem quæ in defluxum aquæ impenditur, ut *IH*+*IO* ad 2*IH*, (k) atque ideo ut ſumma circulorum *EF* & *AB* ad duplum circulum *EF*.

(l) *Corol.* 4. Et hinc pondus aquæ totius in vaſe *ABDC* eſt

facto ex circulo EF in altitudinem 2IG, aut, quod idem eſt, cylindrus cujus baſis eſt circulus EF & altitudo 2IG, æquatur cylindro cujus baſis eſt circulus AB & altitudo 2IO.

(f) * *Æqualis erit cylindro cujus baſis eſt circulus AB & altitudo 2IH.* Eadem enim aquæ quantitas eodem tempore tranſit per circulos AB, & EF (271) & quantitas aquæ per circulum AB, tranſeuntis eo tempore quo gutta cadendo deſcribere poteſt altitudinem IH, æqualis erit cylindro aqueo cujus baſis eſt circulus AB & altitudo 2IH. (30. lib. 1.).

(g) * *Id eſt aqua tota.* Nam ex iis quæ ante caſ. 1. dicta ſunt, manifeſtum eſt aquam totam prædicto ſolido contentam, per foramen EF eodem tempore effluere, quo aquæ gutta vi gravitatis ſuæ è loco I per H ad G cadendo deſcribit altitudinem HG.

(h) * *Ut HG ad 2HO &c.* Volumen aquæ in vaſe ABDC contentæ æquatur capacitati vaſis ſeu cylindro cujus baſis eſt circulus AB, & altitudo HG; & propterea aqua tota in vaſe ABDC, eſt ad aquam totam cadentem in ſolido ABNFEM, ut HG ad 2HO (ex dem.), id eſt, ut HO+OG ad 2HO, & quia (per hyp.) $IH:IO=IO:IG=IO-IH:IG-IO=HO:OG$, erit $HO+OG:2HO=IH+IO:2IH$.

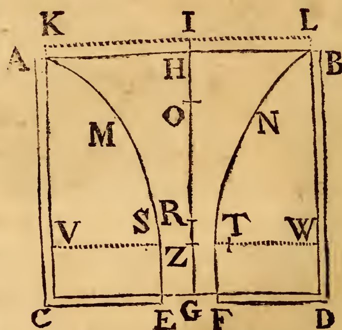
(i) *Impenditur*, ut probatum eſt initio caſ. 1.

(k) * *Atque ideò ut ſumma circulorum.* Quoniam enim (per hyp.) eſt IH ad IO ut IO ad IG, erit etiam IH+IO ad 2IH ut IG+IO ad 2IO, ſed (ex modò dem.) circulus AB eſt ad circulum EF ut IG ad IO, ideóque ſumma circulorum AB & EF ad duplum circulum EF ut IG+IO ad 2IO ſeu ut IH+IO ad 2IH. Quare patet propoſitum.

(l) * *Cor.* 4. Pondus aquæ totius in vaſe ABDC ſit *P* ponderis illius pars quæ in defluxum impenditur ſit *p* & hinc *P*−*p*, pars ponderis totius quæ fundo vaſis ſeu plano æquali differentiæ circulorum CD & EF ſuſtinetur & in defluxum non impenditur. Et (per cor. 3.) erit $P:p=AB+EF:2EF$, ac proinde $P:P-p=AB+EF:AB-EF$. 275.

est ad ponderis partem alteram quam fundum vasis sustinet, ut summa circulorum *AB* & *EF* ad differentiam eorundem circulorum.

(m) *Corol.* 5. Et ponderis pars, quam fundum vasis sustinet, est ad ponderis partem alteram, quæ in defluxum aquæ impenditur, ut differentia circulorum *AB* & *EF* ad duplum circulum minorem *EF*, sive ut area fundi ad duplum foramen.



(n) *Corol.* 6. Ponderis autem pars, quâ solâ fundum urgetur, est ad pondus aquæ totius, quæ fundo perpendiculariter incumbit, ut circulus *AB* ad summa circulorum *AB* & *EF*, sive ut circulus *AB* ad excessum dupli circuli *AB* supra fundum. Nam ponderis pars, quâ solâ fundum urgetur, est ad pondus aquæ totius in vase, ut differentia circulorum *AB* & *EF* ad summam eorundem circulorum, per cor. 4.: & pondus aquæ totius in vase est ad pondus aquæ totius quæ fundo perpendiculariter incumbit, ut circulus *AB* ad differentiam circulorum *AB* & *EF*. Itaque ex æquo perturbatè, ponderis pars, quâ solâ fundum urgetur, est ad pondus aquæ totius, quæ fundo perpendiculariter incumbit, ut circulus *AB* ad summam circulorum *AB* & *EF* (o) vel excessum dupli circuli *AB* supra fundum.

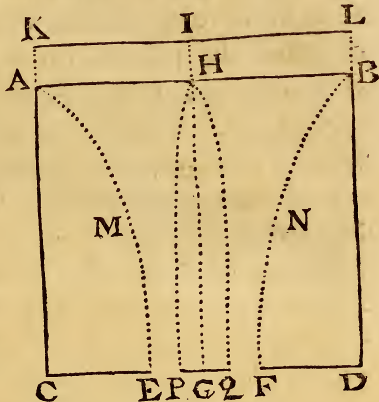
Corol. 7. Si in medio foraminis *EF* locetur circellus *PQ* cen-

(m) * *Cor.* 5. Cum sit $P : p = AB + EF : 2EF$, erit quoque $P - p : p = AB - EF : 2EF$. Est autem area fundi æqualis differentiæ circulorum A B & E F.

(n) * *Cor.* 6. *Ponderis autem pars quâ solâ fundum urgetur*, sive pondus aquæ quæ in spatio solido CEMA DFNB continetur, *est ad pondus aquæ totius, quæ fundo perpendiculariter incumbit* & quæ æquatur solido aqueo cujus basis est differentia circulorum A B & E F, & altitudo G H, *ut circulus &c.*

(o) * *Vel excessum dupli circuli AB suprà fundum.* Cum fundum æquale sit differentiæ circulorum A B & E F, excessus dupli circuli A B, suprà fundum est $2AB - AB + EF$, seu $AB + EF$.

centro *G* deſcriptus & horizonti parallelus: pondus aquæ quam circellus ille ſuſtinet, majus eſt pondere tertiæ partis cylindri aquæ cujus baſis eſt circellus ille & altitudo eſt *GH*. Sit enim *ABNFEM* cataracta vel columna aquæ cadentis axem habens *GH* ut ſupra, & congelari intelligatur aqua omnis in vaſe, (p) tam in circuitu cataractæ quàm ſupra circellum, cujus fluiditas ad promptiſſimum & celerrimum aquæ deſcenſum non requiritur. Et ſit *PHQ* columna aquæ ſupra circellum congelata, verticem habens *H* & altitudinem *GH*. Et finge cataractam hancce pondere ſuo toto cadere & non incumbere in *PHQ*, nec eandem premere, ſed liberè & ſine frictione præterlabi, niſi forte in ipſo glaciei vertice quo cataracta ipſo cadendi initio incipiat eſſe cava. Et quemadmodum aqua in circuitu cataractæ congelata *AMEC*, *BNFD*



(p) * *Tam in circuitu cataractæ.* Quemadmodum enim ſuprà ante caſ. 1um., aqua omnis cujus fluiditas ad promptiſſimum & celerrimum aquæ deſcenſum illiuſque effluxum per foramen E F inutilis erat, in circuitu cataractæ congelata ſupponebatur, idquè rectè factum experimentis poſteà oſtenſum eſt, ità hic loci congelata ſupponi poteſt aqua omnis in vaſe tam in circuitu cataractæ quàm ſuprà circellum, cujus fluiditas ad promptiſſimum & celerrimum aquæ effluxum per ſpatium annulare E P, Q F, non requiritur; Et quemadmodum glacies in circuitu cataractæ conſtituta, C E M A, D F N B pertingebat ad ſuperficiem A B ſeu terminum glaciei continuò liqueſcentis K A B L, ità aqua ſuprà circellum congelata producitur ad punctum H, in eâdem ſuperficie A B poſitum; & uti glacies *in circuitu cataractæ convexa eſt versùs cataractam cadentem* (272), *ſic etiam columna aquæ ſuprà circellum congelatæ PHQ convexa erit verſus cataractam cadentem AHPEM, BHQFN;* 275.
* Conſiderari enim poteſt axis H G ut paries vaſis cujus ſectio ſit H G C A, & foramen in fundo factum ſit E P, qualiſcumque autem ſit Lex quâ effluit aqua ex vaſe, eodem modo quo factum eſt à Newtono in hujus demonſtrationis caſu primo, concipi poteſt cataracta trans glaciem effluens, adhibitis cautionibus illic notatis, ut hæc Hypotheſis Mathematicâ congruat cum verâ effluxus aquæ Lege, quâtenus ad copiam aquæ effluentis dato tempore, quo poſito evidens eſt lineam H P convexam ſumi debere. Quâpropter ſi ex punctis P & Q ad punctum H ducantur lineæ rectæ, quæ cum diametro P Q triangulum conſtituant, conus ex revolutione hujus trianguli circà axem H G genitus, totus continebitur in ſolido quod per rotationem figuræ convexæ P H Q circà eundem axem H G generatur. Hoc igitur ſolidum, ſeu columna P H Q ſuprà circellum congelata, magnitudine ſuperat conum illum.

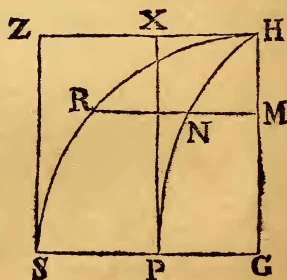
De Motu Corporum.

BNFD convexa est in superficie internâ *AME*, *BNF* versus cataractam cadentem, sic etiam hæc columna *PHQ* convexa erit versus cataractam, & propterea major cono cujus basis est circellus ille *PQ* & altitudo *GH*, id est, major tertiâ parte cylindri eâdem base & altitudine descripti. Sustinet autem circellus ille pondus hujus columnæ, id est, pondus quod pondere coni seu tertiæ partis cylindri illius majus est.

Corol. 8. Pondus aquæ quam circellus valde parvus *PQ* sustinet, minus esse videtur pondere duarum tertiarum partium cylindri aquæ cujus basis est circellus ille & altitudo est *HG*. Nam stantibus jam positis, describi intelligatur dimidium sphæroidis cujus basis est circellus ille & semiaxis sive altitudo est *HG*. (q) Et hæc figura æqualis erit duabus tertiis partibus cylindri illius & comprehendet columnam aquæ congelatæ *PHQ* cujus pondus circellus ille sustinet. Nam ut motus aquæ sit maximè directus, columnæ illius superficies externa concurret cum basi *PQ* (r) in angulo nonnihil acuto, propterea quod aqua

illum cujus basis est circellus P Q & altitudo H G. Quarè (per Prop. X. lib 12. elem.) columna congelata P H Q, major est tertiâ parte cylindri aquæ, cujus basis est circellus P Q & altitudo G H. Sed sicut fundum E C, F D sustinet pondus aquæ in spatio solido C E M A, D F N B contentæ, ità circellus P Q sustinet pondus columnæ aquæ P H Q id est, pondus quod majus est pondere tertiæ partis cylindri aquæ cujus basis est circellus P Q & altitudo G H.

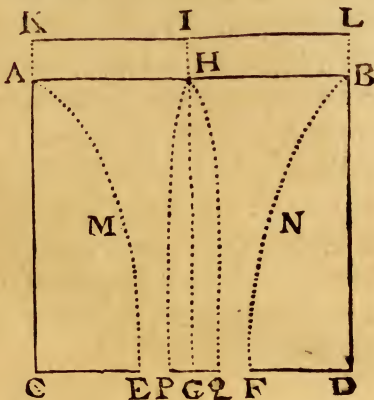
(q) * *Et hæc figura æqualis erit &c.* Centro G, & semiaxibus conjugatis G H & G P, describatur ellipseos quadrans H N P, & centro eodem G ac radio G H circuli quadrans H R S, compleanturque rectangula H G P X & H G S Z. Ducatur in circulo ordinata quævis R M, ellipsi occurrens in N, erit R M ad N M, in datâ ratione S G ad P G (247. lib. 1.) & propterea si figuræ illæ circa axem H G revolvantur, circulus quem radius M R in hâc revolutione describet, erit ad circulum radio M N descriptum in datâ ratione SG^2 ad PG^2, seu in datâ ratione cylindri quem rectangulum H G S Z ro-



tando describit ad cylindrum ex rotatione rectanguli H G P X genitum; unde (per cor. Lem. IV. lib. 1.) hæmisphærium ex revolutione quadrantis circuli H R S G genitum, est ad hemisphæroidem ex rotatione quadrantis ellipseos H N P G in eâdem ratione. Cum igitur hemisphærium sit ad cylindrum circumscriptum ut 2 ad 3 (170. lib. 2.) erit etiam hemisphærois ad cylindrum circumscriptum qui per rotationem rectanguli H G P X generatur, in eâdem ratione 2 ad 3. Q. E. D.

(r) * *In angulo nonnihil acuto.* Nam quemadmodum angulus quem cataractæ ABNFEM

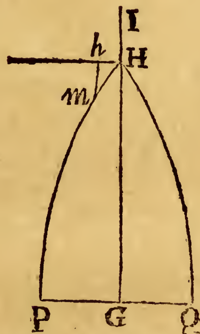
aqua cadendo perpetuò acceleratur & propter accelerationem fit tenuior; & cum angulus ille sit recto minor, hæc columna ad inferiores ejus partes (s) jacebit intra dimidium sphæroidis. (t) Eadem verò sursum acuta erit seu cuspidata, ne horizontalis motus aquæ ad verticem sphæroidis sit infinitè velocior quàm ejus motus horizontem versus. (u) Et quò minor est circellus PQ, eò acutior erit vertex columnæ; & circello in infinitum diminuto, angulus



ABNFEM superficies externa AME, BNF cum basi CE, DF constituit, est semper acutus, quia aqua cadendo semper acceleratur (272.) Sic etiam, ob eandem rationem, columnæ PHQ superficies externa concurret cum basi PQ in angulo acuto HPQ, HQP. Quia verò circulo PQ evanescente, seu coincidente HP cum axe HG, angulus ille HPG rectus evadit; si circulus est valdè parvus; angulus HPG erit ferè rectus seu nonnihil acutus.

(s) *Jacebit intrà dimidium sphæroidis.* Quia (ex naturâ ellipseos) in quâ tangentes per axium vertices ductæ angulos rectos cum axibus constituunt, sphæroidis superficies cum circello PQ, concurrit in angulo recto.

(t) * *Eadem verò sursum acuta erit.* Cum enim partes aquæ duplici motu cieantur in H, alio verticali qui lapsu per altitudinem IH acquiritur, alio horizontali quo partes aquæ ad cataractam formandam ad se mutuò accedunt, uti suprà antè cas. 1um. dictum est, atquè ideò guttula aquæ in H, lineam curvam HP motu composito describat, necessum est ut angulus PHG sit acutus, & proindè columna PHQ cuspidata in H. Describat enim guttula aquæ lineam quam minimam Hh, motu horizontali, & eodem temporis momento lineam hm, motu verticali, atquè arcum Hm motu composito; & velocitas horizontalis erit ad velocitatem verticalem ut Hh ad hm,

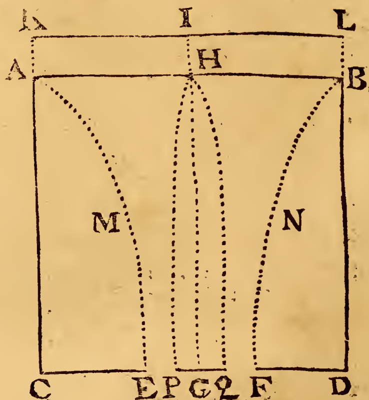


id est, ut sinus hmH seu mHG ad sinum anguli hHm. Sed evanescente angulo hHm, seu angulo mHG recto existente, sinus anguli mHG, infinitè major est sinu anguli hHm. Quare si angulus mHG rectus sit, horizontalis motus aquæ erit infinitè major quam motus ejus verticalis. Quod absurdum est; angulus igitur mHG acutus est. 276.

(u) * *Et quò minor est circellus PQ.* Nam si circellus PQ ità augeatur, ut adæquet foramen EF illudque occludat, columna PHQ evadet cylindrica, & rectâ mh coincidente cum Hh angulus mHG rectus erit; & contrà circello in infinitum diminuto, coincidet HmP, cum axe HG, angulusque mHG evanescet. Columna igitur tam ad superiores partes versùs H, quam ad inferiores partes versùs P & Q, jacebit intrà dimidium sphæroidis.

De Motu Corporum.

P H Q in infinitum diminuetur, & propterea columna jacebit intra dimidium sphæroidis. Est igitur columna illa minor dimidio sphæroidis, seu duabus tertiis partibus cylindri cujus basis est circellus ille & altitudo *G H*. Sustinet autem circellus vim aquæ ponderi hujus columnæ æqualem, cum pondus aquæ ambientis in defluxum ejus impendatur.



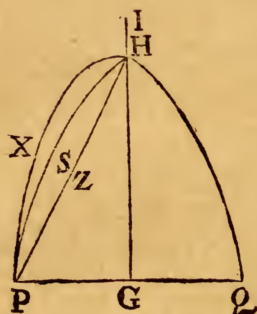
Corol. 9. Pondus aquæ quam circellus valdè parvus *P Q* sustinet, æquale est ponderi cylindri aquæ cujus basis est circellus ille & altitudo est $\frac{1}{2}$ *G H* quamproximè. (x) Nam pondus hocce est medium arithmeticum inter pondera coni & hemisphæroidis prædictæ. At si circellus ille non sit valde parvus, sed augeatur donec æquet foramen *E F*; hic sustinebit pondus aquæ totius sibi perpendiculariter imminentis, id est, pondus cylindri aquæ cujus basis est circellus ille & altitudo est *G H*.

Corol. 10. Et (quantum sentio) pondus quod circellus sustinet, est semper ad pondus cylindri aquæ, cujus basis est circellus ille & altitudo est $\frac{1}{2}GH$, (y) ut EFq ad $EFq - \frac{1}{2}PQq$, sive ut circulus *E F* ad excessum circuli hujus supra semissem circelli *P Q* quamproximè.

(x) * *Nam pondus hocce est medium arithmeticum.* Cum enim columna illa aquæ, quam circellus valdè parvus susti- net, major sit tertiâ parte cylindri cujus basis est circellus ille & altitudo H G (cor. 7.), & minor duabus tertiis partibus ejusdem cylindri (cor. 8.); erit ferè æqualis medio arithmetico inter cylindros $\frac{1}{3}$ PQ × HG; & $\frac{2}{3}$ PQ × HG. Est autem medium illud arithmeticum æquale dimidiæ summæ illorum cylindrorum, id est, cylindro $\frac{1}{2}$ PQ × HG, cujus basis est circellus PQ, & altitudo $\frac{1}{2}$ HG.

(y) * *Ut* EFq *ad* $EFq - \frac{1}{2}PQq$. Hæc enim suppositio superioribus determinationibus satisfacit. Nam sit p pondus aquæ quam circellus sustinet; P pondus cylindri aquæ cujus basis est circellus ille & altitudo GH; & si (juxtà cor. hoc 10.) ponatur $p : \frac{1}{2}P = EF^2 : EF^2 -$ $\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}$ PQ², erit $p = \frac{\frac{1}{2} P \times EF^2}{EF^2 - \frac{1}{2} PQ^2}$. Sed quantitas $\frac{\frac{1}{2} P \times EF^2}{EF^2 - \frac{1}{2} PQ^2} = \frac{P \times EF^2}{2EF^2 - PQ^2}$ semper major est quantitate $\frac{1}{3}$P, quod cor. 7. satisfacit. Et contrà quantitas illa $\frac{P \times EF^2}{2EF^2 - PQ^2}$, minor est quam $\frac{2}{3}$P, ubi circellus est, satis parvus seu quamdiu $2\overline{PQ}^2 < EF^2$ (cum enim sit $\overline{PQ}^2 = \frac{EF^2}{2}$, tunc illa quantitas p est $\frac{2P \times \overline{EF}^2}{3EF^2} = \frac{2}{3}P$, (quæ est determinatio cor. 8.). Tandem ubi circellus infinitè minor est quam foramen EF, fit $\frac{P \times EF^2}{2EF^2 - PQ^2} = \frac{1}{2}$P, & ubi circellus adæquat foramen EF, est $\frac{P \times EF^2}{2EF^2 - PQ^2} = P$, quæ duo cum cor. 9. determinationibus congruunt.



277. Si circellus PQ sit valdè parvus, & vertice P axe PG describatur per punctum H, parabolæ arcus PSH, & figura PSHG circà HG convolvatur, solidum indè genitum columnam aquæ quam circellus sustinet exhibebit quam proximè. Nam angulus SPG quem parabola cum axe PG, continet, rectus est, & ideò quam proximè æqualis angulo quem prædictæ columnæ superficies cum circello valdè parvo PQ efficit (cor. 8.); & evanescente PG, angulus SHG arcu parabolæ SH & rectâ HG comprehensus sit infinitè parvus, ut oportet (per idem cor. 8.). Præterea si jungatur recta PZH, & centro G, ac semiaxibus conjugatis GH, & GP describatur ellipseos quadrans PXH, & figuræ PZHG, PSHG, PXHG circà axem HG convolvantur, solidum quod per revolutionem figuræ parabolicæ PSHG generatur, majus erit cono ex rotatione trianguli PZHG genito, & minus hemisphæroide quam figura PXHG rotata describit, quod cor. 7°. & 8°. satisfacit. Tandem, calculo inito, facilè patet solidum quod per convolutionem figuræ PSHG, gignitur, esse ad cylindrum cujus basis est circellus PQ, & altitudo GH, ut 8 ad 15, quæ ratio non multum aberrat à ratione 1 ad 2 quam Newtonus in cor. 9. invenit. 277.

LEMMA IV.

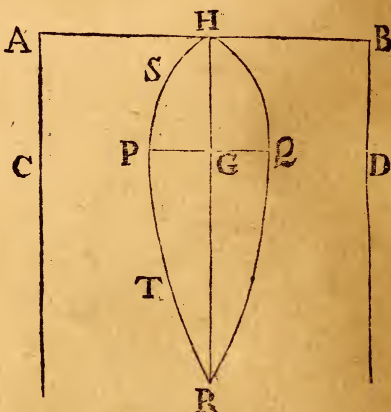
Cylindri, qui secundum longitudinem suam uniformiter progreditur, resistentia ex auctâ vel diminutâ ejus longitudine non mutatur; ideoque eadem est cum resistentia circuli eâdem diametro descripti & eâdem velocitate secundùm lineam rectam plano ipsius perpendicularem progredientis.

(z) Nam latera cylindri motui ejus minimè opponuntur: & cylindrus, longitudine ejus in infinitum diminutâ, in circulum vertitur.

PRO-

278. Si circulus PQ valdè parvus maneat respectu foraminis EF, foramen verò EF quantumvis augeatur finitum sit, & vas ABDC infinitum evadat, æquales erunt altitudines IG & HG, & velocitas aquæ in loco PQ, ea erit quam aqua cadendo & casu suo describendo altitudinem HG, acquirere potest (per cor. 1. Prop. hujus 36.). Iisdem positis, si vas ABDC infrà circulum PQ continuetur, & aqua postquam pervenit ad locum PQ, solâ vi insitâ pergat uniformiter moveri cum illâ velocitate quam habet in loco PQ, sitque PQR columna aquæ congelatæ, cujus fluiditas ad promptissimum alterius aquæ motum non requiritur, ut suprà de columnâ PHQ dictum est; erit GR = 2GH & PTR ferè arcus parabolæ cujus vertex P axis PG, & ordinata GR. Nam * fingatur considerari lapsum ejus aquæ quæ per conoeidem HPQ moveretur seorsim à lapsu reliquæ aquæ Vasis, liquet quod eo tempore quo aquæ guttâ motu verticali uniformiter accelerato cadit ex H in G effluet bis ea aquæ copia quæ in conoeide HPQ continetur ea ergo aquæ copia erit æqualis cylindro cujus altitudo erit HG, & Basis circulus PQ, particula verò G celeritate ex lapsu per H acquisita describet 2HG sive GR, tota ergo aqua quæ per Conoidem HPQ movebitur occupabit figuram cujus Basis est circulus PQ, cujus altitudo est 2HG, & soliditas dimidium cylindri cujus PQ foret Basis & altitudo 2HG, sed per præcedentem Paraboloeides est ferè dimidium cylindri circumscripti ergo aqua per Conoidem effluit eum Paraboloeidem occuparet est ergo columna PQR columna aquæ congelatæ quæ ad promptissimum aquæ reliquæ circumpositæ motum non requiritur. Hæc ad demonstrationem Scholii proximi hic adnectenda visa sunt, utrum satis rectè Newtonianæ demonstrationis indolem simus assecuti videat B. Lector,

Si quid novisti rectiùs istis
Candidus imperti; si non, his utere mecum.

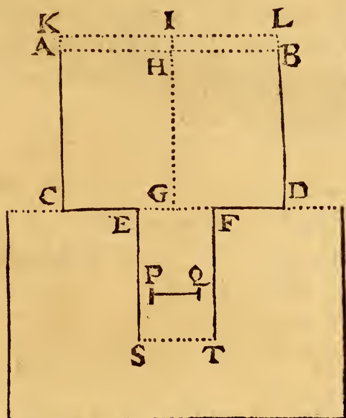


(z) * *Nam latera cylindri &c.* Hic enim latera cylindri esse politissima, & medii tenacitatem & frictionem esse nullam supponitur.

279. Lemma. *Vires uniformes sunt directè ut quantitates motus quas generant, & inversè ut tempora quibus illas generant,* (13. & 15. lib. 1.); & quia motûs quantitates sunt ut massæ & velocitates conjunctim, sive ut volumina & densitates & velocitates, *vires uniformes sunt etiam in ratione compositâ ex rationibus directis voluminum, densitatum & velocitatum & ratione inversâ temporum quibus velocitates illas generant*; cumque tempora illa sint ut

PROPOSITIO XXXVII. THEOREMA XXIX.

Cylindri, qui in fluido compresso infinito & non elastico secundum longitudinem suam uniformiter progreditur, resistentia, quæ oritur à magnitudine sectionis transversæ, est ad vim quâ totus ejus motus, interea dum quadruplum longitudinis suæ describit, vel tolli possit vel generari, ut densitas medii ad densitatem cylindri quamproximè.



Nam si vas $ABDC$ fundo suo CD superficiem aquæ stagnantis tangat, & aqua ex hoc vase per canalem cylindricum $EFTS$ horizonti perpendicularem in aquam stagnantem effluat, locetur autem circellus PQ horizonti parallelus ubivis in medio canalis, & producatur CA ad K, ut sit AK ad CK in duplicatâ ratione quam habet excessus orificii canalis EF supra circellum PQ ad circellum AB: manifestum est (per cas. 5. cas. 6. & cor. 1. prop. XXXVI) quod velocitas aquæ transeuntis per spatium annulare inter circellum & latera vasis, ea erit quam aqua cadendo & casu suo describendo altitudinem KC vel IG acquirere potest.

ut spatia descripta directè & velocitates inversè (31. lib. 1.), *vires uniformes sunt quoque in ratione compositâ ex rationibus directis voluminum, densitatum & quadratorum velocitatis & ratione inversâ spatiorum descriptorum*, & quia velocitates sunt ut spatia descripta directè & tempora inversè, *vires uniformes sunt etiam in ratione compositâ ex ratione voluminum, densitatum & spatiorum descriptorum, & ratione inversâ duplicatâ temporum, quibus spatia illa describuntur.*

280. Cor. Quoniam cylindrorum volumina sunt ut eorum altitudines & diametrorum quadrata conjunctim; *vires uniformes quibus urgentur cylindri, sunt in ratione quæ componitur ex rationibus directis altitudinum cylindrorum, quadratorum diametrorum, densitatum & velocitatum à viribus illis genitarum, & ratione inversâ temporum quibus velocitates illas generant*; sunt etiam in ratione quæ componitur ex rationibus directis altitudinum, quadratorum diametrorum, densitatum & quadratorum velocitatum, & ratione inversâ spatiorum descriptorum; Sunt quoque vires illæ in ratione compositâ *ex rationibus directis altitudinum cylindrorum, quadratorum diametrorum, densitatum & spatiorum descriptorum, & ratione inversâ duplicatâ temporum, quibus spatia illa describuntur.* Ubi prædictarum quantitatum, ex quibus virium ratio composita est, aliquæ datæ sunt, iis deletis habetur virium ratio. 280.

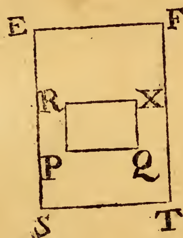
Pp 3

Et (per corol. x. prop. XXXVI.) si vasis latitudo sit infinita, ([a]) ut lineola HI evanescat & altitudines IG, HG æquentur: vis aquæ defluentis in circellum erit ad pondus cylindri cujus basis est circellus ille & altitudo est $\frac{1}{2}IG$, ut EFq ad $EFq - \frac{1}{2}PQq$ quam proximè. Nam vis aquæ, ([b]) uniformi motu defluentis per totum canalem, eadem erit in circellum PQ in quâcunque canalis parte locatum.

Claudantur jam canalis orificia EF, ST, & ascendat circellus in fluido undique compresso & ascensu suo cogat aquam superiorem descendere per spatium annulare inter circellum & latera canalis: & velocitas circelli ascendentis erit ad velocitatem aquæ descendentis ([c]) ut differentia circulorum EF & PQ ad circulum PQ, & velocitas circelli ascendentis ad summam velocitatum, ([d]) hoc est, ad velocitatem relativam aquæ descendentis quâ præterfluit circellum ascendentem, ut differentia circulorum EF & PQ ad circulum EF, sive ut $EFq - PQq$ ad EFq.

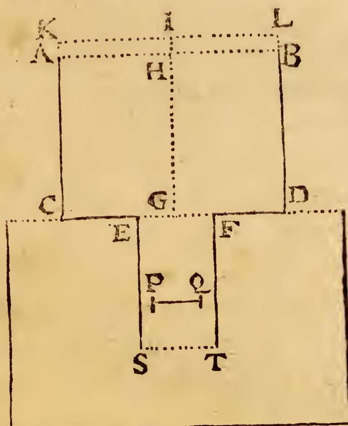
(a) * *Ut lineola HI evanescat.* Per cor. 1. prop. 37. aut (per not. 275.).

(b) * *Uniformi motu defluentis.* (Per cas. 6. prop. 36.).



(c) * *Ut differentia circulorum.* Velocitates uniformes sunt ut spatia eodem tempore descripta; sed intereadum circulus PQ spatium solidum, seu cylindrum PQXR describit, descendit aquæ quantitas huic cylindro æqualis, & propterea altitudo verticalis per quam aqua descendit, æquatur longitudini quæ habetur dividendo valorem cylindri PQXR per valorem sectionis annularis inter circulum PQ & vasis latera ES, FT comprehensam, ideóque si $\overline{EF}^2$ & $\overline{PQ}^2$, circulos, & RP, lineam rectam significent, altitudo illa per quam aqua descendit est $\frac{\overline{PQ}^2 \times RP}{\overline{EF}^2 - \overline{PQ}^2}$. Quarè velocitas circuli ascendentis est ad velocitatem aquæ descendentis ut altitudo RP, ad altitudinem $\frac{\overline{PQ}^2 \times RP}{\overline{EF}^2 - \overline{PQ}^2}$, id est, ut $\overline{EF}^2 - \overline{PQ}^2$ ad $\overline{PQ}^2$, sivè ut differentia circulorum EF & PQ ad circulum PQ.

(d) * *Hoc est ad velocitatem relativam.* Cum circulus ascendat & aqua descendat, velocitas relativa æqualis est summæ velocitatum oppositarum circuli & aquæ. Velocitas absoluta circuli ascendentis dicatur V, velocitas absoluta aquæ descendentis v, & quia circuli sunt ut diametrorum quadrata, si EF, & PQ, pro circulorum diametris sumantur; erit (ex dem.) $V : v = EF^2 - PQ^2 : \overline{PQ}^2$, & ideo $V : V + v = EF^2 - PQ^2 : EF^2$.



EFq. Sit illa velocitas relativa æqualis velocitati, quâ supra ostensum est aquam transire per idem spatium annulare dum circellus interea immotus manet, id est, velocitati quam aqua cadendo & casu suo describendo altitudinem IG acquirere potest: & vis aquæ in circellum ascendentem eadem erit ac prius (per legum corol. v.) id est, resistentia circelli ascendentis erit ad pondus cylindri aquæ cujus basis est circellus ille & altitudo est $\frac{1}{2}IG$, ut EFq ad $EFq - \frac{1}{2}PQq$ quamproximè. Velocitas autem circelli erit ad velocitatem, quam aqua cadendo & casu suo describendo altitudinem IG acquirit, ut $EFq - PQq$ ad EFq.

Augeatur amplitudo canalis in infinitum: & rationes illæ inter $EFq - PQq$ & EFq, interque EFq & $EFq - \frac{1}{2}PQq$ accedent ultimo ad rationes æqualitatis. Et propterea velocitas circelli ea nunc erit quam aqua cadendo & casu suo describendo altitudinem IG acquirere potest, resistentia verò ejus æqualis evadet ponderi cylindri cujus basis est circellus ille & altitudo dimidium est altitudinis IG, à quâ cylindrus cadere debet ut velocitatem circelli ascendentis acquirat; (e) & hâc velocitate cylindrus, tempore cadendi, quadruplum longitudinis suæ describet. Resistentia autem cylindri, hâc velocitate secundùm longitudinem suam progredientis, eadem est cum resistentia circelli (per lemma IV.) ideoque æqualis est vi quâ motus ejus, interea dum quadruplum longitudinis suæ describit, (f) generari potest quamproximè. Si

(e) * *Et hâc velocitate*, cylindrus tempore cadendi duplum longitudinis I G, seu quadruplum longitudinis suæ $\frac{1}{2}$ I G, describet (30. lib. 1.).

(f) * *Generari potest quamproximè.* Quo enim tempore cylindrus cum prædictâ velocitate uniformiter progrediendo, describit spatium 2 I G, proprio pondere cadendo describeret altitudinem I G, & velocitatem illam acquireret (30. lib. 1.). Cum igitur resistentia æqualis sit ponderi cylindri, patet propositum.

280.

De Motu Corporum.

Si longitudo cylindri augeatur vel minuatur: motus ejus ut & tempus, quo quadruplum longitudinis ſuæ deſcribit, (g) augebitur vel minuetur in eâdem ratione, ideoque vis illa, quâ motus auctus vel diminutus, tempore pariter aucto vel diminuto, generari vel tolli poſſit, non mutabitur; ac proinde etiamnum æqualis eſt reſiſtentiæ cylindri, nam & hæc quoque immutata manet per lemma IV.

(h) Si denſitas cylindri augeatur vel minuatur: motus ejus ut & vis quâ motus eodem tempore generari vel tolli poteſt, in eâdem ratione augebitur vel minuetur. Reſiſtentia itaque cylindri cujuſcunque erit ad vim quâ totus ejus motus, interea dum quadruplum longitudinis ſuæ deſcribit, vel generari poſſit vel tolli, ut denſitas medii ad denſitatem cylindri quamproximè. *Q. E. D.*

Fluidum autem comprimi debet ut ſit continuum, (i) continuum verò eſſe debet & non elaſticum, ut preſſio omnis, quæ ab ejus compreſſione oritur, propagetur in inſtanti, & in omnes moti corporis partes æqualiter agendo reſiſtentiam non mutet. Preſſio utique, quæ à motu corporis oritur, impenditur in motum partium fluidi generandum & reſiſtentiam creat.

(g) * *Augebitur vel minuetur.* Quantitas motûs in cylindro cujus baſis, denſitas & velocitas datæ ſunt, augetur vel minuitur in ratione longitudinis cylindri ſeu voluminis, & tempus quo cylindrus datâ illâ velocitate uniformiter progrediendo quadruplum longitudinis ſuæ deſcribit, augetur vel minuitur in eâdem longitudinis auctæ vel diminutæ ratione (5. lib. 1.) ideoque (179) *vis illa quâ motus auctus* &c.

(h) * *Si denſitas cylindri* cæteris manentibus, *augeatur vel minuatur, motus ejus ut & vis quâ motus eodem tempore generari vel tolli poteſt, in eâdem ratione augebitur vel minuetur* (279). Cum igitur cylindri cujuſcunque reſiſtentia æqualis ſit vi quâ motus cylindri aquæ ejuſdem baſis, altitudinis & velocitatis, intereadum quadruplum longitudinis ſuæ deſcribit generari vel tolli poſſit, & vis hæc ſit ad vim quâ totus prioris cylindri motus eodem tempore generari poſſit vel tolli, ut denſitas aquæ ad denſitatem cylindri, conſequens eſt ut reſiſtentia cylindri cujuſcumque ſit ad vim quâ totus ejus motus, intereadum quadruplum longitudinis ſuæ deſcribit generari vel tolli poteſt, ut denſitas aquæ ad denſitatem cylindri quamproximè.

(i) * *Continuum verò eſſe debet & non elaſticum.* Nam ſi fluidum eſſet elaſticum, ipſius partes per compreſſionem condenſarentur, & deinde rarefierent, atque ita preſſio per motum progreſſivum, qui inſtantaneus eſſe non poteſt, propagaretur. At ſi fluidum continuum ſit & denſari compreſſione nequeat, preſſio propagabitur in inſtanti. Experimentis vero conſtat aquam in ſtatu naturali conſtitutam vix poſſe condenſari, ſeu in ſpatium minus compreſſione redigi; cum e contrà aër maximæ condenſationis & rarefactionis ſit capax.

creat. Pressio autem quæ oritur à compressione fluidi, utcunque fortis sit, si propagetur in instanti, nullum generat motum in partibus fluidi continui, nullam omnino inducit motus mutationem; ideoque resistentiam nec auget nec minuit. Certè actio fluidi, quæ ab ejus compressione oritur, fortior esse non potest in partes posticas corporis moti quam in ejus partes anticas, ideoque resistentiam in hac propositione descriptam minuere non potest: & fortior non erit in partes anticas quam in posticas, si modo propagatio ejus infinitè velocior sit quam motus corporis pressi. Infinitè autem velocior erit & propagabitur in instanti, si modo fluidum sit continuum & non elasticum.

(k) *Corol.* 1. Cylindrorum, qui secundum longitudines suas in mediis continuis infinitis uniformiter progrediuntur, resistentiæ sunt in ratione quæ componitur ex duplicatâ ratione velocitatum & duplicatâ ratione diametrorum & ratione densitatis mediorum.

(l) *Corol.* 2. Si amplitudo canalis non augeatur in infinitum, sed cylindrus in medio quiescente incluso secundum longitudinem suam progrediatur, & interea axis ejus cum axe canalis coincidat: resistentia ejus erit ad vim quâ totus ejus motus, quo tempore quadruplum longitudinis suæ describit, vel generari possit vel

(k) *Cor.* 1. Sic demonstratur. Resistentia cylindri cujusque est directè ut densitas medii & vis uniformis quâ totus cylindri motus, quo tempore quadruplum longitudinis suæ describit vel generari vel tolli possit, & inversè ut densitas cylindri (ex dem.); Sed vis illa uniformis est in ratione compositâ ex rationibus directis longitudinis cylindri, quadrati diametri, densitatis & quadrati velocitatis & ex ratione inversâ spatii descripti, seu ex ratione inversâ longitudinis cylindri (280). Quarè (per compositionem rationum & ex æquo), resistentia cylindri cujuscumque, si conferatur cum resistentiâ alterius cylindri, est in ratione quæ componitur ex ratione densitatis medii, & ratione duplicatâ diametri & duplicatâ ratione velocitatis. 280.

(l) * *Cor.* 2. Sic demonstratur. * Si Canalis non sit infinitus respectu baseos cylindri inclusi, resumantur ea quæ sub initium Theor. istius 37. dicebantur; Primo nempe quod ascendente circello in canali clauso, velocitas relativa aquæ semper sit ad ejus velocitatem ut basis cana-

vel tolli, in ratione quæ componitur ex ratione EFq ad $EFq - \frac{1}{2}PQq$ semel, & ratione EFq ad $EFq - PQq$ bis, & ratione densitatis medii ad densitatem cylindri.

Corol. 3. Iisdem positis, & quod longitudo L sit ad quadruplum longitudinis cylindri in ratione quæ componitur ex ratione $EFq - \frac{1}{2}PQq$ ad EFq semel, & ratione EFq $-PQq$

lis E F ad annulum E P sive ad differentiam circulorum E F & P Q sive ut EF^2 ad $EF^2 - PQ^2$; Quæratur igitur altitudo I G talis ut velocitas lapsu per eam acquisita sit ad velocitatem circelli, ut EF^2 ad $EF^2 - PQ^2$, & si fingatur circellus immotus in medio foraminis E F & aquâ cadens ex altitudine I G ex vase amplissimo A B D B per illud foramen, cum velocitas aquæ juxta circellum transiens eadem sit ac velocitas respectiva aquæ juxta cylindrum in canali clauso motum, actio aquæ in circellum utrinque æqualis censenda est, sed actio aquæ sive ejus pondus in circellum per Cor. 10. Prop. 36. est ad cylindrum cujus basis est circellus altitudo $\frac{1}{2}$I G sicut EF^2 ad $EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2$, hæc itaque erit ratio Resistentiæ ad pondus cylindri aquei cujus basis est circellus & altitudo $\frac{1}{2}$I G; Sed gravitas est vis quæ tempore quo percurritur uniformiter quadruplum longitudinis $\frac{1}{2}$ I G sive 2 I G velocitate lapsu per I G acquisitâ, generare potest eam ipsam velocitatem, & pondus cylindri est ipsa gravitas per massam cylindri multiplicata, ergo pondus cylindri, est vis quæ dum percurritur quadruplum longitudinis cylindri velocitate lapsu per I G acquisitâ, generare potest motum ejus cylindri eâ velocitate moti.

Cùm verò celeritas quæ lapsu per I G acquiritur sit ad eam cum quâ cylindrus movetur ut EF^2 ad $EF^2 - PQ^2$. Quadruplum longitudinis cylindri propriâ suâ celeritate alio tempore percurret quam si moveatur celeritate lapsu per I G acquisitâ. Gravitas ergo cylindri, erit ad eam vim quâ cylindri velocitas acquiritur tempore quo quadruplum longitudinis suæ propriâ suâ celeritate describitur, directè ut celeritates quæ iis viribus acquiruntur & inversè ut tempora quibus acquiruntur, quæ tempora (cum agatur de describendo uniformiter eodem spatio quadruplo nempe longitudinis cylindri) sunt inversè ut velocitates, ideoque Pondus cylindri est ad vim quâ ejus cylindri motus acquiritur tempore quo quadruplum longitudinis suæ propriâ suâ celeritate describitur bis directè ut celeritas lapsu per I G acquisita, ad celeritatem Cylindri, sive bis ut EF^2, ad $EF^2 - PQ^2$.

Ergo ex æquo Resistentia est ad eam vim sicut EF^2 ad $EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2$ & bis ut EF^2 ad $EF^2 - PQ$. At, nec resistentia nec ea vis mutantur longitudine cylindri mutata, sed tantum densitate mutatâ ut ex ipsa propositionis demonstratione liquet, est autem vis quâ motus in Cylindro aqueo generatur, dato tempore quo quadruplum suæ longitudinis suâ cum velocitate percurrit, ad eam vim qua motus in æquali cylindro, sed diversæ densitatis æquali cum velocitate moto, eodem tempore generatur, ut densitas

$-PQq$ ad EFq bis: (m) resistentia cylindri erit ad vim quâ totus ejus motus, interea dum longitudinem L describit, vel tolli possit vel generari, ut densitas medii ad densitatem cylindri.

LIBER SECUND. SECT. VII. PROP. XXXVII. THEOR. XXIX.

Scholium.

In hâc propositione resistentiam investigavimus quæ oritur à solâ magnitudine transversæ sectionis cylindri, neglectâ resistentiæ parte quæ ab obliquitate motuum oriri possit. Nam quemadmodum in casu primo propositionis XXXVI. obliquitas motuum, quibus partes aquæ in vase, undique convergebant in foramen EF, impedivit effluxum aquæ illius per foramen: sic in hâc propositione, obliquitas motuum, quibus partes aquæ ab anteriore cylindri termino pressæ, cedunt pressioni & (n) undique divergunt, retardat eorum transitum per loca in circuitu termini illius antecedentis versus posteriores partes cylindri, efficitque ut fluidum ad majorem distantiam commoveatur & resistentiam auget, (o) idque in eâ ferè ratione quâ effluxum aquæ è vase diminuit, id est in ratione duplicatâ 25 ad 21 circiter. Et quemadmodum, in propositionis illius casu primo, effecimus ut partes aquæ perpendiculariter & maximâ copiâ transirent per foramen EF, ponendo quod aqua omnis in vase

sitas aquæ sive medii, ad densitatem Cylindri, ergo tandem Resistentia est ad vim quâ motus in Cylindro generari vel tolli potest quo tempore quadruplum suæ longitudinis propriâ cum velocitate describit, ut EF^2 ad $EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2$ & bis ut EF^2 ad $EF^2 - PQ^2$ & ut densitas medii ad densitatem Cylindri. Q. E. D.

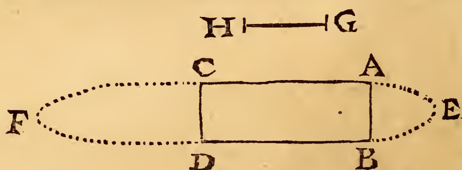
(m) * *Resistentia cylindri erit ad vim.* Nam (per cor. 2. & hyp.) resistentia cylindri est ad vim quâ totus ejus motus, quo tempore quadruplum longitudinis suæ uniformiter describit vel generari possit vel tolli, in ratione compositâ ex ratione quadruplæ longitudinis cylindri ad longitudinem L & ratione densitatis medii ad densitatem cylindri, & (279) vis quâ totus cylindri motus, intereadum quadruplum longitudinis suæ describit, generari vel tolli possit, est ad vim quâ idem ejusdem cylindri motus quo tempore longitudinem L uniformiter describit vel tolli possit vel generari, in ratione inversâ temporum, sive ob eamdem utrinque celeritatem in ratione inversâ spatiorum, hoc est, in ratione longitudinis L ad quadruplum longitudinis cylindri. Quare (ex æquo) resistentia cylindri est ad vim quâ totus ejus motus, intereadum longitudinem L uniformiter describit tolli possit vel generari, ut densitas medii ad densitatem cylindri. 280.

(n) * *Et undiquè divergunt.* Vid. Prop. 41. & 42. lib. hujus.

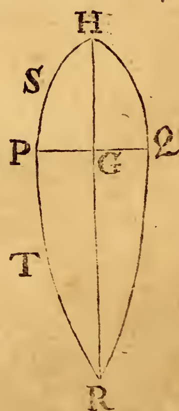
(o) * *Idque in eâ ferè ratione.* Eodem enim ferè modo motus obliqui in aquæ partibus excitantur, sive aqua in planum circuli immotum impingat, sive circulus eâdem cum velocitate in aquâ quiescente feratur.

De Motu Corporum.

ſe quæ in circuitu cataractæ congelata fuerat, & cujus motus obliquus erat & inutilis, maneret ſine motu: ſic in hâc propoſitione, ut obliquitas motuum tollatur & partes aquæ motu maximè directo & breviſſimo cedentes facillimum præbeant tranſitum cylindro, & ſola maneat reſiſtentia, quæ oritur à magnitudine ſectionis tranſverſæ, quæque diminui non poteſt niſi diminuendo diametrum cylindri, concipiendum eſt quod partes fluidi, quarum motus ſunt obliqui & inutiles & reſiſtentiam creant, quieſcant inter ſe ad utrumque cylindri terminum, & cohæreant & (p) cylindro jungantur. Sit *ABCD* rectangulum, & ſint *AE* & *BE* arcus duo parabolici axe *AB* deſcripti, latere autem recto quod ſit ad ſpatium *HG*, deſcribendum à cylindro cadente dum velоci-



(p) * *Et Cylindro jungantur.* Ut num. 277. 278. factum eſt, ubi circulo P Q in quem aqua influebat cum eâ velocitate quam cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem H G acquirit & deinde movebatur uniformiter junctæ ſunt glaciei columnæ duæ parabolicæ P H Q & P R Q, quæ aquas exhibent, quarum fluiditas ac motus ſunt inutiles, & parabolarum P S H, P T S erat vertex principalis P, axis P G, & ordinatæ G H, ac G R, ideóque parabolæ P S H, latus rectum $\frac{GH^2}{PG}$, & parabolæ PTR latus rectum $\frac{GR^2}{PG}$ ſeu $\frac{4GH^2}{PG}$ prioris $\frac{GH^2}{PG}$, quadruplum (per theor. 1. de parab.). Hinc ſi aqua quieſcat & circulus P Q in aquâ moveatur cum eâdem velocitate quam grave cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem H G acquirit, columnæ illæ P H Q & P R Q aquas ferè exponent quarum fluiditas ac motus inutiles ſunt ut partes aquæ motu maximè directo & breviſſimo cedentes facillimum præbeant tranſitum circulo. Sed (per Lem. IV.) loco circuli P Q ſubſtitui poteſt cylindrus A B D C



eâdem velocitate motus, & cujus baſes AB, CD circulo P Q æquales ſint, quibus proinde baſibus adjungendæ ſunt columnæ duæ A E B, C F D columnis PHQ, P R Q æquales reſpectivè, atque idipſum eſt quod Newtonus in hoc ſcholio fecit. Siquidem junctâ E F, mediis baſibus A B, C D, occurrente in L & K, & poſitis

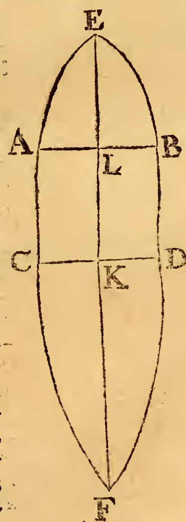
A B;

locitatem suam acquirit, ut HG ad $\frac{1}{2}AB$. Sint etiam CF & DF arcus alii duo parabolici, axe CD & latere recto quod sit prioris lateris recti quadruplum descripti; & convolutione figuræ circum axem EF generetur solidum cujus media pars $ABDC$ sit cylindrus de quo agimus, & partes extremæ ABE & CDF contineant partes fluidi inter se quiescentes & in corpora duo rigida concretas, quæ cylindro utrinque tanquam caput & cauda adhæreant. Et solidi $EACFDB$, secundum longitudinem axis sui FE in partes versus E progredientis, resistentia ea erit quamproxime quam in hâc propositione descripsimus, id est, quæ rationem illam habet ad vim quâ totus cylindri motus, interea dum longitudo $4AC$ motu illo uniformiter continuato describatur vel tolli possit vel generari, quam densitas fluidi habet ad densitatem cylindri quamproxime. (q) Et hâc vi resistentia minor esse non potest quàm in ratione 2 ad 3. per corol. 7. prop. XXXVI. LEM-

Liber Secund. Sect. VII. Prop. XXXVII. Theor. XXIX.

AB & CD ipsi PQ æqualibus; est (per Newt. constr.) Parabolæ AE latus rectum $\frac{HG^2}{AL} = \frac{HG^2}{PG} = \frac{EL^2}{AL}$, & ideò $EL = HG$. Et simili modo parabolæ CF, Newtonianâ constructione descriptæ, latus rectum est $\frac{4HG^2}{PG} = \frac{KF^2}{CK} = \frac{KF^2}{PG}$, ac proindè $KF = 2HG = GR$. Columnæ igitur AEB & CFD, non differunt à columnis PHQ & PRQ.

(q) * *Et hâc vi resistentia minor esse non potest* &c. Resistentia (per cor. 7. prop. 36.) minor esse non potest pondere cylindri aquæ, cujus basis est circellus PQ (sive AB) & altitudo $\frac{1}{3}$ EL seu $\frac{1}{3}$ HG. (vid. figuras superiores.) Velocitas quam hic cylindrus aquæ, vi ponderis sui cadendo & casu suo describendo altitudinem EL acquirit, æqualis est velocitati cum quâ cylindrus ACDB, in aquâ movetur (ex dem.) & ideò cum basis AB sit etiam utrique cylindro communis, pondus cylindri aquæ erit ad vim quâ totus cylindri ABDC motus, quo tempore longitudinem 4 AC uniformiter describit, generari possit vel tolli, in ratione compositâ ex ratione densitatis aquæ ad densitatem cylindri ABDC, & ratione altitudinis $\frac{1}{3}$ EL ad altitudinem AC, & ratione spatii 4AC ad spatium 2 EL (280), 280. id est, in ratione compositâ ex ratione densitatis aquæ ad densitatem cylindri ABDC & ratione 2 ad 3. Si itaque vis quâ totus cylindri ABDC, motus, intereadum longitudinem 4 AC, uniformiter describit, generari vel tolli possit, sit ad vim aliquam P, ut densitas cylindri ABDC ad densitatem aquæ, erit (ex æquo) pondus prædicti cylindri aquæ ad vim P ut 2 ad 3, atque ideò pondus cylindri aquæ, quo resistentia minor esse non potest; quam in ratione 2 ad 3.



DE MOTU CORPORUM.

LEMMA V.

Si cylindrus, sphæra & sphærois, quorum latitudines sunt æquales, in medio canalis cylindrici ita locentur successivè ut eorum axes cum axe canalis coincidant: hæc corpora fluxum aquæ per canalem æqualiter impedient.

(r) Nam spatia inter canalem & cylindrum, sphæram, & sphæroidem per quæ aqua transit, sunt æqualia: & aqua per æqualia spatia æqualiter transit.

Hæc ita se habent ex hypothesi, quòd aqua omnis supra cylindrum sphæram vel sphæroidem congelatur, cujus fluiditas ad celerrimum aquæ transitum non requiritur, ut in corol. VII. prop. XXXVI. explicui.

LEMMA VI.

Iisdem positis, corpora prædicta æqualiter urgentur ab aquâ per canalem fluente.

Patet per lemma V. & motus legem tertiam. Aqua utique & corpora in se mutuo æqualiter agunt.

LEMMA VII.

Si aqua quiescat in canali, & hæc corpora in partes contrarias æquali velocitate per canalem ferantur: æquales erunt eorum resistentiæ inter se.

Constat ex lemmate superiore, nam motus relativi iidem inter se manent.

Scho-

(r) * *Nam spatia inter canalem & transversas sectiones, seu latitudines maximas cylindri, sphæræ & sphæroidis per quæ aqua transit sunt æqualia.* Vid. Schol. sequens.

Scholium.

Eadem eſt ratio corporum omnium convexorum & rotundorum, quorum axes cum axe canalis coincidunt. Differentia aliqua ex majore vel minore frictione oriri poteſt; ſed in his lemmatis corpora eſſe politiſſima ſupponimus, & medii tenacitatem & frictionem eſſe nullam, & quod partes fluidi, quæ motibus ſuis obliquis & ſuperfluis fluxum aquæ per canalem perturbare, impedire, & retardare poſſunt, quieſcant inter ſe tanquam gelu conſtrictæ, & corporibus ad ipſorum partes anticas & poſticas adhæreant, perinde ut in ſcholio propoſitionis præcedentis expoſui. Agitur enim in ſequentibus de reſiſtentiâ omnium minimâ quam corpora rotunda, datis maximis ſectionibus tranſverſis deſcripta, habere poſſunt.

Corpora fluidis innatantia, ubi moventur in directum, efficiunt ut fluidum ad partem anticam aſcendat, ad poſticam ſubſidat, præſertim ſi figura ſint obtuſa; & inde reſiſtentiam paulo majorem ſentiunt quàm ſi capite & caudâ ſint acutis. Et corpora in fluidis elaſticis mota, ſi ante & poſt obtuſa ſint, fluidum paulo magis condenſant ad anticam partem; & paulo magis relaxant ad poſticam; & inde reſiſtentiam paulo majorem ſentiunt quam ſi capite & caudâ ſint acutis. Sed nos in his lemmatis & propoſitionibus non agimus de fluidis elaſticis, ſed de non elaſticis; non de inſidentibus fluido, ſed de altè immerſis. Et ubi reſiſtentia corporum in fluidis non elaſticis innoteſcit, augenda erit hæc reſiſtentia aliquantulum tam in fluidis elaſticis, qualis eſt aer, quàm in ſuperficiebus fluidorum ſtagnantium, qualia ſunt maria & paludes.

De Motu Corporum.

PROPOSITIO XXXVIII. THEOREMA XXX.

Globi, in fluido compresso infinito & non elastico uniformiter progredientis, resistentia est ad vim quâ totus ejus motus, quo tempore octo tertias partes diametri suæ describit, vel tolli possit vel generari, ut densitas fluidi ad densitatem globi quamproximè.

(ſ) Nam globus est ad cylindrum circumscriptum ut duo ad tria; & propterea vis illa, quæ tollere possit motum omnem cylindri interea dum cylindrus describat longitudinem quatuor diametrorum, globi motum omnem tollet interea dum globus describat duas tertias partes hujus longitudinis, id est, octo tertias partes diametri propriæ. Resistentia autem cylindri est ad hanc vim quamproximè ut densitas fluidi ad densitatem cylindri vel globi per prop. XXXVII. & resistentia globi æqualis est resistentiæ cylindri per lem. V, VI, VII. *Q. E. D.*

(t) *Corol.* 1. Globorum, in mediis compressis infinitis, resistentiæ sunt in ratione quæ componitur ex duplicatâ ratione velocitatis, & duplicatâ ratione diametri, & ratione densitatis mediorum.

Corol. 2. Velocitas maxima quâcum globus, vi ponderis sui comparativi, in fluido resistente potest descendere, ea est quam acquirere potest globus idem, eodem pondere, sine resistentiâ cadendo & casu suo describendo spatium quod sit ad quatuor tertias partes diametri suæ ut densitas globi ad densitatem

(ſ) * *Nam globus est ad cylindrum circumscriptum ut duo ad tria* (170. lib. I.) & propterea, cum eadem sit globi & cylindri densitas eademque velocitas (ex hyp.) quantitas motûs globi est ad quantitatem motûs cylindri ut duo ad tria, & tempus quo globus octo tertias partes diametri propriæ uniformiter describit, est ad tempus quo cylindrus eâdem uniformi velocitate quadruplum longitudinis suæ, seu duodecim tertias diametrorum globi describit, etiam ut duo ad tria. Quarè (178) vis uniformis quâ totus globi motus intereadum octo tertias partes diametri propriæ describit tolli possit vel generari, est ad vim uniformem quâ totus cylindri motus, quo tempore longitudinem quatuor diametrorum globi describit vel tolli vel generari possit ut duo ad tria directè & duo ad tria inversè, id est, in ratione æqualitatis. *Resistentia autem cylindri &c.*

(t) * *Cor.* 1. Patet per cor. 1. prop. 37., quia resistentia globi æqualis est resistentiæ cylindri circumscripti.

tatem fluidi. Nam globus tempore casus sui, cum velocitate cadendo acquisitâ, ([u]) describet spatium quod erit ad octo tertias diametri suæ, ut densitas globi ad densitatem fluidi; & vis ponderis motum hunc generans, erit ad vim quæ motum eundem generare possit, quo tempore globus octo tertias diametri suæ eâdem velocitate describit, ut ([x]) densitas fluidi ad densitatem globi: ideoque per hanc propositionem, vis ponderis æqualis erit vi resistentiæ, & propterea globum accelerare non potest.

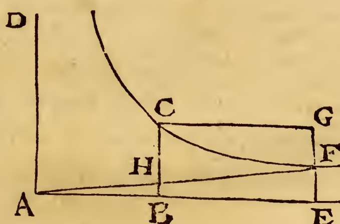
LIBER SECUND. SECT. VII. PROP. XXXVIII. THEOR. XXX.

([y]) *Corol.* 3. Datâ & densitate globi & velocitate ejus sub initio motus, ut & densitate fluidi compressi quiescentis in quo globus movetur; datur ad omne tempus & velocitas globi & ejus resistentia & spatium ab eo descriptum, per corol. VII. prop. XXXV.

(u) * *Describet spatium quod erit ad octo tertias partes diametri suæ &c.* Describet enim spatium duplum illius quod vi ponderis sui comparativi sine resistentia cadendo descripsit (30. lib. 2.), id est, *spatium quod erit ad octo tertias partes &c.*

(x) * *Ut densitas fluidi ad densitatem globi.* Sit D diameter globi, $2F$ spatium quod sit ad $\frac{8}{3}D$ ut densitas globi ad densitatem fluidi; & tempus quo globus uniformiter describit spatium $\frac{8}{3}D$, erit ad tempus quo eâdem uniformi velocitate describit spatium $2F$, ut $\frac{8}{3}D$ ad $2F$ (5. lib. 1.), id est, ut densitas fluidi ad densitatem globi. Cum igitur vires uniformes sint reciprocè ut tempora quibus motus æquales generant (279), patet propositum.

(y) 282. Cor. 3. *Datâ & densitate globi & velocitate ejus sub initio motus & densitate fluidi datur ad omne tempus & velocitas globi, & ejus resistentia & spatium ab eo descriptum.* * Primum, ex datâ densitate globi, & densitate fluidi, invenietur, per Cor. 2, vis æqualis resistentiæ cum velocitas ea est quam

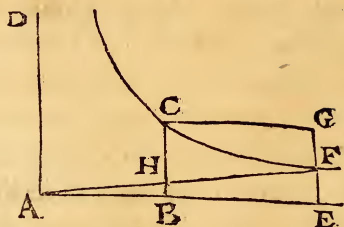


acquirere potest is globus, cadendo in vacuo per vim sui ponderis comparativi & describendo spatium quod sit ad quatuor tertias Diametri suæ ut densitas globi ad densitatem fluidi. 282.

Secundò, ex datâ hac resistentiâ invenietur resistentia quæ competit velocitati globi de quo agitur sub initio ejus motus, quia resistentiæ hic supponuntur esse ut quadrata velocitatum; istâ autem resistentiâ cognitâ dabitur tempus quo si hæc resistentia uniformiter ageret totam velocitatem quam habet globus sub initio motus destruere posset, sicque si BC designet eam velocitatem initio motus simulque resistentiam ipsi competentem, designeturque per AB illud tempus quo ea velocitas per resistentiam uniformem destrui potest, & erecto

De Motu Corporum.

cto perpendiculo AD, asymptotis AD, AB per punctum C describatur Hyperbolâ, ex ejus Hyperbolæ constructione dabitur ad quodlibet tempus (quod designabitur per BE) velocitas residua EF, resistentia BH, & spatium descriptum CBEF; Quâ autem ratione hæc singula ad calculum revocentur dicendum.



I. Vis illa quæ resistentiæ æqualis esse debet cum Corpus habet velocitatem maximam quam lapsu suo in fluido dato acquirere potest, est ipsum pondus comparativum corporis, sit ergo A ejus pondus, Densitas data corporis est ad densitatem fluidi, ut A ad pondus æqualis voluminis fluidi, quo invento, detrahatur illud ex pondere A, relinquitur pondus comparativum globi in fluido quod dicatur B.

Ut præterea determinetur tempus quo eo pondere B corpus percurret cadendo spatium quod sit ad quatuor tertias Diametri suæ ut ejus densitas ad densitatem fluidi, sive, si dicatur *D* Diameter & dicatur *F* spatium quod sit ad $\frac{4}{3}D$ ut densitas globi ad densitatem medii, ut determinetur tempus quo globus pondere *B* cadendo percurret spatium *F* posito quod grave cadendo in vacuo pondere A tempore unius minuti secundi pedes Parisienses $15\frac{1}{12}$ percurrit, & cum spatia diversis viribus acceleratricibus descripta eodem tempore sint ut illæ vires, spatium $15\frac{1}{12}$ pedum pondere A uno minuto secundo percursum est ad spatium eodem tempore pondere *B* percursum ut A ad B. Ut autem est illud spatium, ad spatium *F*, ita quadratum minuti unius secundi ad quadratum temporis quo eo pondere *B* spatium *F* percurretur, quod tempus dicatur *G*, cumque velocitate per lapsum acquisitâ duplum spatii lapsu percursi uniformiter describatur ipso lapsus tempore, ideo velocitate pondere *B* tempore *G* acquisitâ, eodem tempore *G* describeretur $2F$, cumque velocitas omnis exprimatur per spatium divisum per tempus erit ea velocitas maxima $\frac{2F}{G}$ quæ in posterum dicatur *H*.

II. Datâ autem quâvis aliâ ejusdem globi velocitate in eodem fluido eaque dicatur M, resistentia ipsi competens ita obtinetur, ut quadratum velocitatis H ad quadratum velocitatis hujusce *M*, ita est resistentia adversus velocitatem H cui pondus B æquiponet, ad resistentiam adversus velocitatem *M*, quam vocabo *R*; cum ergo prius data sit ratio *A* ad *B* dabitur etiam ratio *A* ad *R* ideoque dabitur spatium quod actione vi *R* uniformi suppositâ per unum minutum secundum describeretur, siquidem spatia per diversas vires uniformes acceleratrices descripta iisdem temporibus sunt ut illæ vires, ideoque *A* ad *R* ut $15\frac{1}{12}$ ped. ad spatium uno minuto secundo descriptum, cujus spatii duplum per unum minutum secundum divisum exprimit velocitatem vi *R* per unum minutum secundum productam. Unde invenietur tempus quo per eam vim *R* uniformiter agentem velocitas *M* produci vel etiam destrui posset, velocitates enim per eamdem vim acquisitæ sunt ut tempora quibus acquiruntur; Ergo velocitas tempore unius minuti secundi acquisita est ad velocitatem *M*, ut unum minutum secundum ad tempus quo vis *R* velocitatem *M* generare vel tollere posset. Unde tandem in Hyperbolæ constructione datur valor temporis per lineam AB designati.

Sumatur ergo BE quod sit ad AB ut tempus quod assumere lubet ad tempus illud quo vis *R* velocitatem *M* quæ per BC exprimitur generare vel tollere potest uniformiter agendo, & ducatur ordinata EF, ea designabit velocitatem globi eo tempore superstitem quæ ex naturâ Hyperbolæ habebitur, est enim AE, ad AB, sicut BC sive *M* ad BEF, unde cum sit AE = AB + BE; sitque AB tempus mox inventum, BE tempus assumptum, BC sive *M* velocitas data, datur etiam EF.

Datur pariter resistentia BH, est enim BC ad

(z) *Corol.* 4. Globus in fluido compresso quiescente ejusdem secum densitatis movendo, dimidiam motus sui partem prius amittet quam longitudinem duarum ipsius diametrorum descripserit, per idem corol. VII.

PRO-

282

BC^2 ad EF^2 ut *R* ad hancce novam resistentiam, quæ, prioribus datis, etiam dabitur.

Denique datur spatium à corpore descriptum, datur enim spatium quod velocitate constanti *M* tempore BE percurritur; Est verò area BCGE ad spatium Hyperbolicum BCFE, ut spatium velocitate constanti *M* tempore BE percursum, ad spatium percursum cum velocitate per resistentiam decrescente, at ex naturâ Logarithmorum Hyperbolicorum spatium Hyperbolicum BCFE est Logarithmus quantitatis $\frac{AE}{AB}$, & quia Logarithmi earumdem quantitatum in diversis Logarithmorum seriebus sumpti sunt proportionales, sumatur Logarithmus illius quantitatis $\frac{AE}{AB}$ in Tabulis, vulgaribus, fiatque ut Logarithmus denarii numeri in Tabulis (sive unitas) ad 2.30258509 qui est Logarithmus Hyperbolicus ejusdem denarii numeri, ita Logarith. quantitatis $\frac{AE}{AB}$ ex Tabulis desumptus ad Logarithmum Hyperbolicum ejus quantitatis, habebitur area BCFE, sit ergo dignitas Hyperbolæ $=1$, erit $BC=\frac{1}{AB}$ & area $BCGE=\frac{1}{AB}\times BE$, ideoque ut $\frac{BE}{AB}$, ad Logarithmum quantitatis $\frac{AE}{AB}$ è Tabulis desumptum & multiplicatum per 2.30258509. Ita spatium velocitate constanti BC tempore BE percursum, ad spatium percursum cum velocitate per resistentiam decrescente: Q. E I.

(z) * *Cor.* 4.; * Cum globus & fluidum ejusdem densitatis supponantur, resistentia isto in casu erit æqualis vi quâ totus motus globi generari vel tolli posset quo tempore octo tertias Diametri suæ uniformiter describeret; itaque sit BC motus globi, erit AB tempus quo uniformiter percurreret octo tertias suæ Diametri, sit EF, dimidium BC, quoniam EF exprimit residuum motum, BE erit tempus quo dimidia pars motus amissa fuerit, sed BC ad EF ut AE ad AB & est BC ad EF ut 2 ad 1, per const. ergo etiam $AE=2AB$ & $BE=AB$, ideoque dimidium motum amittet quo tempore percurreret uniformiter octo tertias Diametri suæ; Sed illud spatium uniformiter percursum est ad spatium percursum velocitate per resistentiam decrescente ut $\frac{BE}{AB}$ (sive $\frac{1}{1}$) ad Logarithmum è Tabulis desumptum quantitatis $\frac{AE}{AB}$ (sive $\frac{2}{1}$) multiplicatum per 2.30258509, & ille Logarithmus est .3010300, productum ergo erit .6931 &c. ideo 1. ad .6931 &c. ut $\frac{8}{3}$ D, ad 1.84832 *D*, quod quidem paulo minus est quam 2 *D*, ideo Globus in fluido ejusdem densitatis dimidiam sui motus partem prius describet *quam longitudinem duarum ipsius Diametrorum descripserit*, Q. E. D.

PROPOSITIO XXXIX. THEOREMA XXXI.

Globi, per fluidum in canali cylindrico clausum & compressum uniformiter progredientis, resistentia est ad vim, quâ totus ejus motus, interea dum octo tertias partes diametri suæ describit, vel generari possit vel tolli, in ratione quæ componitur ex ratione orificii canalis ad excessum hujus orificii supra dimidium circuli maximi globi, & ratione duplicatâ orificii canalis ad excessum hujus orificii supra circulum maximum globi, & ratione densitatis fluidi ad densitatem globi quamproximè.

Patet per corol. 2. prop. XXXVII. procedit verò demonstratio (a) quemadmodum in propositione præcedente.

Scholium.

In propositionibus duabus novissimis (perinde ut in lem. v.) suppono quòd aqua omnis congelatur quæ globum præcedit, & cujus fluiditas auget resistentiam globi. Si aqua illa omnis liquescat, augebitur resistentia aliquantulum. Sed augmentum illud in his propositionibus parvum erit & negligi potest; propterea quòd convexa superficies globi totum ferè officium glaciei faciat.

PROPOSITIO XL. PROBLEMA IX.

Globi, in medio fluidissimo compresso progredientis, invenire resistentiam per phænomena.

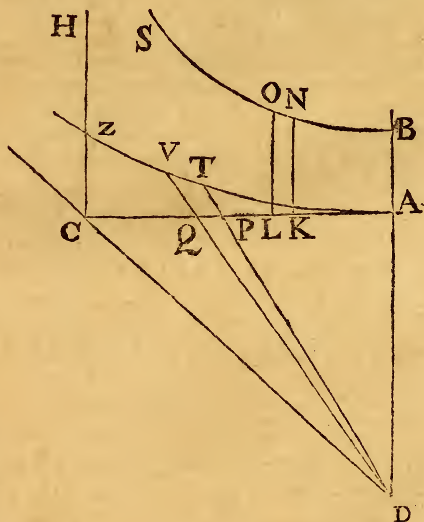
Sit A pondus globi in vacuo, B pondus ejus in medio resisten-

(a) * *Quemadmodum in propositione præcedente.* Demonstratio eadem manet, quæ in nota 281. adjungenda tantum hæc sunt: resistentia autem cylindri est ad hanc vim quam proximè in ratione quæ componitur ex ratione orificii canalis ad excessum hujus orificii supra dimidium circuli maximi globi, & ratione duplicata orificii canalis ad excessum hujus orificii supra circulum maximum globi, & ratione densitatis fluidi ad densitatem globi (per cor. 2. prop. XXXVII.); & resistentia globi æqualis est resistentiæ cylindri, per Lem. V, VI, VII. Q. E. D.

ſiſtente, D diameter globi, F ſpatium quod ſit ad $\frac{4}{3}$D ut denſitas globi ad denſitatem medii, id eſt, (b) ut A ad A−B, G tempus quo globus pondere B ſine reſiſtentiâ cadendo deſcribit ſpatium F, & H velocitas quam globus hocce caſu ſuo acquirit. Et erit H velocitas maxima quâcum globus, pondere ſuo B, in medio reſiſtente poteſt deſcendere, per corol. 2. prop. XXXVIII. & reſiſtentia, quam globus eâ cum velocitate deſcendens patitur, æqualis erit ejus ponderi B: reſiſtentia verò, quam patitur in aliâ quâcunque velocitate, erit ad pondus B in duplicatâ ratione velocitatis hujus ad velocitatem illam maximam H, per corol. 1. prop. XXXVIII.

Hæc eſt reſiſtentia quæ oritur ab inertiâ materiæ fluidi. Ea verò quæ oritur ab elaſticitate, tenacitate, & frictione partium ejus, (c) ſic inveſtigabitur.

De-



(b) 283. * *Id eſt, ut A ad A−B.* Denſitates corporum ejuſdem voluminis ſunt eorumdem pondera in vacuo (2. & 3. lib. 1.); Sed A eſt pondus globi in vacuo, & A−B pondus æqualis globi aquæ etiam in vacuo; nam globus A aquæ immerſum ponderis ſui partem amittit æqualem ponderi paris voluminis æquæ (per cor. 6. prop. XX). Ergo &c.

(c) 284. * *Sic inveſtigabitur.* Ut eorum quæ hic Newtonus profert, demonſtratio facilius intelligatur, non nulla revocanda ſunt, quæ in propoſitionibus VIII. & IX. demonſtravit. Sunto CH & AB rectæ ad datam AC perpendiculares, CH quidem infinita, & BA æqualis $\frac{1}{4}$ AC. Centro C aſymptotis GH, CA deſcribatur per punctum B hyperbola BNS capiantur AC, AP, AK continuè proportionales, & per punctum K ducatur ad hyperbolam recta KN parallela AB. Et ſi corpus grave è quiete cadat in medio quod in duplicatâ velocitatis ratione reſiſtit, exponatque area ABNK ſpatium à corpore cadente deſcriptum; velocitas corporis hocce caſu acquiſita exponi poterit per lineam AP, & ipſius velocitas maxima per datam AC (per cor. 1. & 2 prop. VIII). Producatur jam BA ad D ut ſit AD æqualis AC, jungatur DC, & centro D, aſymptoto DC ac vertice principali A deſcribatur altera hyperbola ATZ, quæ lineam DP productam ſecet in T, & lineam DQ ipſi DP infinitè propinquam in V; & ſector evaneſcens DTV erit æqua- 284.

 lis

Demittatur globus ut pondere ſuo B in fluido deſcendat; & ſit P tempus cadendi, idque in minutis ſecundis ſi tempus G in minutis ſecundis habeatur. Inveniatur numerus abſolutus N qui congruit logarithmo 0,4342944819 $\frac{2P}{G}$, ſitque L logarithmus numeri $\frac{N+1}{N}$: & velocitas cadendo acquiſita

lis $\frac{PDQ \times AC}{CK}$, & ſector ATD tempus exponet quo corpus cadendo deſcrieribit ſpatium ABNK & quo velocitatem AP acquirit (per caſum 2. prop. IX.). Spatium verò quod corpus tempore quovis ATD cadendo deſcribit, erit ad ſpatium quod corpus velocitate maximâ AC, eodem tempore uniformiter progrediendo, deſcribere poteſt, ut area ABNK ad aream ATD (per cor. 1. prop IX), & tempus quo corpus in medio reſiſtente cadendo velocitatem AP acquirit, erit ad tempus quo velocitatem maximam AC in medio non reſiſtente vi ponderis ſui comparativi cadendo acquirere poſſet, ut ſector ATD ad triangulum ADC (per cor. 5. prop. IX.).

285. His præſuppoſitis, dicantur $AC = AD = a$, $AB = \frac{1}{4}a$, $AP = x$, $PQ = dx$, & quia $AC : AP = AP : AK$, erit $AK = \frac{xx}{a}$, $CK = \frac{aa - xx}{a}$, triangulum PDQ $= \frac{1}{2}a\,dx$, & ſector $DTV = \frac{PDQ \times AC}{CK} = \frac{\frac{1}{2}a^3\,dx}{aa - xx} = \frac{\frac{1}{4}aa\,dx}{a+x} + \frac{\frac{1}{4}aa\,dx}{a-x}$; undè, ſumtis fluentibus, habetur ſector $ATD = \frac{1}{4}aa\,L.\overline{a+x} - \frac{1}{4}aa\,L.\overline{a-x} = \frac{1}{4}aa\,L.\frac{a+x}{a-x}$, cui quantitati nihil addendum vel ſubducendum eſt, quia ubi ſit $ATD = 0$, & $x = 0$, evaneſcit, ut oportet. Ducatur LO parallela KN ipſique infinitè propinqua; & cum ſit $AK = \frac{xx}{a}$ & (per theor. 4. de hyp.) $KN = \frac{CA \times AB}{CK} = \frac{\frac{1}{4}a^3}{aa - xx}$ ac $KL = \frac{2x\,dx}{a}$, erit areæ ABNK fluxio $KNOL = \frac{\frac{1}{2}a^2x\,dx}{aa - xx}$, ſumptiſque fluentibus, area $ABKN = Q$ conſt. $- \frac{1}{4}aa\,L.\overline{aa - xx}$; quia verò area ABNK evaneſcit ubi ſit $x = 0$, erit conſtans $Q = \frac{1}{4}aa\,L.aa$, & area accurata $ABNK = \frac{1}{4}aa\,L.aa - \frac{1}{4}aa\,L.\overline{aa - xx} = \frac{1}{4}aa\,L.\frac{aa}{aa - xx}$. Porro

sita erit $\frac{N-1}{N+1}H$, altitudo autem descripta erit $\frac{2PF}{G} -$ 1,3862943611

LIBER SECUND. SECT. VII. PROP. XL. PROBL. IX.

284.

ro (284) tempus P quo corpus in medio resistente cadendo velocitatem acquirit lineæ AP seu x proportionalem, est ad tempus G quo velocitatem maximam H vi ponderis sui comparativi B sine resistentia cadendo acquirere potest, ut sector ATD ad triangulum ADC, id est, $P:G = \frac{1}{4}aa\ L.\frac{a+x}{a-x} : \frac{1}{2}aa = L.\frac{a+x}{a+x} : 2.$ Quare erit $\frac{2P}{G} = L.\frac{a+x}{a-x}$, hoc logarithmo sumto in logistica cujus subtangens est unitas (38. lib. II.). Quapropter si logarithmus numeri $\frac{a+x}{a-x}$ sumatur in tabulis, multiplicandus erit per numerum 2,302585093, ut in cor. 7. prop. XXXV factum est, & habebitur $\frac{2P}{G} = 2,302585093\ L.\frac{a+x}{a-x}$, ideoque dividendo 1. per 2,3025 &c. numerus $0,4342944819.\frac{2P}{G}$ est logarithmus tabularis numeri $\frac{a+x}{a-x}$. Itaque si per tabulas quæratur numerus absolutus N qui congruat Logarithmo $0,4342944819.\frac{2P}{G}$, erit $N = \frac{a+x}{a-x}$, ideoque $x = \frac{a[N-1]}{N+1}$. Est autem (284) AC ad AP seu a ad x, ut velocitas maxima H ad velocitatem cadendo acquisitam. Quare hæc velocitas erit $\frac{xH}{a} = \frac{N-1}{N+1} \times H$, sicuti Newtonus invenit. Spatium quod globus velocitate maximâ H uniformiter progrediendo tempore P describit, est ad spatium $2F$ quod eadem velocitate H uniformiter percurrit tempore G, ut tempus P ad tempus G (5. lib. I.), & propterea spatium illud est $\frac{2PF}{G}$. Altitudo S quam globus tempore P cadendo in medio resistente describit, est ad spatium $\frac{2PF}{G}$, ut area ABNK ad sectorem ATD (284), id est, ut $\frac{1}{4}aa\ L.\frac{aa}{aa-xx}$ ad $\frac{1}{4}aa\ L.\frac{a+x}{a-x}$, sive ut $L.\frac{aa-xx}{aa}$ ad $L.\frac{a+x}{a-x}$; Sed (ex dem.) $\frac{a+x}{a-x} = N$, & $x = \frac{a[N-1]}{N+1}$, ac proinde $\frac{aa}{aa-xx} = \frac{[N+1]^2}{4N} = \frac{N \times [N+1]^2}{4NN}$; & si logarithmi sumantur in logistica cujus subtangens est unitas, est $\frac{2P}{G} = L.\frac{a+x}{a-x} = L.N$, & $L.\frac{aa}{aa-xx} = L.\frac{N \times [N+1]^2}{4NN} = L.N + 2L.\frac{N+1}{N} - L.4$; ideoque $L.\frac{aa}{aa-xx} : L.\frac{a+x}{a-x} = L.N + 2L.\frac{N+1}{N} - L.4 : L.N$ $= 1 + \frac{2L.\frac{N+1}{N} - L.4}{L.N} : 1 = 1 + \frac{G}{P}L.\frac{N+1}{N} - \frac{G}{2P}L.4 : 1 = S : \frac{2PF}{G}$. Quare altitudo $S = \frac{2PF}{G} - FL.4 + 2FL.\frac{N+1}{N}$.

At si velimus tabularum logarithmis uti, ii multiplicandi sunt per numerum 2,302585092994, seu per 2,302585093. Hic numerus dicatur M, logarithmus numeri 4 in tabulis sumptus Q, & logarithmus etiam tabularis numeri $\frac{N+1}{N}$ sit L; & erit $S = \frac{2PF}{G} - MQF + 2MLF$. Est autem $2M = 4,605170186$, & Q in tabulis vulgaribus est 0,60206, seu accuratius 0,60205999133, ideoque $MQ = 1,3862943611$ quamproxime. Quare altitudo S, quam globus in medio resistente cadendo tempore P describit, est $\frac{2PF}{G} - 1,3862943611\,F + 4,605170186\,LF$, uti Newtonus definivit.

DE MOTU CORPORUM.

1,3862943611 F + 4,605170186 LF. (d) Si fluidum ſatis profundum ſit negligi poteſt terminus 4,605170186 LF; & erit $\frac{2PF}{G}$ − 1,3862943611F altitudo deſcripta quamproximè. Patent hæc per libri ſecundi propoſitionem nonam & ejus corollaria, ex hypotheſi quòd globus nullam aliam patiatur reſiſtentiam niſi quæ oritur ab inertiâ materiæ. Si verò aliam inſuper reſiſtentiam patiatur, deſcenſus erit tardior, & ex retardatione innoteſcet quantitas hujus reſiſtentiæ.

Ut corporis in fluido cadentis velocitas & deſcenſus facilius innoteſcant, compoſui tabulam ſequentem, cujus columna prima denotat tempora deſcenſus, ſecunda exhibet velocitates cadendo acquiſitas exiſtente velocitate maximâ 100000000, tertia exhibet ſpatia temporibus illis cadendo deſcripta exiſtente 2F ſpatio quod corpus tempore G cum velocitate maximâ deſcribit, & quarta exhibet ſpatia iiſdem temporibus cum velocitate maximâ deſcripta. Numeri in quartâ columnâ ſunt $\frac{2P}{G}$, & ſubducendo numerum 1,3862944 − 4,6051702 L, inveniuntur numeri in tertiâ columnâ, & multiplicandi ſunt hi numeri per ſpatium F ut habeantur ſpatia cadendo deſcripta. Quinta his inſuper adjecta eſt columna, quæ continet ſpatia deſcripta iiſdem temporibus à corpore, vi ponderis ſui comparativi B, in (e) vacuo cadente.

Tem-

(d) * *Si fluidum ſatis profundum ſit*, id eſt, ſi altitudo *S* quam globus tempore *P* cadendo deſcribit, ſatis magna fuerit, negligi poteſt terminus 4,605170186 *LF*. Cum enim ſit *L* logarithmus numeri $\frac{N+1}{N}$, ubi N eſt numerus ſatis magnus, ſeu ubi numerus $\frac{N+1}{N}$ eſt fere æqualis unitati, Logarithmus L evaneſcit quam proximè. Sed, ſi velocitas maxima dicatur *H*, & velocitas tempore *P* caſu globi acquiſita *V*, eſt $H:V = a:x$ (285), & ideo $\frac{H+V}{H-V} = \frac{a+x}{a-x} = N$, & quando ſpatium deſcriptum *S* ſatis magnum eſt, fit $V = H$ quam proximè, ac proinde $\frac{H+V}{H-V}$ ſeu *N* numerus ſatis magnus, ut ex ſequenti tabula manifeſtum eſt. Patet ergo propoſitum.

(e) * *In vacuo cadente.* Hujus tabulæ conſtructio paulo fuſius exponenda videtur. Numeri ſinguli columnæ primæ, quibus exprimitur ratio temporis P ad tempus G, aſſumuntur pro lubitu; numeri verò in columna quarta correſpondentes facillimè reperiuntur. Cum enim ſpatium tempore G velocitate maximâ H uniformiter deſcrip-

LIBER SECUND. SECT. VII. PROP. XL. PROBL. IX.

Tempora P	Velocitates cadentis in fluido.	Spatia cadendo descripta in fluido.	Spatia motu maximo descripta.	Spatia cadendo descripta in vacuo.
0,001G	$99999\frac{29}{30}$	0,000001F	0,002F	0,000001F
0,01G	999967	0,0001F	0,2F	0,0001F
0,1G	9966799	0,0099834F	0,2F	0,01F
0,2G	19737532	0,0397361F	0,4F	0,04F
0,3G	29131261	0,0886815F	0,6F	0,09F
0,4G	37994896	0,1559070F	0,8F	0,16F
0,5G	46211716	0,2402290F	1,0F	0,25F
0,6G	53704957	0,3402706F	1,2F	0,36F
0,7G	60436778	0,4545405F	1,4F	0,49F
0,8G	66403677	0,5815071F	1,6F	0,64F
0,9G	71629787	0,7196609F	1,8F	0,81F
1G	76159416	0,8675617F	2F	1F
2G	96402758	2,6500055F	4F	4F
3G	99505475	4,6186570F	6F	9F
4G	99932930	6,6143765F	8F	16F
5G	99990920	8,6137964F	10F	25F
6G	99998771	10,6137179F	12F	36F
7G	99999834	12,6137073F	14F	49F
8G	99999980	14,6137059F	16F	64F
9G	99999997	16,6137057F	18F	81F
10G	$99999999\frac{3}{5}$	18,6137056F	20F	100F

Scho-

285.

scriptum sit 2 F, & spatia eâdem uniformi velocitate descripta temporibus, quibus describuntur, proportionalia sint; numeri columnæ quartæ, duplicatis numeris columnæ primæ correspondentibus, habentur. Quia verò spatia, à corpore vi ponderis sui comparativi B sine resistentia cadente, descripta, sunt in duplicatâ ratione temporum quibus describuntur, & tempore G describitur spatium F; numeri columnæ quintæ sunt quadrata numerorum correspondentium in columna prima. Numeri columnæ secundæ velocitatem acquisitam cadendo in fluido tempore P indicant quæ est $\frac{N-1}{N+1} \times H$, sicque inveniuntur: assumpto in columna prima termino quovis, Exempli causâ, 2 G pro P, fit $\frac{2P}{G} = \frac{4G}{G} = 4$, & hinc $0{,}4342944819 \frac{2P}{G} = 1{,}7371779276$. Huic logarithmo in tabulis congruit numerus absolutus $54{,}59815 = N$; unde fit $\frac{N-1}{N+1} = \frac{5359815}{5559815}$, & quia $H = 100000000$ (per hyp.), velocitas tempore P, sive 2 G, acquisita $\frac{N-1}{N+1}$ H, est 96402758, uti Newtonus in tabula posuit. Inventis hoc modo numeris columnæ secundæ, inveniuntur quoque numeri colum-

Scholium.

Ut resistentias fluidorum investigarem per experimenta, paravi vas ligneum quadratum, longitudine & latitudine internâ digitorum novem (f) pedis *Londinensis*, profunditate pedum novem cum semisse, idemque implevi aquâ pluviali; & globis ex cerâ & plumbo incluso formatis, notavi tempora descensus globorum, existente descensus altitudine 112 digitorum pedis. Pes solidus cubicus *Londinensis* continet 76 libras *Romanas* aquæ pluvialis, & pedis hujus digitus solidus continet $\frac{19}{36}$ uncias libræ hujus seu (g) grana $253\frac{1}{3}$; & globus aqueus diametro digiti unius descriptus continet grana 132,645 in medio aeris, vel (h) grana 132,8 in vacuo; & globus quilibet

næ tertiæ, videlicet $\frac{2P}{G} - 1,386293611 + 4,6051702\,L$. Quoniam enim datus est numerus $\frac{2P}{G}$, & jam inventus fuit numerus N, cognoscetur numerus $\frac{N+1}{N}$ cum ipsius Logarithmo L; atque ita obtinebitur numerus columnæ tertiæ.

286. Ex hâc porro tabulâ patet verum esse posse, quod non nulli se observasse testantur, nimirum gravia in mediis resistentibus cadentia brevi satis tempore ad maximam quam acquirere possint velocitatem pervenire & postea moveri uniformiter; licet per theoriam non nisi tempore infinito, seu nunquam, possint maximam illam velocitatem reverâ acquirere. Nam si tempus P quo globus in fluido quocumque cadit, sit æquale tempori 5 G; globi velocitas acquisita erit ad velocitatem maximam ut 9990092 ad 10000000, seu ut 1 ad 1,0000908, quamproxime, & spatium hoc tempore 5 G descriptum erit 8,6137964 F, & deinde spatia descripta crescent fere in progressione arithmetica ad modum temporum. Elapso igitur tempore 4 G. vel 5 G globus uniformiter descendere videbitur, licet ejus velocitas reverâ perpetuò crescat. Si vero assumatur tempus P æquale 10 G, tum velocitas acquisita est ad velocitatem maximam ut $99999999\frac{3}{5}$ ad 100000000, & tantorum numerum differentia $\frac{2}{5}$ prorsus insensibilis est oculis humanis.

(f) * *Pedis Londinensis.* Pes Londinensis est ad pedem Parisiensem ut 15 ad 16; uterque in digitos 12, & digitus in 12 lineas dividitur.

(g) * *Seu grana.* Libra Roma uncias 12, uncia 480 grana continet.

(h) 287. * *Vel grana* 132, 8 *in vacuo.* Corpus quodlibet ponderis sui partem amittit in aëre æqualem ponderi paris voluminis aëris; corporum vero pondera absoluta sub paribus voluminibus sunt ut eorum densitates, & densitas aquæ, juxta Newtonum, est ad densitatem aëris ut 860 ad 1. Quare, cum globi aquei pondus in aëre parum differat ab ejusdem pondere in vacuo, dicendum est, ut 860 ad 1, ita pondus globi aquei granorum 132, 645 ad pondus æqualis globi aëris, quod proinde erit granorum 0,1543 quam proxime. Addatur pondus hoc ponderi granorum 132,645 & summa gran. 132, 7993, seu gran. 132,8 erit pondus prædicti globi aquæ in vacuo quam proxime. Dato igitur pondere globi cujuslibet aquei in aëre, invenitur ejus pondus in vacuo, si ponderi dato addatur id

libet ([i]) alius eft ut exceffus ponderis ejus in vacuo fupra pondus ejus in aquâ. LIBER SECUND. SECT. VII. PROP. XI. PROBL. IX.

Exper. 1. Globus, cujus pondus erat $156\frac{1}{4}$ granorum in aere & 77 granorum in aquâ, altitudinem totam digitorum 112 tempore minutorum quatuor fecundorum defcripfit. Et experimento repetito, globus iterum cecidit eodem tempore minutorum quatuor fecundorum.

([k]) Pondus globi in vacuo eft $156\frac{13}{38}$ *gran.* & exceffus hujus ponderis fupra pondus globi in aquâ eft $79\frac{13}{38}$ *gran.* ([l]) Unde prodit globi diameter 0,84224 partium digiti. Eft autem ut exceffus ille ad pondus globi in vacuo, ita ([m]) denfitas aquæ ad denfitatem globi, ([n]) & ita partes octo tertiæ diametri globi (*viz.* 2,24597 *dig.*) ad fpatium 2 F, ([o]) quod proinde erit 4,4256 *dig.* Globus tempore minuti unius fecundi, toto fuo pondere granorum $156\frac{13}{38}$, ([p]) cadendo in vacuo de-

id quod ex divifione ejufdem ponderis per numerum 860 habetur.

(i) 288. * *Et globus quilibet &c.* Globus quilibet *E* eft ad globum aqueum *C* diametro digiti unius defcriptum, ut exceffus ponderis globi *E* in vacuo fupra pondus ejus in aqua, ad pondus granorum 132,8. Nam exceffus ponderis globi *E* in vacuo fupra pondus ejus in aquâ eft pondus globi aquæ ejufdem cum globo *E* diametri; Sed globi aquæ homogenei funt ut eorumdem pondera: eft igitur globus *E* ad globum *C* ut exceffus ponderis globi *E* in vacuo fupra pondus ejus in aqua, ad pondus 132,8 granorum.

(k) * *Pondus globi in vacuo eft* $156\frac{13}{38}$ *gran.* Si enim ex pondere globi in aëre gran. $156\frac{1}{4}$ fubducatur pondus ejus in aqua, quod eft gran. 77, refiduum erit pondus globi aquæ ejufdem voluminis gran. $79\frac{1}{4}$; & propterea (287) ut habeatur pondus globi in vacuo, ponderi gran. $156\frac{1}{4}$ addendum eft pondus gran. $\frac{79\frac{1}{4}}{860}$, & prodit pondus globi in vacuo gran. $156\frac{13}{38}$ quam proximè.

(l) * *Unde prodit globi diameter &c.* Eft enim (288) pondus gran. 132,8 ad exceffum $79\frac{13}{38}$, ut globus diametro digiti unius defcriptus ad globum quæfitum; ideoque ut diametri 1 digiti cubus 1 ad diametri globi quæfiti cubum, qui proinde erit $\frac{79\frac{13}{38}}{132,8}$ partium digiti cubici. Hujus fractionis radix cubica, feu globi diameter, eft 0,84224 partium digiti quam proximè. 288.

(m) * *Ita denfitas aquæ ad &c.* (283).

(n) * *Et ita partes octo tertiæ diametri globi &c.* Per Prop. XL. lib. II.

(o) * *Quod proinde erit* 4,4256 *dig.* Nam $79\frac{13}{38} : 156\frac{13}{38} = 3015 : 5941 = 2,24597 : 4,4256$, quam proximè.

(p) 289. * *Cadendo in vacuo defcribet digitos* $193\frac{1}{3}$. Quoniam corporis, præfertim gravioris, ofcillationes quæ in minoribus arcubus fiunt, iifdem quam proximè temporibus peraguntur in aere & in vacuo (per cor. 2. prop. XXVII. lib. II.); fpatium quod grave cadendo in vacuo tempore minuti unius fecundi defcribit, eft pedum Parifienfium $15\frac{1}{12}$, feu aq-

describet digitos $193\frac{1}{3}$; & pondere granorum 77, eodem tempore sine resistentiâ cadendo in aquâ (q) describet digitos 95,219; (r) & tempore G, quod sit ad minutum unum secundum in subduplicatâ ratione spatii F seu 2,2128 *dig.* ad 95219 *dig.* describet 2,2128 *dig.* & velocitatem maximam H acquiret quâcum potest in aquâ descendere. (s) Est igitur tempus G 0'',15244. Et hoc tempore G, cum velocitate illâ maximâ H, globus describet spatium 2F digitorum 4,4256; (t) ideoque tempore minutorum quatuor secundorum describet spatium digitorum 116,1245. (u) Subducatur spatium 1,3862944F seu 3,0676 *dig.* & manebit spatium 113,0569 digitorum quod globus cadendo in aquâ, in vase amplissimo, tempore minutorum quatuor secundorum describet. Hoc spatium, ob angustiam vasis lignei prædicti, (x) minui debet in ratione quæ com-

accuratius digitorum $181\frac{1}{6}$ quam proximè (471. lib. 1.); & quia pes Londinensis pede Parisiensi minor est in ratione 15 ad 16, erit spatium illud digitorum Londinensium $193\frac{11}{45}$, seu fere $193\frac{1}{4}$. Hoc spatium augeri paululum debet ob pondus in aëre oscillantis diminutum, & ideo poni potest digit. Lond. $193\frac{1}{3}$ quam proximè.

(q) * *Describet digitos* 95, 219. Nam vires uniformes sunt ut spatia quæ corpus viribus illis agitatum dato tempore describit (179); & propterea $156\frac{13}{38}$ est ad 77 ut $193\frac{1}{3}$ dig. ad spatium quod globus vi ponderis granorum 77 tempore minuti unius secundi sine resistentia cadendo describit; unde spatium hoc prodit 95,219 digit. quam proximè.

(r) * *Et tempore G, quod sit &c.* Spatia quæ corpus vi ponderis sui comparativi 77 gran. sine resistentiâ cadendo describit, sunt in duplicatâ ratione temporum quibus describuntur (27. lib. 1.). Ergo tempus G, quo corpus vi ponderis sui comparativi sine resistentiâ cadendo describit spatium F (per prop. XL.), est ad minutum unum secundum in subduplicatâ ratione spatii F seu 2,2128 dig. ad 95219 digiti.

(s) 290. * *Est igitur tempus G* 0'',15244. Si juxta notam 286, multiplicetur hæc fractio per numerum 5, productum erit 0'',7622 seu 46''' ferè. Quare globus, cujus diameter est 0,84224 partium digiti & pondus in aëre $156\frac{1}{4}$ gran., in aqua cadendo tempore 46''' describet spatium 19 dig. circiter & maximam suam velocitatem acquirere atque postea uniformi velocitate descendere videbitur (286).

(t) * *Ideoque tempore minutorum quatuor secundorum &c.* Sunt enim tempora ut spatia velocitate uniformi H descripta, & 0'',15244 est ad 4'' ut 4,4256 ad 116,1245 ferè.

(u) * *Subducatur spatium &c.* Tempus P est minutorum secundorum quatuor, & ut G ad P ita est 2 F ad digitos 116,1245 $= \frac{2\,PF}{G}$, Sed (per prop. XL) spatium quod globus in aqua cadendo tempore P describit, est $\frac{2\,PF}{G} - 1{,}3862944\,F$; neglecto, scilicet, termino 4,60517016 LF, qui ob parvitatem hic potest tutò contemni.

(x) 291. * *Minui debet in ratione &c.* Globi datâ velocitate moti resistentia in vase amplissimo sit *r*, in vase angustiore *R*, hujus vasis orificium æquale sit circulo *c*, cir-

componitur ex ſubduplicatâ ratione orificii vaſis ad exceſſum orificii hujus ſupra ſemicirculum maximum globi & ex ſimplici ratione orificii ejuſdem ad exceſſum ejus ſupra circulum maximum globi, id eſt, in ratione 1 ad 0,9914. Quo facto, habebitur ſpatium 112,08 digitorum, quod globus cadendo in aquâ in hoc vaſe ligneo tempore minutorum quatuor ſecundorum per theoriam deſcribere debuit quamproximè. Deſcripſit verò digitos 112 per experimentum.

Exper. 2. Tres globi æquales, quorum pondera ſeorſim erant $76\frac{1}{3}$ granorum in aere & $5\frac{1}{16}$ granorum in aquâ, ſucceſſivè demittebantur; & unuſquiſque cecidit in aquâ tempore minutorum ſecundorum quindecim, caſu ſuo deſcribens altitudinem digitorum 112.

Com-

circulus globi maximus ſit m, denſitas globi δ, denſitas fluidi d; vis uniformis quâ totus globi motus, quo tempore octo tertias partes diametri ſuæ uniformiter deſcriberet tolli poſſit vel generari, ſit p. Et (per prop. XXXVIII.) erit $p:r=\delta:d$; & (per prop. XXXIX.) $R:p=dc^3:\delta\left[c-\frac{1}{2}m\right]\times[c-m]^2$; & propterea, conjunctis his rationibus, $R:r=c^3:\left[c-\frac{1}{2}m\right]\times\left[c-m\right]^2$. Datâ igitur velocitate globi, reſiſtentia in vaſe ampliſſimo eſt ad reſiſtentiam in vaſe anguſtiore in datâ ratione $\left[c-\frac{1}{2}m\right]\times[c-m]^2$ ad c^3. Brevitatis causâ ponatur r ad R ut 1 ad n. Quando velocitas in vaſe ampliſſimo maxima eſt, ſeu H, reſiſtentia æqualis eſt ponderi B globi in aqua, & F eſt ſpatium quod globus tempore G vi ponderis B ſine reſiſtentia cadendo deſcribit ut velocitatem illam H acquirat. Sit h velocitas maxima globi in vaſe anguſtiore, quam cum acquiſivit, reſiſtentia ejus æqualis eſt ponderi B; & cum reſiſtentia globi in vaſe anguſtiore æqualis ſit nB ubi velocitas ejus eſt H (ex demonſtratis), & reſiſtentiæ ſint ut quadrata velocitatum, erit $HH:hh=nB:B=n:1$, ideoque $H:h=\sqrt{n}:1$. Sit g tempus quo globus pondere B ſine reſiſtentiâ cadendo acquirit velocitatem h, & f ſpatium quod eodem tempore deſcribit; & erit $H:h=\frac{F}{g}:\frac{f}{g}$, ac proinde $\frac{F}{G}:\frac{f}{g}\sqrt{n}:1$. Porro ſpatia in vaſe ampliſſimo tempore P, quod ſatis magnam habet rationem ad tempus G, cadendo deſcripta, ſunt quam proximè ut $\frac{2PF}{G}$, ſeu ut ſpatia eodem tempore motu maximo deſcripta, ut ex prop. XL. & ex tabulâ huic ſcholio præfixâ patet; & ſimiliter ſpatium eodem tempore P in vaſe anguſtiore deſcriptum erit etiam ut $\frac{2Pf}{g}$ ferè. Quare cum ſit $\frac{2PF}{G}$ ad $\frac{2Pf}{g}$ ut $\frac{F}{G}$ ad $\frac{f}{g}$, id eſt eſt (ex demonſtr.) ut $\sqrt{n}$ ad 1; ſpatium tempore P in vaſe ampliſſimo deſcriptum erit ad ſpatium eodem tempore in vaſe anguſtiore deſcriptum, ut $\sqrt{n}$ ad 1, id eſt, ut $c^{\frac{3}{2}}$ ad $[c-m]\times\left[c-\frac{1}{2}m\right]^{\frac{1}{2}}$, aut quod idem eſt, in ratione quæ componitur ex ſubduplicatâ ratione orificii vaſis c ad exceſſum $c-\frac{1}{2}m$ orificii hujus ſupra ſemicirculum maximum globi, & ex ſimplici ratione orificii ejuſdem c ad exceſſum ejus $c-m$, ſupra circulum maximum globi. 291.

Computum (y) ineundo prodeunt pondus globi in vacuo $76\frac{5}{12}$ *gran.* exceſſus hujus ponderis ſupra pondus in aquâ $71\frac{17}{48}$ *gran.* diameter globi 0,81296 *dig.* octo tertiæ partes hujus diametri 2,16789 *dig.* ſpatium 2F 2,3217 *dig.* ſpatium quod globus pondere $5\frac{1}{16}$ *gran.* tempore 1'' ſine reſiſtentiâ cadendo deſcribat 12,808 *dig.* & tempus G 0'',301056. Globus igitur, velocitate maximâ quâcum poteſt in aquâ vi ponderis $5\frac{1}{16}$ *gran.* deſcendere, tempore 0'',301056 deſcribet ſpatium 2,3217 *dig.* & tempore 15'' ſpatium 115,678 *dig.* Subducatur ſpatium 1,3862944 F ſeu 1,609 *dig.* & manebit ſpatium 114,069 *dig.* quod proinde globus eodem tempore in vaſe latiſſimo cadendo deſcribere debet. Propter anguſtiam vaſis noſtri detrahi debet ſpatium 0,895 *dig.* circiter. Et ſic manebit ſpatium 113,174 *dig.* quod globus cadendo in hoc vaſe, tempore 15'' deſcribere debuit per theoriam quamproximè. Deſcripſit vero digitos 112 per experimentum. Differentia eſt inſenſibilis.

Exper. 3. Globi tres æquales, quorum pondera ſeorſim erant 121 *gran.* in aere & 1 *gran.* in aquâ, ſucceſſive demittebantur; & cadebant in aqua temporibus 46'', 47'', & 50'', deſcribentes altitudinem digitorum 112.

Per theoriam (z) hi globi cadere debuerunt tempore 40'' cir-

Sed vaſis orificium c eſt 81 digitorum (ex dictis initio ſcholii hujus), & circuli m diameter inventa eſt 0,84224 partium digiti, ideoque ſi dicatur ut 7 ad 11 ita 0,84224 digit. ad ſemiperipheriam circuli m, hæc invenietur digit. 1,32352, & hinc circulus m prodit 0,5573 partium digiti quadrati circiter; ex quibus habetur

$$\frac{c}{c-m} = 1{,}0069,\ \&\ \frac{c^{\frac{1}{2}}}{\left[c-\frac{1}{2}m\right]^{\frac{1}{2}}} = 1{,}0017,\ \text{ac}$$

$$\text{proinde}\ \frac{c^{\frac{3}{2}}}{[c-m]\times\left[c-\frac{1}{2}m\right]^{\frac{1}{2}}} = 1{,}00861.$$

Quare ſpatium in vaſe ampliſſimo deſcriptum digit. 113,0569 eſt ad ſpatium in vaſe anguſtiore eodem tempore minutorumquatuor ſecundorum deſcriptum, ut 1,00861 ad 1, ſeu ut 1 ad 0,9914 ferè; unde hoc ſpatium prodit 111,08 digit.

(y) * *Computum ineundo &c.* Calculo experimenti primi fuſe expoſito, nulla ſupereſt difficultas in computo ſimili experimenti hujus.

(z) * *Per theoriam hi globi cadere debuerunt tempore 40'' circiter.* Cum pondus globi ſit 121 granorum in aëre, & 1 grani in aqua, erit pondus æqualis globi aquæ granorum 120; & ideo pondus globi in vacuo gran. 121 $\frac{120}{860}$ ſeu $121\frac{6}{43}$ (287). Exceſſus hujus ponderis ſupra pondus globi

circiter. Quod tardius cecciderunt, utrum minori proportioni reſiſtentiæ quæ à vi inertiæ in tardis motibus oritur, ad reſiſtentiam quæ oritur ab aliis cauſis tribuendum ſit; an potius bullulis nonnullis globo adhærentibus, vel rarefactioni ceræ ad calorem vel tempeſtatis vel manus globum demittentis, vel etiam erroribus inſenſibilibus in ponderandis globis in aquâ, incertum eſſe puto. Ideoque pondus globi in aquâ debet eſſe plurium granorum, ut experimentum certum & fide dignum reddatur.

LIBER SECUND. SECT. VII. PROP. XL. PROBL. IX.

Exper. 4. Experimenta hactenus deſcripta cœpi, ut inveſtigarem reſiſtentias fluidorum, antequam theoria in propoſitionibus proximè præcedentibus expoſita mihi innoteſceret. Poſtea, ut theoriam inventam examinarem, paravi vas ligneum latitudine internâ digitorum $8\frac{2}{3}$; profunditate pedum quindecim cum triente. Deinde ex cerâ & plumbo incluſo globos quatuor formavi, ſingulos pondere $139\frac{1}{4}$ granorum in aere & $7\frac{1}{8}$ granorum in aquâ. Et hos demiſi ut tempora cadendi in aqua per pendulum, ad ſemi-minuta ſecunda oſcillans, menſurarem. Globi, ubi ponderabantur & poſtea cadebant, frigidi erant & aliquamdiu frigidi manſerant; quia calor ceram rarefacit, & per rarefactionem diminuit pondus globi in aqua, & cera rarefacta non ſtatim ad denſitatem priſtinam per frigus reducitur. Antequam caderent, immergebantur penitus in aquam; ne pondere partis alicujus ex aquâ extantis deſcenſus eorum ſub initio acceleraretur. Et ubi penitùs immerſi quieſcebant, demittebantur quam cautiſſimè, ne impulſum aliquem à manu demittente acci-

bi in aqua eſt gran. $120\frac{6}{43}$. Unde prodeunt globi diameter 0,9671 partium digiti, ſpatium $2F$ 2,6004 digitorum, ſpatium quod globus pondere 1 grani ſine reſiſtentia cadendo tempore minuti unius ſecundi deſcribit digit. 1,5959, & tempus G 0″,9026. Hoc tempore globus cum velocitate maximâ H uniformiter progrediendo deſcribet ſpatium $2F$ ſeu 2,6004 dig. & tempore 40″ deſcribet ſpatium 115,2404 did. Subducatur ſpatium 1,3862944 F ſeu 1,8024 dig., & manebit ſpatium 113,438 dig. quod globus cadendo in aqua in vaſe ampliſſimo tempore 40″ deſcriberet; & hoc ſpatium, propter anguſtiam vaſis aliquantulum minui debet, nimirum in ratione 10049 ad 10025 circiter. Globi igitur per theoriam ſpatium 112 digitorum cadendo deſcribere debuerunt tempore 40″ circiter. 293.

acciperent. Ceciderunt autem successivè temporibus oscillationum $47\frac{1}{2}$, $48\frac{1}{2}$, 50 & 51, describentes altitudinem pedum quindecim & digitorum duorum. Sed tempestas jam paulò frigidior erat quàm cum globi ponderabantur, ideoque iteravi experimentum alio die, & globi ceciderunt temporibus oscillationum 49, $49\frac{1}{2}$, 50 & 53, ac tertio temporibus oscillationum $49\frac{1}{2}$, 50, 51 & 53. Experimento sæpius capto, globi ceciderunt maximâ ex parte temporibus oscillationum $49\frac{1}{2}$ & 50. Ubi tardius cecidere, suspicor eosdem retardatos fuisse impingendo in latera vasis.

Jam computum per theoriam ineundo, prodeunt pondus globi in vacuo $139\frac{2}{5}$ granorum. Excessus hujus ponderis supra pondus globi in aquâ $132\frac{11}{40}$ *gran.* Diameter globi 0,99868 *dig.* Octo tertiæ partes diametri 2,66315 *dig.* Spatium 2 F 2,8066 *dig.* Spatium quod globus pondere $7\frac{1}{8}$ granorum, tempore minuti unius secundi, sine resistentiâ cadendo describit 9,88164 *dig.* Et tempus G $0'',376843$. Globus igitur, velocitate maximâ quâcum potest in aquâ vi ponderis $7\frac{1}{8}$ granorum descendere, tempore $0'',376843$ describit spatium 2,8066 digitorum, & tempore $1''$ spatium 7,44766 digitorum, & tempore $25''$ seu oscillationum 50 spatium 186,1915 *dig.* Subducatur spatium 1,386294 F, seu 1,9454 *dig.* & manebit spatium 184,2461 *dig.* quod globus eodem tempore in vase latissimo describet. Ob angustiam vasis nostri, minuatur hoc spatium in ratione quæ componitur ex subduplicatâ ratione orificii vasis ad excessum hujus orificii supra semicirculum maximum globi, & simplici ratione ejusdem orificii ad excessum ejus supra circulum maximum globi; & habebitur spatium 181,86 digitorum, quod globus in hoc vase tempore oscillationum 50 describere debuit per theoriam quamproximè. Descripsit verò spatium 182 digitorum tempore oscillationum $49\frac{1}{2}$ vel 50 per experimentum.

Exper. 5. Globi quatuor pondere $154\frac{3}{8}$ *gran.* in aere & $21\frac{1}{2}$ *gran.* in aquâ sæpe demissi, cadebant tempore oscillationum $28\frac{1}{2}$, 29, $29\frac{1}{2}$ & 30, & nonnunquam 31, 32 &

33,

33, describentes altitudinem pedum quindecim & digitorum duorum.

Per theoriam cadere debuerunt tempore oscillationum 29 quamproximè.

Exper. 6. Globi quinque pondere $212\frac{1}{8}$ *gran.* in aere & $79\frac{1}{2}$ in aquâ sæpe demissi, cadebant tempore oscillationum 15, $15\frac{1}{2}$, 16, 17 & 18, describentes altitudinem pedum quindecim & digitorum duorum.

Per theoriam cadere debuerunt tempore oscillationum 15 quamproximè.

Exper. 7. Globi quatuor ponderè $293\frac{1}{8}$ *gran.* in aere & $35\frac{7}{8}$ *gran.* in aquâ sæpe demissi, cadebant tempore oscillationum $29\frac{1}{2}$, 30, $30\frac{1}{2}$, 31, 32 & 33, describentes altitudinem pedum quindecim & digiti unius cum semisse.

Per theoriam cadere debuerunt tempore oscillationum 28 quamproximè.

Causam investigando cur globorum, ejusdem ponderis & magnitudinis, aliqui citius alii tardius caderent, in hanc incidi; quod globi ubi primum demittebantur & cadere incipiebant, oscillarent circum centra, latere illo quod forte gravius esset primum descendente, & motum oscillatorium generante. Nam per oscillationes suas globus majorem motum communicat aquæ, quam si sine oscillationibus descenderet; & communicando, amittit partem motus proprii quo descendere deberet: & pro majore vel minore oscillatione, magis vel minus retardatur. Quinetiam globus recidit semper à latere suo quod per oscillationem descendit, & recedendo appropinquat lateribus vasis & in latera nonnunqnam impingitur. Et hæc oscillatio in globis gravioribus fortior est, in majoribus aquam magis agittat. Quâpropter, ut oscillatio globorum minor reddetetur, globos novos ex cerâ & plumbo construxi, infigendo plumbum in latus aliquod globi prope superficiem ejus; & globum ita demisi, ut latus gravius, quoad fieri potuit, esset infimum ab initio descensus. Sic oscillationes factæ sunt multo mi-

nores quam prius, & globi temporibus minus inæqualibus ceciderunt, ut in experimentis ſequentibus.

Exper. 8. Globi quatuor, pondere granorum 139 in aere & $6\frac{1}{2}$ in aquâ, ſæpe demiſſi, ceciderunt temporibus oſcillationum non plurium quam 52, non pauciorum quam 50, & maximâ ex parte tempore oſcillationum 51 circiter, deſcribentes altitudinem digitorum 182.

Per theoriam cadere debuerunt tempore oſcillationum 52 circiter.

Exper. 9. Globi quatuor, pondere granorum $273\frac{1}{4}$ in aere & $140\frac{3}{4}$ in aquâ, ſæpius demiſſi, ceciderunt temporibus oſcillationum non pauciorum quam 12, non plurium quam 13, deſcribentes altitudinem digitorum 182.

Per theoriam verò hi globi cadere debuerunt tempore oſcillationum $11\frac{1}{3}$ quamproximè.

Exper. 10. Globi quatuor, pondere granorum 384 in aere & $119\frac{1}{2}$ in aquâ, ſæpe demiſſi, cadebant temporibus oſcillationum $17\frac{3}{4}$, 18, $18\frac{1}{2}$ & 19, deſcribentes altitudinem digitorum $181\frac{1}{2}$. Et ubi ceciderunt tempore oſcillationum 19, nonnunquam audivi impulſum eorum in latera vaſis antequam ad fundum pervenerunt.

Per theoriam verò cadere debuerunt tempore oſcillationum $15\frac{5}{9}$ quamproximè.

Exper. 11. Globi tres æquales, pondere granorum 48 in aere & $3\frac{29}{32}$ in aquâ ſæpe demiſſi, ceciderunt temporibus oſcillationum $43\frac{1}{2}$, 44, $44\frac{1}{2}$, 45 & 46, & maximâ ex parte 44 & 45, deſcribentes altitudinem digitorum $182\frac{1}{2}$ quamproximè.

Per theoriam cadere debuerunt tempore oſcillationum $46\frac{5}{9}$ circiter.

Exper. 12. Globi tres æquales, pondere granorum 141 in aere & $4\frac{3}{8}$ in aquâ, aliquoties demiſſi, ceciderunt temporibus oſcillationum 61, 62, 63, 64 & 65, deſcribentes altitudinem digitorum 182.

Et per theoriam cadere debuerunt tempore oſcillationum $64\frac{1}{2}$ quamproximè.

Per

Per hæc experimenta manifestum est quod, ubi globi tardè ceciderunt, ut in experimentis secundis, quartis, quintis, octavis, undecimis ac duodecimis, tempora cadendi rectè exhibentur per theoriam, at ubi globi velocius ceciderunt, ut in experimentis sextis, nonis ac decimis, (a) resistentia paulo major extitit quam in duplicatâ ratione velocitatis. Nam globi inter cadendum oscillant aliquantulum: & hæc oscillatio in globis levioribus & tardius cadentibus, ob motus languorem citò cessat; in gravioribus autem & majoribus, ob motus fortitudinem diutius durat, & non nisi post plures oscillationes ab aquâ ambiente cohiberi potest. Quinetiam globi, quo velociores sunt, eo minus premuntur à fluido ad posticas suas partes; & si velocitas perpetuo augeatur, spatium vacuum tandem à tergo relinquent, (b) nisi compressio fluidi simul augeatur. Debet autem compressio fluidi (per prop. XXXII. & XXXIII.) (c) augeri in duplicatâ ratione velocitatis, ut resistentia sit in eâdem duplicatâ ratione. Quoniam hoc non fit, globi velociores paulò minus premuntur à tergo, & defectu pressionis hujus, resistentia eorum fit paulo major quam in duplicatâ ratione velocitatis.

Congruit igitur theoria cum phænomenis corporum cadentium in aquâ, reliquum est ut examinemus phænomena cadentium in aere.

Exper. 13. A culmine ecclesiæ Sancti *Pauli*, in urbe *Londini*, mense Junio 1710 globi duo vitrei simul demittebantur, unus

(a) * *Resistentia paulo major extitit quam in duplicatâ ratione velocitatis.* Si enim resistentia accurate esset in duplicatâ velocitatis ratione, tempora cadendi tam per experimenta quam per theoriam definita, æquarentur; At si resistentia major quam in duplicatâ ratione velocitatis, tempora quibus corpus cadendo datum spatium describit, majora esse debent in experimentis quam in theoriâ, quæ minorem resistentiam supponit.

(b) * *Nisi compressio fluidi simul augeatur.* Tanta enim esse potest globi velocitas, ut fluidum ad posticas illius partes satis citò recurrere & locum à globo relictum statim occupare nequeat, nisi fluidi compressio augeatur, ut per fluidum pressio & motus celerius propagentur. 291.

(c) * *Augeri in duplicatâ ratione velocitatis &c.* Nam partes fluidi per compressionem in se mutuo agunt & reagunt; & si vires quibus fluidi particulæ se mutuò agitant, augeantur in duplicatâ ratione velocitatis, resistentia est in eâdem ratione duplicatâ, per cor. 2. prop. XXXIII.

DE MOTU CORPORUM. unus argenti vivi plenus, alter aeris; & cadendo describebant altitudinem pedum *Londinensium* 220. Tabula lignea ad unum ejus terminum polis ferreis suspendebatur, ad alterum pessulo ligneo incumbebat; & globi duo huic tabulæ impositi simul demittebantur, subtrahendo pessulum ope fili ferrei ad terram usque demissi ut tabula polis ferreis solummodo innixa super iisdem devolveretur, & eodem temporis momento pendulum ad minuta secunda oscillans, per filum illud ferreum tractum demitteretur & oscillare inciperet. Diametri & pondera globorum ac tempora cadendi exhibentur in (d) tabulâ sequente.

Globorum mercurio plenorum			*Globorum aere plenorum.*		
Pondera	*Diametri*	*Tempora cadendi.*	*Pondera*	*Diametri*	*Tempora cadendi.*
908 *gran.*	0,8 *digit.*	4″	510 *gran.*	5,1 *digit.*	8″$\frac{1}{2}$
983	0,8	4 −	642	5,2	8
866	0,8	4	599	5,1	8
747	0,75	4 +	515	5,0	8$\frac{1}{4}$
808	0,75	4	483	5,0	8$\frac{1}{2}$
784	0,75	4 +	641	5,2	8

Cæterum tempora observata corrigi debent. Nam globi mercuriales (per theoriam *Galilæi*) minutis quatuor secundis (e) describent pedes *Londinenses* 257, & pedes 220 minutis tantum 3″...

(d) * *In tabulâ* sequente 4 − significat tempus cadendi minutis quatuor secundis paulo minus fuisse, & 4 + tempus minutis quatuor secundis paulo majus indicat.

(e) * *Describent pedes Londinenses &c.* Quoniam densitas mercurii est ad densitatem aëris ut 11890 ad 1 circiter, parùm admodum minuitur mercurii pondus in aere, & ideo globi mercurio pleni eâdem ferè celeritate in aëre & in vacuo per breve tempus descendunt; sed gravia omnia in vacuo cadentia tempore minuti unius secundi describunt pedis Londinensis digitos 193 $\frac{1}{3}$ (289), & spatia descripta sunt in duplicatâ ratione temporum (27. lib. 1.). Quare ut 1 ad 16 ita 193 $\frac{1}{3}$ dig. ad spatium quod globus mercurio plenus tempore 4″ cadendo describit, quod proinde erit 3093 dig. seu 257 pedum Londinensium circiter. Simili modo, cum sit 3″...

$3''\ 42'''$. Tabula lignea utique, detracto pessulo, tardius devolvebatur quam par erat, & tardâ suâ devolutione impediebat descensum globorum sub initio. Nam globi incumbebant tabulæ prope medium ejus, & paulò quidem propiores erant axi ejus quam pessulo. Et hinc tempora cadendi prorogata fuerunt minutis tertiis octodecim circiter, & jam corrigi debent detrahendo illa minuta, præsertim in globis majoribus qui tabulæ devolventi paulo diutius incumbebant propter magnitudinem diametrorum. Quo facto tempora, quibus globi sex majores cecidere, evadent $8''\ 12'''$, $7''\ 42'''$, $7''\ 42'''$, $7''\ 57'''$, $8''\ 12'''$, & $7''\ 42'''$.

Globorum igitur aere plenorum quintus, diametro digitorum quinque pondere granorum 483 constructus, cecidit tempore $8''\ 12'''$, describendo altitudinem pedum 220. (f) Pondus aquæ huic globo æqualis est 16600 granorum; & pondus aeris eidem æqualis est $\frac{16600}{860}$ *gran.* seu $19\frac{3}{10}$ *gran.* ideoque pondus globi in vacuo est $502\frac{3}{10}$ *gran.* & hoc pondus est ad pondus aeris globo æqualis, ut $502\frac{3}{10}$ ad $19\frac{3}{10}$, & ita sunt $2F$ ad octo tertias partes diametri globi, id est, ad $13\frac{1}{3}$ digitos. Unde $2F$ prodeunt 28 *ped.* 11 *dig.* Globus cadendo in vacuo, toto suo pondere $502\frac{3}{10}$ granorum, tempore minuti unius secundi describit digitos $193\frac{1}{3}$ ut supra, & pondere 483 *gran.* describit digitos 185,905, &

$3''.\ 42''' = 3''.7$, erit 1 ad 13.69 ut $193\frac{1}{3}$ dig. ad spatium tempore $3''.\ 42'''$ descriptum quod prodit ped. Lond. 220 circiter. Sed globi mercurio pleni spatium hoc 220 ped. tempore $4''$ describunt in experimentis, & differentia temporum $4''$ & $3''.\ 42'''$ est $18'''$. Tempora igitur prorogata fuerunt minutis tertiis octodecim circiter.

(f) * *Pondus aquæ huic globo æqualis est 16600 granorum.* Globus aqueus, cujus diameter est unius digiti continet grana 132,8 (287), & globorum homogeneorum, pondera sunt ut diametrorum cubi, & propterea ut 1 ad 125 ita sunt 132.8 grana ad pondus globi aquei cujus diameter est digitorum 5, quod proinde pondus est gran. 16600. Globorum æqualium pondera sunt ut illorum densitates, & densitas aquæ est ad densitatem aëris ut 860 ad 1. Quare pondus globi aëris diametro digitorum 5 descripti est $\frac{16600}{860}$ seu $19\frac{3}{10}$gran. quam proximè. Hinc pondus globi vitrei aëre pleni in vacuo est gran. $483 + 19\frac{3}{10}$ seu gran. $502\frac{3}{10}$, & hoc pondus est ad pondus aëris globo æqualis, id est, densitas globi, si homogeneus fingatur, ad densitatem aëris, ut $502\frac{3}{10}$ ad $19\frac{3}{10}$, *& ita sunt 2F &c.*, cætera patent ut in superioribus calculis.

193.

DE MOTU CORPORUM.

& eodem pondere 483 *gran.* etiam in vacuo deſcribit ſpatium F ſeu 14 *ped.* $5\frac{1}{2}$ *dig.* (g) tempore $57'''$ $58''''$, & velocitatem maximam acquirit quâcum poſſit in aere deſcendere. Hâc velocitate globus, tempore $8''$ $12'''$, deſcribet ſpatium pedum 245 & digitorum $5\frac{1}{3}$. Aufer 1,3863 F ſeu 20 *ped.* $0\frac{1}{2}$ *dig.* & manebunt 225 *ped.* 5 *dig.* Hoc ſpatium igitur globus tempore $8''$ $12'''$, cadendo deſcribere debuit per theoriam. Deſcripſit verò ſpatium 202 pedum per experimentum. Differentia inſenſibilis eſt.

Similibus computis ad reliquos etiam globos aere plenos applicatis, confeci tabulam ſequentem.

Globorum pondera.	*Diametri.*	*Tempora cadendi ab altitudine pedum* 220.		*Spatia deſcribenda per theoriam.*		*Exceſſus.*	
510 *gran.*	5,1 *dig.*	$8''$	$12'''$	226 *ped.*	11 *dig.*	6 *ped.*	11 *dig.*
642	5,2	7	42	230	9	10	9
599	5,1	7	42	227	10	7	10
515	5	7	57	224	5	4	5
483	5	8	12	225	5	5	5
641	5,2	7	42	230	7	10	7

Exper. 14. Anno 1719. menſe Julio, D. Deſaguliers hujuſmodi experimenta iterum cepit, formando veſicas porcorum in orbem ſphæricum ope ſphæræ ligneæ concavæ ambientis, quam madefactæ implere cogebantur inflando aerem; & haſce arefactas & exemptas demittendo ab altiore loco in templi ejuſdem turri rotunda fornicata, nempe ab altitudine pedum 272; & eodem temporis momento demittendo etiam glo-

(g) 292. * *Tempore* $57'''$ $58''''$. Hoc tempus, quod ante dictum eſt G, ducatur in numerum 5, & productum erit ferè $5''$; & propterea (186) globus cujus diameter eſt 5 digit. & pondus in aëre gran. 483, tempore minutorum ſecundorum quinque deſcribet ſpatium 124 pedum circiter, & deinde videbitur uniformiter deſcendere.

globum plumbeum cujus pondus erat duarum librarum Romanarum circiter. Et interea aliqui ſtantes in ſupremâ parte templi, ubi globi demittebantur, notabant tempora tota cadendi, & alii ſtantes in terrâ notabant differentiam temporum inter caſum globi plumbei & caſum veſicæ. Tempora autem menſurabantur pendulis ad dimidia minuta ſecunda oſcillantibus. Et eorum qui in terrâ ſtabant unus habebat horologium cum elatere ad ſingula minuta ſecunda quater vibrante; alius habebat machinam aliam affabrè conſtructam cum pendulo etiam ad ſingula minuta ſecunda quater vibrante. Et ſimilem machinam habebat unus eorum qui ſtabant in ſummitate templi. Et hæc inſtrumenta ita formabantur, ut motus eorum pro lubitu vel inciperent vel ſiſterentur. Globus autem plumbeus cadebat tempore minutorum ſecundorum quatuor cum quadrante circiter. Et addendo hoc tempus ad prædictam temporis differentiam, colligebatur tempus totum quo veſica cecidit. Tempora, quibus veſicæ quinque poſt caſum globi plumbei primâ vice ceciderunt, erant $14\frac{3}{4}''$, $12\frac{3}{4}''$, $14\frac{5}{8}''$, $17\frac{3}{4}''$, & $16\frac{7}{8}''$, & ſecundâ vice $14\frac{1}{2}''$, $14\frac{1}{4}''$, $14''$, $19''$ & $16\frac{3}{4}''$. Addantur $4\frac{1}{4}''$, tempus utique quo globus plumbeus cecidit, & tempora tota quibus veſicæ quinque ceciderunt, erant primâ vice $19''$, $17''$, $18\frac{7}{8}''$, $22''$, & $21\frac{1}{8}''$; & ſecundâ vice, $18\frac{3}{4}''$, $18\frac{1}{2}''$, $18\frac{1}{4}''$, $23\frac{1}{4}''$, & $21''$. Tempora autem in ſummitate templi notata, erant primâ vice $19\frac{3}{8}''$, $17\frac{1}{4}''$, $18\frac{3}{4}''$, $22\frac{1}{8}''$, & $21\frac{5}{8}''$; & ſecundâ vice $19''$, $18\frac{5}{8}''$, $18\frac{3}{8}''$, $24''$, & $21\frac{1}{4}''$. Cæterum veſicæ non ſemper rectâ cadebant, ſed nonnunquam volitabant, & hinc inde oſcillabantur inter cadendum. Et his motibus tempora cadendi prorogata ſunt & aucta nonnunquam dimidio minuti unius ſecundi, nonnunquam minuto ſecundo toto. Cadebant autem rectius veſica ſecunda & quarta primâ vice; & prima ac tertia ſecundâ vice. Veſica quinta rugoſa erat & per rugas ſuas nonnihil retardabatur. Diametros veſicarum deducebam ex earum circumferentiis filo tenuiſſimo bis circundato menſuratis. Et theoriam contuli cum experimentis in tabulâ ſequente, aſſumendo denſitatem

tem

tem aeris esse ad densitatem aquæ pluvialis ut 1 ad 860, & computando spatia quæ globi per theoriam describere (h) debuerunt cadendo.

Vesicarum pondera	*Diametri.*	*Tempora cadendi ab altitudine pedum 272.*	*Spatia iisdem temporibus describenda per theoriam.*		*Differentia inter theor. & exper.*	
128 *gran.*	5,28 *dig.*	19''	271 *ped.*	11 *dig.*	−0 *ped.*	1 *dig.*
156	5,19	17	272	$0\frac{1}{2}$	+0	$0\frac{1}{2}$
$137\frac{1}{2}$	5,3	$18\frac{1}{2}$	272	7	+0	7
$97\frac{1}{2}$	5,26	22	277	4	+5	4
$99\frac{1}{8}$	5	$21\frac{1}{8}$	282	0	+10	0

Globorum igitur tam in aere quam in aquâ motorum resistentia prope omnis per theoriam nostram rectè exhibetur, ac densitati fluidorum, paribus globorum velocitatibus ac magnitudinibus, proportionalis est.

In scholio, quod sectioni sextæ subjunctum est, ostendimus per experimenta pendulorum quod globorum æqualium & æquivelocium in aere, aquâ, & argento vivo motorum resistentiæ sunt ut fluidorum densitates. (i) Idem hic ostendimus magis ac-

(h) * *Describere debuerunt cadendo.* Exempli causâ calculum tentabimus experimenti cum tertia vesica facti. Hujus vesicæ diameter erat 5.3 digitorum & pondus in aëre granorum 137, 5. Globus aëris diametro digitorum 5.3 descriptus continet 23 grana quam proxime; unde vesicæ pondus in vacuo erat gran. 160,5, & ut 23 ad 160, 5 ita sunt octo tertiæ partes diametri vesicæ seu digiti $14\frac{2}{15}$ ad spatium 2 *F*, quod ita prodit digit. 98,626. Vesica cadendo in vacuo toto suo pondere 160,5 gran. tempore minuti unius secundi describit digitos $193\frac{1}{3}$, & pondere 137,5 gran. describit digitos 165,628, & eodem pondere 137,5 gran. etiam in vacuo describit spatium *F* digitorum 49,313 tempore 0'',5456 & velocitatem maximam acquirit cum quâ possit in aëre descendere. Hâc velocitate vesica tempore minutorum secundorum $18\frac{1}{2}$ describet spatium 278 ped. & 8. digit. circiter. Subducatur spatium 1,3863 *F* seu 5. ped. & 8 digit., & manebunt 273 pedes; cum in tabula accuratiore calculo confecta spatium per theoriam describendum sit 272 ped. & 7 digit., & in experimento sit 272 ped.

(i) * *Idem hic ostendimus &c.* Nam theoria experimentis confirmata, cui superiores computationes nituntur, supponit resistentiam, cæteris paribus, esse in ratione compositâ ex ratione duplicatâ velocitatis mobilis & ratione simplici densitatis fluidi.

accuratè per experimenta corporum cadentium in aëre & aquâ. Nam pendula singulis oscillationibus motum cient in fluido motui penduli redeuntis semper contrarium, & resistentia ab hoc motu oriunda, ut & resistentia fili quo pendulum suspendebatur, totam penduli resistentiam majorem reddiderunt quam resistentia quæ per experimenta corporum cadentium prodiit. Etenim per experimenta pendulorum in scholio illo exposita, globus ejusdem densitatis cum aquâ, describendo longitudinem semidiametri suæ in aëre, amittere deberet motus sui partem $\frac{1}{3342}$. At per theoriam in hac septimâ sectione expositam & experimentis cadentium confirmatam, globus idem describendo longitudinem eandem, (k) amittere deberet motus sui partem tantum $\frac{1}{4586}$, posito quod densitas aquæ sit ad densitatem aëris ut 860 ad 1. Resistentiæ igitur per experimenta pendulorum majores prodiere (ob causas jam descriptas) quam per experimenta globorum cadentium, idque in ratione 4 ad 3 circiter. Attamen cum pendulorum in aëre, aquâ & argento vivo oscillantium resistentiæ à causis similibus similiter augeantur, proportio resistentiarum in his mediis, tam per experimenta pendulorum, quam per experimenta corporum cadentium, satis rectè exhibebitur. Et inde concludi potest quod corporum in fluidis quibuscunque fluidissimis motorum resistentiæ, cæteris paribus, sunt ut densitates fluidorum.

His

(k) * *Amittere deberet motus sui partem tantùm* $\frac{1}{4586}$. Sit D diameter globi V ejus velocitas sub initio motus in fluido, $2F$ spatium quod sit ad $\frac{8}{3}D$ ut densitas globi ad densitatem aëris, hoc est, ut 860 ad 1, ideoque $2F = \frac{6880}{3}D$; sit T tempus quo globus cum velocitate V uniformiter progrediendo describit spatium $2F$, & t tempus quo eâdem uniformi velocitate describit spatium $\frac{1}{2}D$; & erit $t : T = \frac{1}{2}D : \frac{6880}{3}D = 3 : 13760$, & inde $t : T + t = 3 : 13763$, ideoque $\frac{t}{T+t} = \frac{3}{13763} = \frac{1}{4586}$ quam proximè. Est autem $\frac{tV}{T+t}$ velocitatis V pars amissa tempore t (per cor. 3. prop. 38.). Globus igitur describendo longitudinem semidiametri suæ in aëre, per theoriam in hac septimâ sectione expositam amittere debet motus sui partem $\frac{1}{4586}$. 291.

De Motu Corporum.

(l) His ita ſtabilitis, dicere jam licet quamnam motus ſui partem globus quilibet, in fluido quocunque projectus, dato tempore amittet quamproximè. Sit D diameter globi, & V velocitas ejus ſub initio motus, & T tempus, quo globus velocitate V in vacuo deſcribet ſpatium, quod ſit ad ſpatium $\frac{8}{3}$D ut denſitas globi ad denſitatem fluidi: & globus in fluido illo projectus, tempore quovis alio t amittet velocitatis ſuæ partem $\frac{tV}{T+t}$, manente parte $\frac{TV}{T+t}$, & deſcribet ſpatium, quod ſit ad ſpatium uniformi velocitate V eodem tempore deſcriptum in vacuo, ut logarithmus numeri $\frac{T+t}{T}$ multiplicatus per numerum 2,302585093. eſt ad numerum $\frac{t}{T}$, per corol. VII. prop. XXXV. In motibus tardis reſiſtentia poteſt eſſe paulò minor, (m) propterea quod figura globi paulo aptior ſit ad motum quam figura cylindri eâdem diametro deſcripti. In motibus velocibus reſiſtentia poteſt eſſe paulò major, propterea quod elaſticitas & compreſſio fluidi non (n) augeantur in duplicatâ ratione velocitatis. Sed hujuſmodi minutias hic non expendo.

Et quamvis aër, aqua, argentum vivum & ſimilia fluida, per diviſionem partium in infinitum, ſubtiliarentur & fierent media infinitè fluida; tamen globis projectis haud minus reſiſterent. Nam reſiſtentia, de quâ agitur in propoſitionibus præcedentibus oritur ab inertiâ materiæ; & inertia materiæ cor-

(l) * *His ita ſtabilitis, dicere jam licet quamnam motûs ſui partem globus quilibet, in fluido quocumque projectus* & ſolâ vi inſitâ motus, *dato tempore amittet quam proximè*; theoriam enim cum experimentis conſentire vidimus tum in fluidis elaſticis, quale eſt aër, tum in fluidis non elaſticis, quale eſt aqua. Quæ ſequuntur, manifeſta ſunt per notam ad cor. 3. prop. XXXVIII. (282.).

(m) * *Propterea quod figura globi paulo aptior ſit ad motum &c.* Nam in Lemmate VII. lib. II. & in ſequentibus propoſitionibus ſuppoſitum eſt, globi & cylindri, quorum eadem eſt diameter, æqualem eſſe reſiſtentiam.

(n) * *Non augeantur in duplicatâ ratione velocitatis*, in quâ tamen augeri deberent, uti expoſitum eſt in experimento 12.

corporibus essentialis est & quantitati materiæ semper proportionalis. Per divisionem partium fluidi, resistentia quæ oritur à tenacitate & frictione partium diminui quidem potest: sed quantitas materiæ per divisionem partium ejus non diminuitur; & manente quantitate materiæ, manet ejus vis inertiæ, cui resistentia, de quâ hic agitur, semper proportionalis est. Ut hæc resistentia diminuatur, diminui debet quantitas materiæ in spatiis per quæ corpora moventur. Et propterea spatia cœlestia, per quæ globi planetarum & cometarum in omnes partes liberrimè & sine omni motus diminutione sensibili perpetuo moventur; fluido omni corporeo destituuntur, si forte vapores longe tenuissimos & trajectos lucis radios excipias.

Projectilia utique motum cient in fluidis progrediendo, & hic motus oritur ab excessu pressionis fluidi ad projectilis partes anticas supra pressionem ad ejus partes posticas, & non minor esse potest in mediis infinite fluidis quam in aere, aquâ & argento vivo pro densitate materiæ in singulis. Hic autem pressionis excessus, pro quantitate suâ, non tantum motum ciet in fluido, sed (o) etiam agit in projectile ad motum ejus retardandum: & propterea resistentia in omni fluido est ut motus in fluido à projectili excitatus, nec minor esse potest in æthere subtilissimo pro densitate ætheris, quam in aëre, aquâ & argento vivo pro densitatibus horum fluidorum.

(o) * *Sed etiam agit in projectile*, per motûs legem III.

291

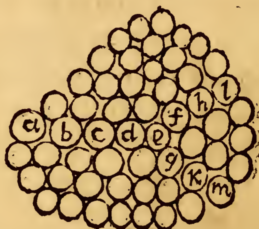
SECTIO VIII.

De motu per fluida propagato.

PROPOSITIO XLI. THEOREMA XXXII.

Pressio non propagatur per fluidum secundum lineas rectas, nisi ubi particulæ fluidi in directum jacent.

Si jaceant particulæ *a*, *b*, *c*, *d*, *e* in lineâ rectâ, potest quidem pressio directè propagari ab *a* ad *e*; at particula *e* urgebit particulas obliquè positas *f* & *g* obliquè, & particulæ illæ *f* & *g* non sustinebunt pressionem illatam, nisi fulciantur à particulis ulterioribus *h* & *k*; quâtenus autem fulciuntur, premunt particulas fulcientes; & hæ non sustinebunt pressionem nisi fulciantur ab ulterioribus *l* & *m* easque premant, & sic deinceps in infinitum. Pressio igitur, quam primum propagatur ad particulas quæ non in directum jacent, divaricare incipiet & obliquè propagabitur in infinitum; & postquam incipit obliquè propagari, si inciderit in particulas ulteriores, quæ non in directum jacent, iterum divaricabit; idque toties, quoties in particulas non accuratè in directum jacentes inciderit. *Q. E. D.*



Corol. Si pressionis, à dato puncto per fluidum propagatæ, pars aliqua obstaculo intercipiatur; pars reliqua, quæ non intercipitur, divaricabit in spatia pone obstaculum. Id quod sic etiam demonstrari potest. A puncto *A* propagetur pressio quâquâversum, idque si fieri potest secundum lineas rectas, & obstaculo *NBCK* perforato in *BC*, intercipiatur ea omnis, præter partem coniformem *APQ*, quæ per foramen circulare *BC* transit. Planis transversis *de*, *fg*, *hi* distinguatur conus *APQ* in frusta; & interea dum conus *ABC*, pressionem propagando, urget frustum conicum ulterius *degf* in superficie *de*, & hoc frustum urget frustum proximum *fgih* in superficie

cie *fg*, & frustum illud urget frustum tertium, & sic deinceps in infinitum; manifestum est (per motus legem tertiam) quod frustum primum *defg*, reactione frusti secundi *fghi*, tantum urgebitur & premetur in superficie *fg*, quantum urget & premit frustum illud secundum. Frustum igitur *defg* inter conum *Ade* & frustum *fhig* comprimitur utrinque, & propterea (per corol. VI, prop. XIX.) figuram suam servare nequit, nisi vi eâdem comprimatur undique. Eodem igitur impetu quo premitur in superficiebus *de*, *fg*, conabitur cedere ad latera *df*, *eg*; ubique (cum rigidum non sit, sed omnimodo fluidum) excurret ac dilatabitur, nisi fluidum ambiens adsit, quo conatus iste cohibeatur. Proinde conatu excurrendi, premet tam fluidum ambiens ad latera *df*, *eg* quam frustum *fghi* eodem impetu; & propterea pressio non minus propagabitur à lateribus *df*, *eg* in spatia *NO*, *KL* hinc inde, quam propagatur à superficie *fg* versus *PQ*. *Q. E. D.*

De Motu Corporum.

PROPOSITIO XLII. THEOREMA XXXIII.

Motus omnis per fluidum propagatus divergit à recto tramite in spatia immota.

Cas. 1. Propagetur motus à puncto *A* per foramen *BC*, pergatque, si fieri potest, in spatio conico *BCQP*, secundum lineas rectas divergentes à puncto *A*. Et ponamus primo quod ([a]) motus iste sit undarum in superficie stagnantis aquæ. Sintque *de*, *fg*, *hi*, *kl*, &c. undarum singularum partes altissimæ, vallibus totidem intermediis ab invicem distinctæ. Igitur quoniam aqua in undarum jugis altior est quam in fluidi partibus immotis *LK*, *NO*, defluet eadem de jugorum terminis *e*, *g*, *i*, *l*, &c. *d*, *f*, *h*, *k*, &c. hinc inde versus *KL* & *NO*: & quoniam ([b]) in undarum vallibus depressior est quam in fluidi partibus immotis *KL*, *NO*; defluet eadem de partibus illis immotis in undarum valles. Defluxu priore undarum juga, posteriore valles hinc inde dilatantur & propagantur versus *KL* & *NO*. Et quoniam motus undarum ab *A* versus *PQ* fit per continuum defluxum jugorum in valles proximos, ideoque ([c]) celerior non est quam pro celeritate descensus; & descensus aquæ hinc inde versus *KL* & *NO* eâdem velocitate peragi debet; propagabitur dilatatio undarum hinc inde versus *KL* & *NO* eâdem velocitate quâ undæ ipsæ ab *A* versus *PQ* rectà progrediuntur. Proindeque spatium totum hinc inde versus *KL* & *NO* ab undis dilatatis *rfgr*, *shis*, *tklt*, *vmnv*, &c. occupabitur. *Q. E. D.* Hæc ita se habere quilibet in aquâ stagnante experiri potest.

Cas.

(a) *Motus iste sit undarum &c.* Vis quælibet deorsum directa in superficiem stagnantis aquæ agat in A, & cavitate factâ, cogat aquam circumquaque ascendere, aqua elevata vi propriæ gravitatis descendendo partim refluet in A, ad cavitatem replendam, partim in plagam oppositam feretur, & celeritate cadendo acquisitâ novam cavitatem formabit, atquè ità deinceps undæ motus per successivum ascensum & descensum propagabitur in orbem.

(b) * *In undarum vallibus depressior est &c.* Aqua enim ab altioribus undarum partibus cadendo celeritatem acquirit, quâ infrà quiescentis aquæ superficiem descendit.

(c) * *Celerior non est* quam pro celeritate descensûs ab eâdem undarum altitudine, undè aqua in plagas P Q, K L, N O æque defluit.

Cas. 2. Ponamus jam quod *de*, *fg*, *hi*, *kl*, *mn* designent pulsus à puncto *A* per medium elasticum successive

pro-

193. Ex demonstratis in hoc casu, motus undæ in obstaculum planum incurrentis definiri potest. Undarum motus è loco A quasi centro propagetur. Incurrat unda in obstaculi immoti B C punctum F, cum velocitate & directione A F. Ductâ ex A in B C perpendiculari A E, completoque rectangulo A E F K, resolvatur motus A F, in duos alios motus A E, A K, seu factâ F C æquali A K, in motus K F, F C; & quia particulæ aquæ motu F C in obstaculum non agunt, post impactum pergent eâdem quâ antè impactum velocitate ac directione F C moveri. At motu K F, in obstaculum directè incurrentes motum illum omnem, juxtà leges conflictûs corporum non elasticorum, amittent. Cum autem aqua in F ab aliâ insequente urgeatur, & obstaculum (per hyp.) cedere nequeat, elevabitur illa in F; & deindè vi ponderis sui, id est, vi æquali illi quâ per obstaculi longitudinem elevata fuit, des-

193.

De Motu Corporum.

propagatos. (d) Pulsus propagari concipe per successivas condensationes & rarefactiones medii, sic ut pulsus cujusque pars densissima sphæricam occupet superficiem circa centrum *A* descriptam, & inter pulsus successivos æqualia intercedant intervalla. Designent autem lineæ *de*, *fg*, *hi*, *kl*, &c. densissimas pulsuum partes, per foramen *BC* propagatas. Et quoniam medium ibi densius est quam in spatiis hinc inde versus *KL* & *NO*,

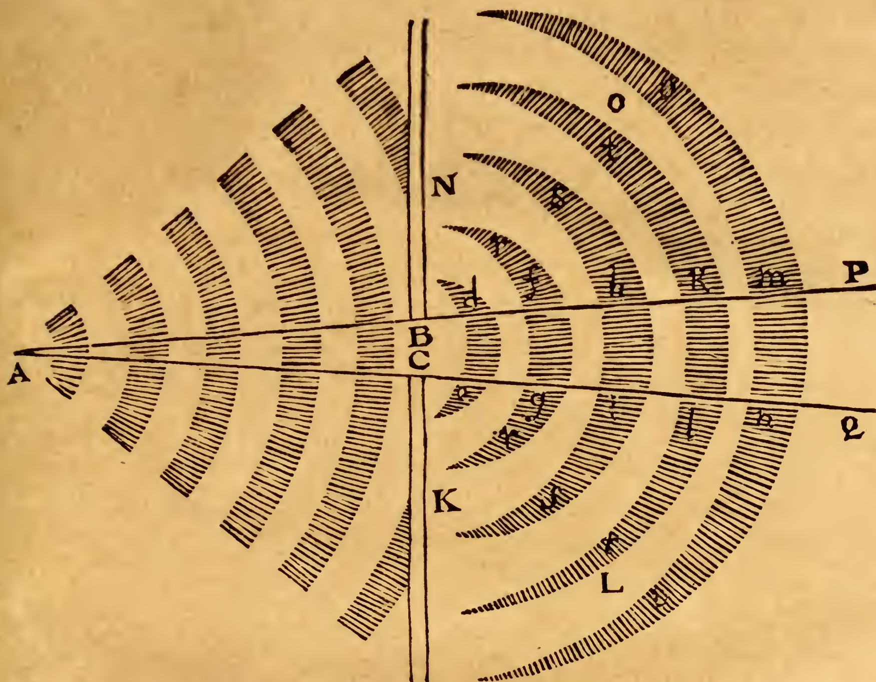
B E A H K F G C g

descendet in plagam FK, eâdemque proinde velocitate ac directione ab obstaculo recedet quâ ad illud accesserat. Ex hoc motu FK, & ex alio FC in aquâ residuo componetur motus FG, per diagonalem parallelogrammi KFCG; unda igitur à puncto F reflectitur secundum directionem FG, & cum eâdem velocitate quâ per AF in obstaculum incurrit, & quâ, sublato obstaculo, motum per Fg, seu per AF productam continuasset, estque angulus reflexionis GFC æqualis angulo incidentiæ AFE. Producatur jam linea GF ut perpendiculo AE etiam producto occurrat in H; & quia angulus $EFH = CFG = EFA$, erit $EH = AE$ & $FH = AF = FG$, & ideò aqua reflexa eodem modo movebitur per FG, ac si ex puncto H, quasi ex centro undarum motus propagaretur; cumque demonstratio hæc omnibus obstaculi plani BC punctis congruat, manifestum est undas reflexas eandem velocitatem eandemque figuram citrà obstaculum obtinere, quas, sublato obstaculo, ultrà lineam BC habuissent.

a b c d e f g h k l m n p q

(d) * 294. *Pulsus propagari concipe per successivas condensationes & rarefactiones medii*, itâ ut primum partes medii è puncto A quaquaversùm propulsæ eant & condensentur, & ubi sunt densissimæ sphæricam superficiem circà centrum A descriptam occupare intelligantur, tum vi elasticâ rarefiant & dilatatione suâ partim versus centrum A redeant, partim à centro illo quaquaversùm recedant & partes vicinas propulsent, ita ut condensentur, atque itâ successivis condensationibus & dilatationibus agitetur totum medium. Quæ ut clarius intelligantur, motum particularum aëris in uno prædictæ sphæræ radio contemplemur. Sint a, b, c, d &c. puncta physica medii quiescentis in rectâ aq, ad æquales ab invicem distantias sita. Punctum a, vi quâlibet acceleratrice urgeatur, secundùm directionem aq, & deindè cessante vis illius actione, per celeritatem acquisitam moveatur. Non poterit itâ moveri particula a, quin successivè moveantur particulæ aliæ b, c, d, e, &c. & quia medium elasticum in intervallis bc, cd, de, &c. gradatim condensatur & vim elasticam majorem acquirit quâ celeritas particulæ a, sibi relictæ continuò minuitur ac tandem prorsus extinguitur; tum verò medium condensatum vi suâ elasticâ utrinque tam versus a, quam versus q dilatatur, & particulas a, b, c, &c.

NO, (e) dilatabit ſeſe tam verſus ſpatia illa *KL*, *NO* utrinque ſita, quam verſus pulſuum rariora intervalla; eoque pacto rarius ſemper evadens è regione intervallorum ac den- LIBER SECUND. SECT. VIII. PROP. XLIII. THEOR. XXXIII.



ſius è regione pulſuum, participabit eorundem motum. Et quoniam pulſuum progreſſivus motus oritur à perpetuâ relaxatione partium denſiorum verſus antecedentia intervalla rariora;

&c. in priſtina loca ſucceſſivè repellit, dum intereà aliæ particulæ ut g, h, &c. verſus q progrediuntur; quo motu medium rurſus condenſatur verſus q, & deinde utrinque dilatatur, atque ità deinceps pulſus per ſucceſſivas condenſationes & rarefactiones medii propagantur. * Hæc pulſuum in medio Elaſtico genitorum naturâ, ad Propoſ. XLVII. fuſius expendetur, ſed iſto in loco hæc ſufficere videntur.

(e) * *Dilatabit ſe tam verſus &c.* Per vim elaſticam quæ vi comprimenti quâ partes medii condenſantur, æqualis eſt, & in omnem loci circumferentiam agit. 294.

295. Motus pulſuum in medio elaſtico ſpectari poteſt ut analogus cum motu undarum in ſuperficie aquæ ſtagnantis; nam condenſatio partium medii elaſtici locum tenet elevationis aquarum, vis elaſtica medii locum gravitatis aquæ, & pars pulſuum denſiſſima parti undarum altiſſimæ correſpondet. Unde in utroque motu, medii particulæ per brevia ſpatia eunt & redeunt, intereadum pulſus vel unda propagatur

ra; & pulſus eâdem ferè celeritate ſeſe in medii partes quieſcentes KL, NO hinc inde relaxare debent; pulſus illi eâdem ferè celeritate ſeſe dilatabunt undique in ſpatia immota KL, NO, quâ propagantur directè à centro A; ideoque ſpatium totum $KLNO$ occupabunt. *Q. E. D.* Hoc experimur in ſonis, qui vel monte interpoſito audiuntur, vel in cubiculum per feneſtram admiſſi ſeſe in omnes cubiculi partes dilatant, inque angulis omnibus audiuntur, non tam reflexi à parietibus oppoſitis, quam à feneſtrâ directè propagati, quantùm ex ſenſu judicare licet.

Caſ. 3. Ponamus denique quod motus cujuſcunque generis propagetur ab A per foramen BC: & quoniam propagatio iſta non fit, niſi quâtenus partes medii centro A propiores urgent:

(294) & eodem modo quo (293) undarum reflexionem expoſuimus, demonſtratur pulſus ab obſtaculo plano B C, (vid. fig. not. 293.) ità repercuti ut ſit angulus reflexionis æqualis angulo incidentiæ, idemque ſit medii motus poſt reflexionem qui produceretur, ſi pulſus ex centro H ſublato obſtaculo, propagaretur.

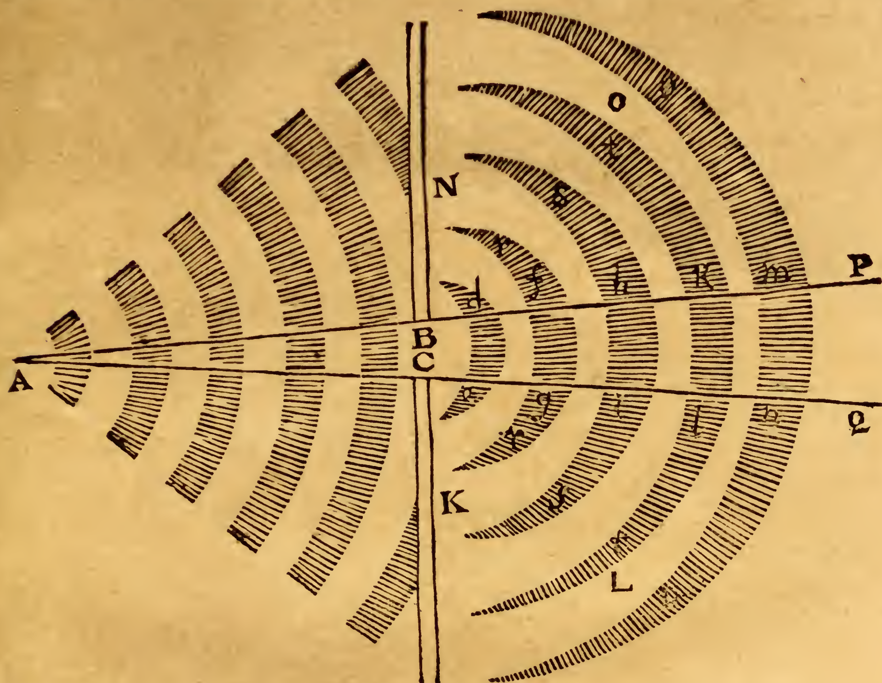
Sed ut hujus ſectionis doctrina quæ ſoni phænomenis explicandis accommodata eſt, melius intelligatur, nonnulla de naturâ ſoni & de motu corporum reſonantium præmittenda ſunt.

296. *Definitio. Sonus directus eſt*, qui à corpore ſonoro ad organum auditûs rectâ lineâ fertur. *Sonus reflexus qui* à corpore ſonoro in alia corpora fertur, & inde ad aurem reflectitur.

297. *Propoſitio. Sonus eſt particularum corporis reſonantis motus tremulus ac vibratorius aeri communicatus & ad aures delatus.* Hæc propoſitio notiſſimis experimentis certa eſt. Nam corpora non reſonant niſi percutiantur, & maximè omnium reſonant corpora dura atquè elaſtica quorum partes ictu flectuntur, & deinde vi ſuâ elaſticâ reſiliunt, atquè ità tremulo ac vibratorio motu agitantur. Particularum corporis reſonantis ſubſultus viſu & tactu percipitur; chartæ fruſtula corpori reſonanti inſidentia ſubſultare oculis cernuntur & admotâ manu partium fremitus ſentitur. Verum ſi fides inſtrumenti muſici tenſa non fuerit, licet oſcillationes tota peragat, ſonum non edit; & forcipis focariæ crura digitis conſtricta & extemplò dimiſſa, oſcillationes agunt ſine ſono; at ſi oſcillando corpus aliquod durum percutiunt, reſonant; ex quibus deducitur ſonum non ſolo totius corporis oſcillatorio motu, ſed particularum ipſius tremore produci. Hic motus aeri contiguo communicatur & pulſus excitat (294). Cum prope aquam ſtagnantem tympanum quatitur, ſubſultus obſervantur in aquæ ſuperficie. Dum inſtrumentorum muſicorum pulſantur nervi, pulviſculi qui aeri innatant & radio ſolis fiunt conſpicui, conformiter ad fremitum nervorum ſubſultare videntur. Si ex duabus chordis muſicis, homogeneis, æqualibus & æque tenſis una pulſetur ut ſonum edat, altera prioris vicina concutitur & ſimiliter reſonat. Tandem corpora ſonora ſub campanâ antliæ pneumaticæ poſita atquè percuſſa, dum educitur aer, ſonum languidiorem reddunt & exhauſto aëre, nullum qui poſſit percipi. Eſt igitur aër vehiculum ſoni: attamen totius aereæ molis motus qui in vento cernitur, per ſe ad producendum ſonum non valet, ſed vibratorius particularum motus ſatis validus neceſſarius eſt.

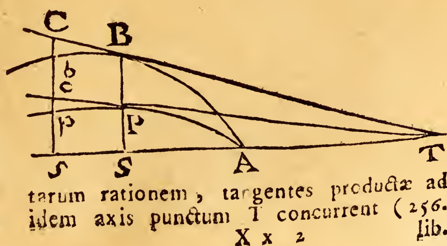
298.

gent commoventque partes ulteriores; & partes quæ urgentur fluidæ sunt, ideoque recedunt quâquâversum in regiones ubi minus premuntur: recedent eædem versus medii partes omnes quiescentes, tam laterales *K L* & *N O*, quam anteriores *P Q*,



eoque pacto motus omnis, quam primum per foramen *B C* transiit, dilatari incipiet & inde tanquam à principio & centro, in partes omnes directè propagari. *Q. E. D.*

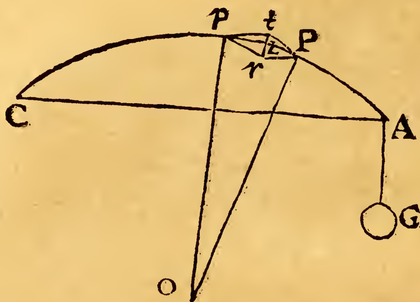
298. Lemma. *Si curvarum duarum AB, AP abscissam communem AS habentium, ordinatæ SB, SP sint semper ad invicem in datâ ratione, imminutis iis in infinitum ut curvæ tandem coincidant cum axe AS, erit ultima ratio curvaturæ eadem quæ ordinatarum.* Duc novam ordinatam s p curvis occurrentem in p & b, & ad puncta B & P duc tangentes occurrentes ordinatæ novæ in C & c. Tum ob datam ordinatarum rationem, tangentes productæ ad idem axis punctum T concurrent (256. 298.



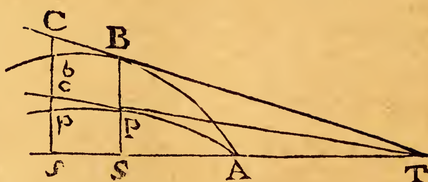
lib.

DE MOTU CORPORUM.

lib. 1.) & ideò ob parallelas SB, sC, erit sC:sc=SB:SP & (per hyp.) SB:SP=sb:sp; undè sC:sc=sb:sp=sC−sb:sc−sp=bC:pc=SB:SP, coincidant jam ordinatæ sb, SB, & lineolæ evanescentes bC, pc, erunt subtensæ angulorum contactûs bBC, pPc, & ordinatis SB, SP in infinitum diminutis, ut curvæ tandem coincidant cum axe AS, subtensæ illæ perpendiculares evadent ad curvas, fietque Bb æqualis Pp. Sed in hâc hypothesi, anguli contactûs sunt ad invicem ut $\frac{bC}{Bb}$, ad $\frac{pc}{Pp}$ (154 lib. 1.), hoc est, ut bC ad pC. Quarè curvaturæ in B & P, quæ angulis contactûs proportionales sunt (121. lib. 1.) erunt subtensis bC, pc, ac proindè (ex dem.) ordinatis SB, SP proportionales. Q. E. D.



299. Lemma. *Vis acceleratrix quâ punctum quodlibet P nervi tensi & uniformiter crassi urgetur, dum per brevissimum spatium oscillatur, est ut nervi curvatura in eodem loco.* Nervus AC pondere G tensus oscillando pervenerit ad positionem curvæ APC, cum axe AC ferè coincidentis, & quia linea recta CA pondere G tenditur ubique æqualiter, æqualis quoque erit tensio omnium partium curvæ APC quamproximè. Sumatur punctum p, puncto P quamproximum, & ductis tangentibus Pt, pt concurrentibus in t, compleatur parallelogrammum Ptpr, ducanturque ad curvam normales PO, pO concurrentes in O, vires æquales quibus arcus evanescens Pp, (qui sumi potest pro arcu circuli radio PO descripti (121. lib. 1.) in directionibus tangentium tP,



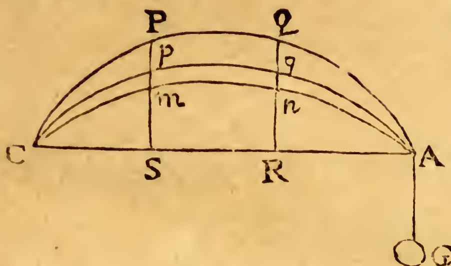
tp, hinc indè trahitur, exponantur per tangentes illas æquales, & singulæ resolvantur in duas alias vires, vis quidem tP in vires tz & zP; & vis tp in vires tz, seu zr & zp, vires zP, zp, æquales & oppositæ nullum motum in arcu Pp producent, at viribus tz & zr, simul, seu vi totâ tr, in directione tr, sivè PO urgebitur. Erit igitur vis motrix quâ particula Pp in directione tr urgetur, ad fili tensionem in P vel p per quam generatur vis illa ut tr ad tP. Sed (ex naturâ circuli) angulus tPr, æqualis est angulo POp, cum arcus Pp sit utriusque mensura, & propterea triangulum isosceIe POp, simile est triangulo isosceli tPr. Quarè Pp est ad PO ut tr ad tP, hoc est, ut vis motrix quâ particula Pp in directione tr seu PO urgetur ad fili tensionem datam G, & ideò vis illa est ut $\frac{Pp}{PO}$. Cum igitur vis acceleratrix sit in ratione vis motricis directè & materiæ movendæ inverse (per def. 8^am. lib. 1.) & materia movenda sit hic ut Pp, ob æqualem ubique nervi crassitudinem, erit vis acceleratrix ut $\frac{1}{PO}$, id est, in ratione inversâ radii circuli curvam osculantis in P, ideóque in ratione curvaturæ in P (121. lib. 1.). Q. E. D.

300. PROPOSITIO. *Si chorda musica AC uniformiter crassa & pondere G tensa, ità inflectatur dum resonat, ut ejus elongatio maxima ab axe motûs AC sit ferè insensibilis & ideò vis tensionis non mutetur per auctam chordæ longitudinem in majoribus suis ab axe distantiis & inclinatio radiorum curvaturæ ad axem negligi possit, ea erit natura curvæ AQPC in quam chorda oscillando inflectitur, in quovis articulo motûs ejusdem chordæ ut ductis pro libitu ordinatis ad axem normalibus QR, PS sit curvatura in Q, ad curvaturam in P, ut QR, ad PS, ac puncta omnia Q, P simul ad axem pervenientia & simul redeun-*

deuntia oscillationes suas omnes eodem tempore peragant ad instar penduli oscillantis in cycloide.

LIBER SECUND. SECT. VIII. PROP. XLII. THEOR. XXXIII.

Cas. 1. Sit curva A Q P C chordæ oscillantis distantia maxima ab axe A S punctis omnibus jam quiescentibus, eaque sit hujus curvæ natura ut curvatura in Q, sit ad curvaturam in P, in ratione distantiæ Q R ad distantiam P S. Hoc posito erit acceleratio in Q ad accelerationem in P in eâdem ratione Q R ad P S (per Lem. superius 299) ideóque initio motûs spatia simul percursa Q q, P p, erunt in eâdem ratione, & divisim spatia percurrenda q R, p S, erunt in eâdem ratione Q R ad P S; undè etiam accelerationes novæ in punctis q & p, erunt in eâdem ratione Q R ad P S (299, 298.) atque erunt ad accelerationes priores in Q & P, ut distantiæ q R & p S ad distantias Q R & P S (299. 298.). Ergò puncti cujusvis P, vel in eâdem curvâ A Q P C vel in diversis A Q P C & A q p c, spectati acceleratio semper est ut ejusdem distantia ab axe motûs A C. Quare (per prop. 51. lib. 1.) puncta omnia nervi ad axem simul perveniunt, simul redeunt & oscillationes singulas peragunt dato tempore ad instar corporis in cycloide oscillantis. Q. E. D.



Cas. 2. Si chorda plectro modò percussa nondum induerit formam curvæ in primo casu descriptæ, erit curvatura in P ad curvaturam in Q in majori vel minori ratione quam distantiæ P S ad distantiam Q R. Sit in majori ratione, & erit velocitas in P, ad velocitatem in Q, in ratione majore quam P S ad Q R, (299) & spatium P p tempore minimo descriptum ad spatium Q q, eodem tempore descriptum in ratione majore quam P S ad Q R, ideóque divisim erit p s minor respectu P S, quam q R, respectu Q R; & quia curvatura cum distantiis ab axe minuitur ac coincidente curvâ cum axe nulla evadit, erit etiam curvatura in p, minor respectu curvaturæ in P, quam curvatura in q, respectu curvaturæ in Q, & indè (299) acceleratio in p, minor respectu accelerationis in P, quam acceleratio in q, respectu accelerationis in Q. Majoris igitur velocitatis acceleratione semper decrescente & minoris velocitatis acceleratione è contrà semper crescente, respectu distantiarum ab axe A C, motus inter se tandem ità temperabuntur, ut punctis P & Q pervenientibus in loca quædam m & n, tum velocitates, tum accelerationes futuræ sint distantiis m S, n R proportionales, ideóque curvâ A n m C, jam existente eâdem quam descripsimus in casu 1°, motus dehinc omnes conspirabunt, atque idem eveniet, si sit curvatura in P ad curvaturam in Q in minore ratione quam distantiæ P S ad distantiam Q R. Quarè quocumque modo percutiatur chorda musica, quam citissimè induet formam curvæ in casu primo descriptæ, atque perget moveri more ibidem descripto. Q. E. D. 300.

Cæterùm inflexiones seu distantias admodum parvas ab axe motûs tam in chordis musicis quam in laminis elasticis ex quibus corpora sonora compacta esse fingi potest, viribus acceleratricibus proportionales & proindè oscillationes esse isochronas experimentis ostendit Clar. s'Gravesandius in Elem. phys. & Mersennus in harmoniâ universali longiorum chordarum vibrationes isochronas oculis observavit. Si verò chorda nimiâ vi pulsetur, vis acceleratrix in experimentis crescit in majori ratione quam distantiæ ab axe motûs & oscillationes breviori tempore absolvuntur.

301. Cor. 1. Datis axibus A C & B D curva musica sic potest describi. Centro D & radio D B describatur circuli quadrans B N E; ducatur ad B D, perpendicularis M N circulo occurrens in N, & producatur ad P, ut sit M P ad D C, in ratione arcûs B N, ad arcum quadrantalem B N E, dico punctum P esse in curvâ musicâ A B C.

Sit enim P punctum curvæ musicæ ABC, & dicantur B D $= a$, A C $= L$, D C $= \frac{1}{2} L$, B M $= x$, P M $= y$, arcus B P $= s$, $PS = MD = z = a - x$, radius curvaturæ in $B = r$: & si fluxio ds sive P p constans sumatur, erit (126. lib. 1.) radius curvaturæ in P, seu P O $= \frac{ds dz}{ddy} = -\frac{ds dx}{ddy}$. Sed (ex dem.) B D est ad P S ut curvatura in B ad curvaturam in P, id est, ut radius curvaturæ in P ad radium curvaturæ in B, seu $a : a - x = -\frac{ds dx}{ddy} : r$. Quarè $raddy = xdxds - adxds$, & sumptis fluentibus, additâ constante $Q ds$, fit $rady = \frac{1}{2} xxds - axds + Qds$. Evanescente B M seu x, fit $dy = ds$, seu B P $=$ P M (per cor. 1. Lem. 7. lib. 1.) & æquatio in hanc abit $rads = Qds$, ideóque constans $Q = ra$. Quare in quovis curvæ puncto P erit $rady \left[ra + \frac{1}{2} xx - ax \right] ds$. Ponatur $ax - \frac{1}{2} xx = bb$, ut sit $rady = [ra - bb] ds$, & $rraady^2 = [ra - bb]^2 ds^2 = [ra - bb]^2 dy^2 + [ra - bb]^2 dx^2$; undè deducitur $[2rabb - b^4] dy^2 = [ra - bb]^2 dx^2$; & quia curva A B C ferè coincidit cum axe A C (per hyp.) ac ideò quantitas bb minima est respectu quantitatis ra in quâ radius curvaturæ r maximus est, si conferatur cum a vel x æquatio in hanc abibit $2rabbdy^2 = rraadx^2$, ex quâ eruitur $dy = \frac{r^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}} dx}{\sqrt{2ax - xx}} = \frac{r^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} \times \frac{adx}{\sqrt{2ax - xx}}$. Ducatur in circulo altera ordinata m n priori M N proxima, & ex puncto N demittatur ad m n perpendiculum N t; evanescente M m, erit (ex naturâ circuli) N M : N D $=$ N t : N n, sivè $\sqrt{2ax - xx} : a = dx : \text{N n} = \frac{adx}{\sqrt{2ax - xx}}$. Est igitur $dy = \text{M n} \times \sqrt{\frac{r}{a}}$, & sumptis fluentibus $y = \text{B N} \times \sqrt{\frac{r}{a}}$, cui æquationi nihil addendum vel subducendum est, cum arcus B N, evanescente P M seu y evanescat. Verum ubi P M coincidit cum C D, seu ubi fit $y = \frac{1}{2} L$, est B N $=$ B N E, & propterea $\frac{1}{2} L = \text{B N E} \times \sqrt{\frac{r}{a}}$, atquè adeò $\sqrt{\frac{r}{a}} = \frac{\frac{1}{2} L}{\text{BNE}}$. Quarè in quolibet curvæ puncto P, est $y = \frac{\text{B N} \times \frac{1}{2} L}{\text{B N E}}$, & proindè $y : \frac{1}{2} L = \text{B N : B N E}$, hoc est, P M est ad C D ut arcus B N ad quadrantem B N E. Q. E. D.

302.

302. Cor. 2. Quia PS est ad BD seu ad a, ut radius r ad radium PO, erit PO × PS = ar. Sit diameter circuli ad circumferentiam ut 1 ad c & ideò a ad BNE ut 1 ad $\frac{1}{2}c$, seu BNE $= \frac{1}{2}ac$, & cum sit (301) $\sqrt{\frac{r}{a}} = \frac{\frac{1}{2}L}{BNE}$, erit $\sqrt{\frac{r}{a}} = \frac{L}{ac}$ & $\frac{r}{a} = \frac{LL}{a^2c^2}$, & $r = \frac{LL}{ac^2}$; atquè PO × PS $= ar = \frac{LL}{cc}$.

303. PROPOSITIO. *Si diameter circuli sit ad circumferentiam ut* 1, *ad* c, *&* *chordæ musicæ uniformiter crassæ longitudo sit* L, *pondus* P, *pondus quo tenditur* G *&* *penduli in cycloide oscillantis longitudo* D; *tempus quo chorda illa oscillationem unam perficit, erit ad tempus unius oscillationis penduli in ratione subduplicatâ* PL *ad* ccDG; *numerus verò oscillationum chordæ tempore uniùs oscillationis penduli erit* $c\sqrt{\frac{DG}{LP}}$.

Nam vis quâ particula Pp in loco P, existens urgetur dicatur A, ejusdem pondus B & (per dem. 299) erit A ad G, ut Pp ad PO, & ob uniformem chordæ crassitudinem est P ad B, ut L, ad Pp, & his rationibus conjunctis, $P \times A$ ad $B \times G$ ut L, ad PO; undè fit A ad B ut $G \times L$ ad PO × P. Jam si particula Pp vi motrice seu pondere A sollicitata oscillaretur in cycloide cujus perimeter tota æquaret duplam distantiam PS, tempus unius vibrationis in cycloide æquale esset tempori vibrationis unius chordæ musicæ seu particulæ Pp; quia vis particulæ Pp, in cycloide oscillantis semper decrescit in ratione distantiæ ejus à puncto infimo seu medio cycloidis, quemadmodum vis illa decrescit in ratione distantiæ a puncto S cum particula Pp vibrationes suas agit in rectâ PS, & vis motrix particulæ in puncto cycloidis altissimo æqualis est vi motrici A, (per cor. prop. 51. lib. 1.). Si verò particula Pp pondere suo absoluto B oscilletur in cycloide cujus perimeter tota sit $2D$, erit hujus penduli longitudo D (per cor. prop. 50. lib. 1.), & tempus unius vibrationis chordæ musicæ erit ad tempus unius oscillationis penduli in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione longitudinis PS ad longitudinem D, & subduplicatâ ratione ponderis B ad vim A (cor. 5. prop. 24. lib 2.); id est, in ratione subduplicatâ quantitatis PO × PS × P, ad quantitatem GLD, atquè ideò ob PO × PS $= \frac{LL}{cc}$ (302.) in ratione subduplicatâ PL ad ccGD. Q. D. E.

303. Quia verò numerus vibrationum isochronarum quas chorda vel pendulum tempore quovis dato peragunt sunt inversè ut oscillationum tempora, erit numerus vibrationum quas chorda musica tempore uniùs oscillationis penduli prædicti peragit ad unitatem ut tempus unius oscillationis penduli ad tempus unius vibrationis chordæ, ideoque in ratione subduplicatâ ccGD, ad PL, & proindè numerus vibrationum quas chorda musica peragit eo tempore quo pendulum cujus longitudo est D semel oscillatur est $c\sqrt{\frac{GD}{PL}}$. Q. E. D.

304. Cor. 1. Si longitudo chordæ L digitis pedis Parisiensis exprimatur, numerus vibrationum quas chorda tempore minuti unius secundi peragit, erit 19,0341 $\sqrt{\frac{G}{PL}}$ quamproximè. Nam pendulum cujus longitudo D est pedum Parisiensium 3 & linearum $8\frac{1}{2}$, seu digit. $\frac{881}{24}$, singulas oscillationes tempore minuti unius secundi absolvit (471. lib. 1.) & prætereà ut 113 ad 355, ità diameter 1 ad circuli circumferentiam c, quæ proinde erit $\frac{355}{113}$. Quarè si loco D & c scribantur ipsorum valores in formulâ, erit $c\sqrt{\frac{GD}{PL}} = \frac{355}{113}\sqrt{\frac{881G}{24LP}} = 19{,}0341\sqrt{\frac{G}{PL}}$ quamproximè.

305. Cor. 2. Si conferantur variarum chordarum oscillationes, quia quantitates c & D in formulâ $c\sqrt{\frac{GD}{PL}}$, datæ sunt, numeri vibrationum dato tempore peractarum erunt ut $\sqrt{\frac{G}{PL}}$, & ideò tempora quibus singulæ vibrationes fiunt ut $\sqrt{\frac{PL}{G}}$ (473 lib. 1.).

306. Cor. 3. Iisdem positis, si prætereà chordæ sint homogeneæ, æquè crassæ &c.

De Motu Corporum.

& æquè tensæ, cum in eo casu pondus G datum sit & pondus P sit ut chordæ longitudo L, tempora quibus singulæ vibrationes fiunt, erunt ut $\sqrt{LL}$, seu ut chordarum longitudines; Quod experimentis confirmavit Clariss. s'Gravesande in Elem. Physices.

Scholion. Quæ de chordis vibrantibus huc usque diximus, ea fere omnia, nonnullis tamen immutatis, mutuati sumus ex tractatu de methodo incrementorum Clariss. Taylor. Formulas nostris similes dedêre Celeberrimi Viri, Sauveur in monumentis Acad. Paris. an. 1713. & Daniel Bernoulli tum in actis Petropol. tum in Dissertatione de Propagatione Lucis ab Academiâ regiâ Paris. præmio condecoratâ an. 1736.

307. PROPOSITIO. *Si numeri vibrationum quas chordæ musicæ dato tempore peragunt, sint inter se ut numeri* 24, 27, 30, 32, 36, 40, 45, 48, chordæ illæ tonos edent qui his notissimis vocibus significantur, UT, RE, MI, FA, SOL, LA, SI, *ut*, initio sumpto à tono graviori. Hæc propositio experimentis demonstrata est; nam nervi musici homogenei, æquè crassi eodemque pondere tensi, quorum longitudines sunt inversè ut numeri illi, tonos quos diximus edunt, & horum nervorum longitudines sunt inversè ut numeri vibrationum quas dato tempore absolvunt & directè ut singularum vibrationum tempora ideoque ut 180, 160, 144, 135, 120, 108, 96, 90: (306).

308. *Cor.* Sonorum differentia secundùm *grave* & *acutum*, à minori vel majori numero vibrationum quas chordæ musicæ dato tempore peragunt, pendet, & eò graviores sunt soni quò tardiores sunt singulæ chordarum vibrationes & contrà.

309. PROPOSITIO. *Corpora sonora homogenea & similia quorum latera homologa rationem habent inversam nnmerorum* 24, 27, 30, 32, 36, 40, 45, 48, *tonos edunt*, UT, RE, MI, FA, SOL, LA, SI, *ut*. Hanc propositionem probant experimenta quæ in campanis, cylindris & prismatibus homogeneis & similibus habuerunt Mersennus in harmoniâ universali & D. Carré in monum. Acad. Reg. an. 1709.

310. PROPOSITIO. *Dùm corpus sonorum percutitur, tremulus particularum motus ex ictu & vi elasticâ creatus, remotis obstaculis, per superficiem corporis propagatur*: quod quidem leviora chartæ frustula superficiei corporis resonantis imposita, tremore suo indicant.

311. PROPOSITIO. *Campanæ figura ictu clavæ ità mutari oculis cernitur ut cum rotunda esset, fiat ovata & quandiù auditur sonus, alternis mutatur oscillationibus.*

312. *Cor.* Ex tribus ultimis propositionibus concludere licet, ut in chordis ità & in aliis corporibus resonantibus, tonos pendere à numero vibrationum seu undulationum quæ dato tempore peraguntur.

PRO-

PROPOSITIO XLIII. THEOREMA XXXIV.

Corpus omne tremulum in medio elastico propagabit motum pulsuum undique in directum; in medio verò non elastico motum circularem excitabit.

Cas. 1. Nam partes corporis tremuli vicibus alternis eundo & redeundo, itu suo urgebunt & propellent partes medii sibi proximas, & urgendo comprimént easdem & condensabunt; dein reditu suo sinent partes compressas recedere & sese expandere. Igitur partes medii corpori tremulo proximæ ibunt & redibunt per vices, ad instar partium corporis illius tremuli: & quâ ratione partes corporis hujus agitabant hasce medii partes, hæ similibus tremoribus agitatæ agitabunt partes sibi proximas, eæque similiter agitatæ agitabunt ulteriores, & sic deinceps in infinitum. Et quemadmodum medii partes primæ eundo condensantur & redeundo relaxantur, sic partes reliquæ quoties eunt condensabuntur, & quoties redeunt sese expandent. Et propterea non omnes ibunt & simul redibunt (sic enim determinatas ab invicem distantias servando, non rarefierent & condensarentur per vices) sed accedendo ad invicem ubi condensantur, & recedendo ubi rarefiunt, (f) aliquæ earum ibunt dum aliæ redeunt; idque vicibus alternis in infinitum. Partes autem euntes & eundo condensatæ, ob motum suum progressivum, quo feriunt obstacula, sunt pulsus; & propterea pulsus successivi à corpore omni tremulo in directum propagabuntur; idque æqualibus circiter ab invicem distantiis, (g) ob æqualia temporis intervalla, quibus corpus tremoribus suis singulis singulos pulsus excitat. Et quanquam corporis tremuli partes eant & redeant secundum plagam aliquam certam & determinatam, tamen pulsus inde per medium propagati sese dilatabunt ad latera, per propositionem præcedentem;

(f) * *Aliquæ earum ibunt* (294).

(g) * *Ob æqualia temporis intervalla.* (300). 312.

tem; & à corpore illo tremulo tanquam centro communi, ſecundum ſuperficies propemodum ſphæricas & concentricas, undique propagabuntur. Cujus rei exemplum aliquod habemus in undis, quæ ſi digito tremulo excitentur, non ſolum pergent hinc inde ſecundum plagam motus digiti, ſed, in modum circulorum concentricorum, digitum ſtatim cingent & undique propagabuntur. Nam gravitas undarum ſupplet locum vis elaſticæ.

Caſ. 2. (h) Quod ſi medium non ſit elaſticum: quoniam ejus partes à corporis tremuli partibus vibratis preſſæ condenſari nequeunt, propagabitur motus in inſtanti ad partes ubi medium facillimè cedit, hoc eſt, ad partes quas corpus tremulum alioqui vacuas à tergo relinqueret. Idem eſt caſus cum caſu corporis in medio quocunque projecti Medium cedendo projectilibus, non recedit in infinitum; ſed in circulum eundo, pergit ad ſpatia quæ corpus relinquit à tergo. Igitur quoties corpus tremulum pergit in partem quamcunque, medium cedendo perget per circulum ad partes quas corpus relinquit; & quoties corpus regreditur ad locum priorem, medium inde repelletur & ad locum ſuum priorem redibit. Et quamvis corpus tremulum non ſit firmum, ſed modis omnibus flexile, ſi tamen magnitudine datum maneat, quoniam tremoribus ſuis nequit medium ubivis urgere, quin alibi eidem ſimul cedat; efficiet ut medium, recedendo à partibus ubi premitur, pergat ſemper in orbem ad partes quæ eidem cedunt. *Q. E. D.*

Corol. Hallucinantur igitur qui credunt agitationem partium flammæ ad preſſionem, per medium ambiens, ſecundum lineas rectas propagandum conducere. Debebit ejuſmodi preſſio non ab agitatione ſolâ partium flammæ: ſed à totius dilatatione derivari.

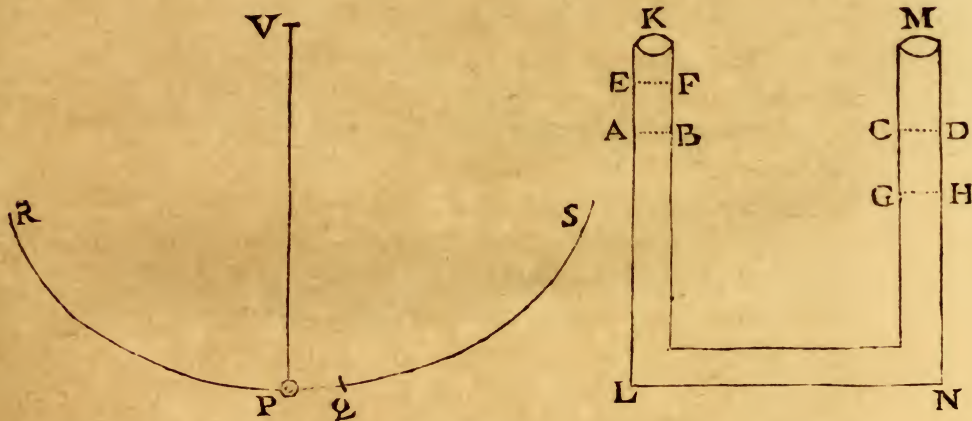
(h) * *Quod ſi medium* continuum ſit & *non elaſticum*, &c.

PRO-

PROPOSITIO XLIV. THEOREMA XXXV.

Si aqua in canalis cruribus erectis KL, MN *vicibus alternis aſcendat & deſcendat; conſtruatur autem pendulum cujus longitudo inter punctum ſuſpenſionis & centrum oſcillationis æquetur ſemiſſi longitudinis aquæ in canali: dico quod aqua aſcendet & deſcendet iiſdem temporibus quibus pendulum oſcillatur.*

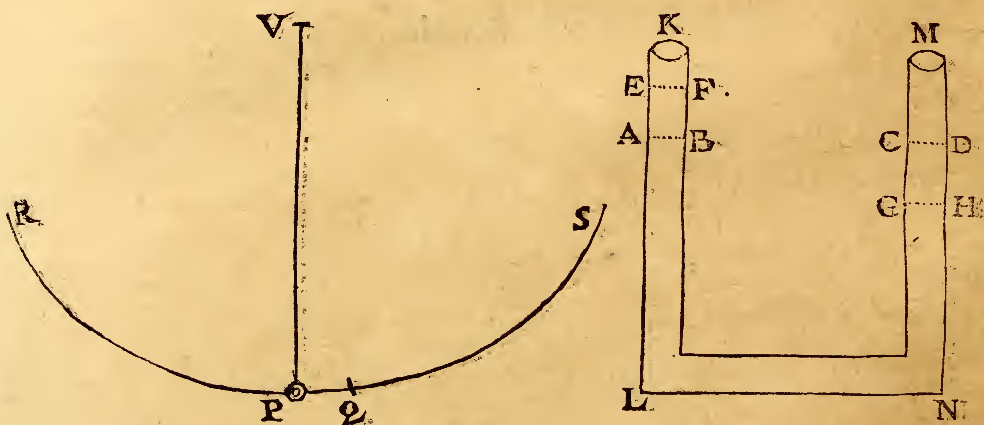
Longitudinem aquæ menſuro ſecundum axes canalis & crurum, eandem ſummæ horum axium æquando; & reſiſtentiam aquæ, quæ oritur ab attritu canalis, hic non conſidero. Deſignent igitur *AB*, *CD* mediocrem altitudinem aquæ in crure



utroque; & ubi aqua in crure *KL* aſcendit ad altitudinem *EF*, deſcenderit aqua in crure *MN* ad altitudinem *GH*. Sit autem *P* corpus pendulum, *VP* filum, *V* punctum ſuſpenſionis, *RPQS* cyclois quam pendulum deſcribat, *P* ejus punctum infimum, *PQ* arcus altitudini *AE* æqualis. Vis, quâ motus aquæ alternis vicibus acceleratur & retardatur, eſt ex-

DE MOTU CORPORUM.

exceſſus ponderis aquæ in alterutro crure ſupra pondus in altero, ideoque, ubi aqua in crure *KL* aſcendit ad *EF*, & in crure altero deſcendit ad *GH*, (i) vis illa eſt pondus duplicatum aquæ *EABF*, & propterea eſt ad pondus aquæ totius ut *AE* ſeu *PQ* ad (k) *VP* ſeu *PR*. Vis etiam, quâ pondus *P* in loco quovis *Q* acceleratur & retardatur in cycloide (per corol. prop. LI.) eſt ad ejus pondus totum, ut ejus diſtantia *PQ* à loco infimo *P*, ad cycloidis longitudinem *PR*. Quare aquæ & penduli, æqualia ſpatia *AE*, *PQ* deſcribentium, vires motrices ſunt ut pondera movenda; (l) ideoque, ſi aqua & pendulum in principio quieſcunt, vires illæ movebunt eadem æqualiter temporibus æqualibus, efficientque ut motu reciproco ſimul eant & redeant. *Q. E. D.*



Co-

(i) * *Vis illa eſt pondus duplicatum &c.* Eſt enim vis illa pondus tam aquæ EABF, quam aquæ æqualis C G H D.

(k) * *Ad VP ſeu* P R. Semicyclois P R, æqualis eſt longitudini penduli, (per cor. prop. 50. lib. I.).

(l) 313. * *Ideoque ſi aqua & pendulum &c.* Id evidentiſſimum fit ſi pondus P quod, manente oſcillationis unius tempore poteſt ad arbitrium aſſumi, capiatur æquale ponderi aquæ totius in canali; tum enim vires motrices, maſſæ movendæ, & ſpatia deſcribenda, ideoque & tempora quibus ſpatia illa deſcribuntur, in canali

Corol. 1. Igitur aquæ aſcendentis & deſcendentis, ſive motus intenſior ſit ſive remiſſior, vices omnes ſunt iſochronæ.

Corol. 2. Si longitudo aquæ totius in canali ſit pedum *Pariſienſum* $6\frac{1}{9}$: aqua tempore minuti unius ſecundi deſcendet, & tempore minuti alterius ſecundi aſcendet; & ſic deinceps vicibus alternis in infinitum. (m) Nam pendulum pedum $3\frac{1}{18}$ longitudinis tempore minuti unius ſecundi oſcillatur.

Corol. 3. Auctâ autem vel diminutâ longitudine aquæ, augetur vel diminuitur tempus reciprocationis in longitudinis ratione ſubduplicatâ.

PROPOSITIO XLV. THEOREMA XXXVI.

Undarum velocitas eſt in ſubduplicatâ ratione latitudinum.

Conſequitur ex conſtructione propoſitionis ſequentis.

PROPOSITIO XLVI. PROBLEMA X.

Invenire velocitatem undarum.

Conſtituatur pendulum cujus longitudo, inter punctum ſuſpenſionis & centrum oſcillationis, æquetur latitudini undarum: & quo tempore pendulum illud oſcillationes ſingulas peragit, eodem undæ progrediendo latitudinem ſuam propemodum conficient.

Un-

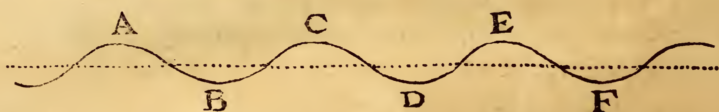
nali & in cycloide æquantur reſpectivè. Sed obſervandum eſt ſuperficiem A B, eſſe locum æquilibrii, ad quem cum aqua pervenit, nullâ amplius vi acceleratrice urgetur, ſed velocitate tantum acquiſitâ ulteriùs deſcendit vel aſcendit; ſicuti corpus pendulum *P* dum pervenit in locum cycloidis infimum *P* ſolâ velocitate acquiſitâ movetur. Undè quo tempore aqua deſcenſum unum abſolvit in crure alterutro canalis, eodem tempore pendulum oſcillationem unam ex deſcenſu & aſcenſu compoſitam perficit, duas verò oſcillationes abſolvit intereadum aqua è loco E deſcendit & ad eundem redit. 313

(m) * *Nam pendulum ped* $3\frac{1}{18}$, ſeu ped. 3. & lin. 8. quam proximè (471. lib. 1).

Clariſſ. Hermanus tom. 3. comm. Acad. Petrop. motum aquæ in tubis crura quomodolibet ad baſim inclinata habentibus definivit. Rem generaliùs pertractavit Celeb. D. Bernoullius in Hydrodynamicâ. Hos authores, ſi lubet, adeat lector.

De Motu Corporum.

Undarum latitudinem voco menſuram tranſverſam, quæ vel vallibus imis, vel ſummis culminibus interjacet. Deſignet *ABCDEF* ſuperficiem aquæ ſtagnantis, undis ſucceſſivis aſcendentem ac deſcendentem, ſintque *A*, *C*, *E*, &c. undarum culmina, & *B*, *D*, *F*, &c. valles intermedii. Et quoniam motus undarum fit per aquæ ſucceſſivum aſcenſum & deſcenſum, ſic ut ejus partes *A*, *C*, *E*, &c. quæ nunc al-



tiſſimæ ſunt, mox fiant infimæ; & vis motrix, quâ partes altiſſimæ deſcendunt & infimæ aſcendunt, eſt pondus aquæ elevatæ; alternus ille aſcenſus & deſcenſus analogus erit motui reciproco aquæ in canali, eaſdemque temporis leges obſervabit: & propterea (per prop. XLIV.) ſi diſtantiæ inter undarum loca altiſſima *A*, *C*, *E* & infima *B*, *D*, *F* (n) æquentur duplæ penduli longitudini; partes altiſſimæ *A*, *C*, *E*, tempore oſcillationis unius evadent infimæ, & tempore oſcillationis alterius denuo aſcendent. Igitur inter tranſitum undarum ſingularum tempus erit oſcillationum duarum; hoc eſt, unda deſcribet latitudinem ſuam, quo tempore pendulum illud bis oſcillatur; ſed eodem tempore pendulum, cujus longitudo quadrupla eſt, ideoque æquat undarum latitudinem, oſcillabitur ſemel. *Q. E. I.*

Co-

(n) * *Æquentur duplæ penduli longitudini.* Quoniam, ex dictis, unda percurrit latitudinem ſuam A C vel B D intereadum altitudo A transfertur in C, vel cavitas B in D, quod fieri non poteſt niſi aqua ab altitudine undarum deſcendat, & deindè ad eandem altitudinem aſcendat, & quia cavitas quæ eſt infrà aquæ quieſcentis ſuperficiem quam in figurâ exhibet linea punctis diſtincta, eſt circiter æqualis elevationi aquæ ſuprà eandem ſuperficiem quæ eſt æquilibrii locus, patet (313) totius aquæ movendæ longitudinem æqualem eſſe longitudini cavitatis vel elevationis aquæ infrà vel ſuprà locum illum æquilibrii, ac proindè cum longitudo cavitatis vel elevationis illius æqualis ſit diſtantiæ A B, vel B C, pendulum cujus longitudo eſt $\frac{1}{2}$ A B vel $\frac{1}{2}$ B C, ſemel

Corol. 1. Igitur undæ, quæ pedes *Parisienses* $3\frac{1}{18}$ latæ sunt, (o) tempore minuti unius secundi progrediendo latitudinem suam conficient; ideoque tempore (p) minuti unius primi percurrent pedes $183\frac{1}{3}$, & horæ spatio pedes 11000 quamproximè.

LIBER SECUND. SECT. VIII. PROP. XLVI. PROBL. X.

(q) *Corol.* 2. Et undarum majorum vel minorum velocitas augebitur vel diminuetur in subduplicatâ ratione latitudinis.

Hæc ita se habent ex hypothesi quod partes aquæ rectà ascendunt vel rectà descendunt; sed ascensus & descensus ille (r) verius fit per circulum, ideoque tempus hâc propositione non nisi quamproximè definitum esse affirmo.

PROP.

semel oscillabitur eo tempore quo aqua ascendit, & iterum oscillabitur, intereadum aqua descendit (313.) atque ità oscillabitur bis quo tempore unda describit latitudinem suam. Quoniam igitur numeri oscillationum quas pendula eodem tempore peragunt sunt in ratione subduplicatâ longitudinis pendulorum inversè (474. lib. 1.) pendulum cujus longitudo est A B C D, quadrupla longitudinis $\frac{1}{2}$ A B semel oscillabitur quo tempore unda latitudinem suam percurrit. In undis verò latioribus quæ altiùs non elevantur, linea curva A B C, vix differt à rectâ AC, quæ est undæ latitudo, & propterea in eo casu unda latitudinem suam describit, intereadum pendulum cujus longitudo est recta A C, semel oscillatur.

(o) * *Tempore minuti unius secundi* (471. lib. 1.).

(p) * *Tempore minuti unius primi.* Quia undarum datæ latitudinis velocitas æquabilis est (ex dem.) Si undæ latitudo data ped. $3\frac{1}{18}$, ducatur in tempus 60″, factum $183\frac{1}{3}$ ped. erit spatium quod unda tempore minuti unius primi seu minutorum secundorum 60, describit & ducto rursus hoc numero $183\frac{1}{3}$ in 60′, producetur spatium 11000 ped. quod unda tempore horæ unius conficit. 313

(q) * *Cor.* 2. Undarum velocitates sunt ut earumdem latitudines directè & tempora quibus latitudines illas percurrunt inversè (5. lib. 1.) Sed tempora illa sunt in subduplicatâ ratione latitudinum undarum seu longitudinum pendulorum quæ eo tempore quo undæ latitudines suas describunt, semel oscillantur (472. lib. 1.). Undarum igitur velocitates sunt in ratione compositâ ex ratione latitudinum directè & ratione subduplicatâ earumdem latitudinum inversè, ideóque sunt in ratione subduplicatâ latitudinum directè.

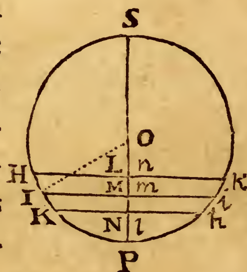
(r) * *Veriùs fit per circulum*, seu per arcum curvilineum qui magis accedit ad figuram arcûs circularis quam ad figuram canalis rectilinei in quo aqua, rectà ascendit & descendit.

De Motu Corporum.

PROP. XLVII. THEOR. XXXVII.

Pulsibus per fluidum propagatis, singulæ fluidi particulæ, motu reciproco brevissimo euntes & redeuntes, accelerantur semper & retardantur pro lege oscillantis penduli.

Designent AB, BC, CD, pulsuum successivorum æquales distantias; ABC plagam motus pulsuum ab A versus B propagati; E, F, G puncta tria physica ([f]) medii quiescentis in rectâ AC ad æquales ab invicem distantias sita; Ee, Ff, Gg spatia æqualia perbrevia per quæ puncta illa motu reciproco ([t]) singulis vibrationibus eunt & redeunt; ϵ, φ, γ loca quævis intermedia eorundem punctorum; & EF, FG lineolas physicas seu medii partes lineares punctis illis interjectas, & successivè translatas in loca $\epsilon\varphi$, $\varphi\gamma$ & ef, fg. Rectæ Ee æqualis ducatur recta PS. Bisecetur eadem in O, centroque O & intervallo OP describatur circulus $SIPi$. Per hujus circumferentiam totam cum partibus suis exponatur tempus totum vibrationis unius cum ipsius partibus propor-



([f]) * *Medii quiescentis*, id est, nondum agitati vibrationibus corporis tremuli, aut inde productis aeris pulsibus.

([t]) 314. * *Singulis vibrationibus eunt & redeunt.* Si corporis tremuli aut chordæ musicæ oscillantis particula incipiat moveri in E, & eundo secum transferat medii punctum E, in locum e, & deinde particula illa chordæ musicæ vi propriâ & punctum e, medii inter e, & C compressi ac condensati dilatatione redeant in locum E, unicus in medio elastico pulsus secundum directionem BC, producetur, & singulis aliis vibrationibus corporis tremuli vel chordæ musicæ ex itu & reditu compositis, singuli excitabuntur pulsus (prop. 43.) atque adeò pulsus latitudinem suam describit intereadum punctum E, vibrationem unam ex itu & reditu per brevissimum spatium E e, compositam, absolvit.

portionalibus; ſic ut completo tempore quovis PH vel $PHSh$, ſi demittatur ad PS perpendiculum HL vel hl, & capiatur $E\varepsilon$ æqualis PL vel Pl, punctum phyſicum E reperiatur in ε. Hâc lege punctum quodvis E, eundo ab E per ε ad e, & inde redeundo per ε ad E, iiſdem accelerationis ac retardationibus gradibus vibrationes ſingulas peraget (u) cum oſcillante pendulo. Probandum eſt quod ſingula medii puncta phyſica tali motu agitari debeant. Fingamus igitur medium tali motu à causâ quâcunque cieri, & videamus quid inde ſequatur.

In circumferentiâ $PHSh$ capiantur æquales arcus HI, IK vel hi, ik, eam habentes rationem ad circumferentiam totam quam habent æquales rectæ EF, FG ad pulſuum intervallum totum BC. Et demiſſis perpendiculis IM, KN vel im, kn; quoniam puncta E, F, G motibus ſimilibus ſucceſſivè agitantur, & vibrationes ſuas integras ex itu & reditu compoſitas interea peragunt dum pulſus transfertur à B ad C; ſi PH vel $PHSh$ ſit tempus ab initio motus puncti E, (x) erit PI vel $PHSi$ tempus ab initio motus puncti F, & PK vel $PHSk$ tempus ab initio motus puncti G; & propterea $E\varepsilon$, $F\varphi$, $G\gamma$ erunt ipſis PL, PM, PN in itu punctorum vel ipſis Pl, Pm, Pn in punctorum reditu, (y) æquales reſpectivè. Unde $\varepsilon\gamma$ ſeu $EG + G\gamma - E\varepsilon$ in itu punctorum æqualis erit $EG - LN$, in reditu autem æqualis $EG + ln$. (z) Sed $\varepsilon\gamma$ latitudo eſt ſeu ex-

(u) * *Cum oſcillante pendulo.* (prop. 52. lib. 1.).

(x) * *Erit PI vel PHSI.* Quoniam puncta E, F, G, & alia deinceps, motibus ſimilibus per medii compreſſionem & dilatationem communicatis ſucceſſive agitantur, pulſus per æqualia ſpatia EF, FG &c. æqualibus temporibus propagatur, ideóque tempus quo transfertur ab E ad F, vel ab F ad G, eſt ad tempus totum quo transfertur à B ad C, & quo ſingula puncta E, F, G vibrationes ſuas integras ex itu & reditu compoſitas perficiunt, ut ſpatium EF vel FG ad ſpatium BC, in quâ ratione etiam eſt arcus HI, vel IK, ad totam circumferentiam PHSP, (per hyp.) quæ tempus totum quo pulſus à B ad C transfertur, exponit, & differentia inter tempus ſumptum ab initio motûs puncti E & tempus ſumptum ab initio motûs puncti F, eſt tempus illud quod pulſus transfertur ab E ad F. Quare *ſi PH vel PHSk exponat tempus ab initio motûs puncti E, PI vel PHSI, exponet tempus ab initio motûs puncti F*, cum HI vel hi exponat differentiam inter tempus ab initio motûs puncti E, & tempus ab initio ſimilis motûs puncti F, &c.

(y) * *Æquales reſpectivè.* (per prop. 52. vel 38. lib. 1.).

(z) * *Sed εγ eſt latitudo ſeu expanſio partis medii EG, in loco εγ*, quia punctum E translatum eſt in locum ε, & punctum G in locum γ.

De Motu Corporum.

expansio partis medii EG in loco $\epsilon\gamma$; & propterea expansio partis illius in itu est ad ejus expansionem mediocrem, ut $EG-LN$ (a) ad EG; in reditu autem ut $EG+ln$ seu $EG+LN$ ad EG. Quare (b) cum sit LN ad KH ut IM ad radium OP, & (c) KH ad EG ut circumferentia $PHShP$ ad BC, id est, si ponatur V pro radio circuli circumferentiam habentis æqualem intervallo pulsuum BC, (d) ut OP ad V; & ex æquo LN ad EG ut IM ad V: erit expansio partis EG punctive physici F in loco $\epsilon\gamma$ ad expansionem mediocrem, quam pars illa habet in loco suo primo EG, (e) ut $V-IM$ ad V in itu, utque $V+im$ ad V in reditu. Unde vis elastica puncti F in loco $\epsilon\gamma$ (f) est ad vim ejus elasticam mediocrem in loco EG, ut $\frac{1}{V-IM}$ ad $\frac{1}{V}$ in itu, in reditu verò ut $\frac{1}{V+im}$ ad $\frac{1}{V}$. Et eodem argumento vires elasticæ punctorum physicorum E & G in itu, sunt ut $\frac{1}{V-HL}$ & $\frac{1}{V-KN}$ ad $\frac{1}{V}$; (g) & virium differentia ad medii vim elasticam mediocrem, ut $\frac{HL-KN}{VV-V\times HL-V\times KN+HL\times KN}$ ad $\frac{1}{V}$. Hoc est, ut

(a) * *Ad EG.* Nam cùm E, F, G sint puncta tria medii quiescentis seu motu impresso nondum condensati vel rarefacti, expansio medii in loco EG, mediocris seu quasi media est inter minimam ipsius expansionem in locis pulsuum densissimis, & maximam in locis rarissimis.

(b) 315. * *Cum sit LN ad KH.* Anguli ad centrum IOP mensura est arcus IP æqualis dimidio arcui IPi, seu KPk; & anguli ad circumferentiam KHk, mensura est etiam dimidius arcus KPk; & ideò anguli IOP & KHL, æquales sunt. Hinc si ex puncto K, demissum intelligatur ad HL, perpendiculum æquale LN, hoc perpendiculum cum ordinatarum HL & KN differentiâ & cum arcu minimo KH triangulum constituet simile triangulo IOM. Est igitur LN ad KH, ut IM ad IO seu OP.

(c) * *Et KH ad EG.* (per hyp. suprà).

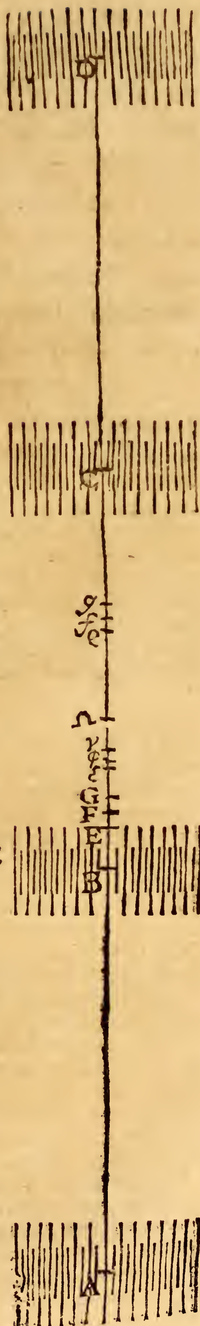
(d) * *Ut OP ad V.* Sunt enim circulorum peripheriæ PHSP & BC radiis suis OP & V proportionales.

(e) * *Ut V−IM ad V.* Quia enim (ex dem.) $LN=\frac{EG\times IM}{V}$, erit $EG-LN=\frac{V\times EG-IM\times EG}{V}$, & hinc $EG-LN$ ad EG ut $V-IM$ ad V. Et similiter ob $LN=ln$, & $IM=im$, erit $EG+ln$ ad EG ut $V+im$ ad V.

(f) * *Est ad vim ejus elasticam &c.* Hic supponit Newtonus vim elasticam medii densitati proportionalem, quam quidem hypothesim in aëre nostro, cæteris paribus, quamproximè veram esse experimentis constat. At, datâ medii massâ, densitas est ut expansio seu volumen inversè; Quarè cum hic data sit massa medii in volumine EG vel $\epsilon\gamma$, contenti, vis elastica est ut expansio reciprocè & *ideò vis elastica puncti F, in loco $\epsilon\gamma$, &c.*

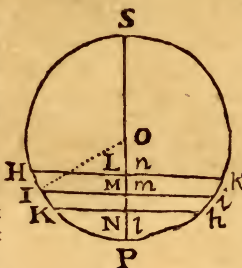
(g) * *Et virium differentia*, id est, ex-

$\frac{HL-KN}{VV}$ ad $\frac{1}{V}$, sive ut $HL-KN$ ad V, si modo (ob (h) angustos limites vibrationum) supponamus HL & KN indefinite minores esse quantitate V. Quare cum quantitas V detur, differentia virium est ut $HL-KN$, hoc est (ob (i) proportionales $HL-KN$ ad HK, & OM ad OI vel OP, datasque HK & OP) ut OM; id est, si Ff bisecetur in Ω, ut $\Omega\phi$. (k) Et eodem argumento differentia virium elasticarum punctorum physicorum ϵ & γ, in reditu lineolæ physicæ $\epsilon\gamma$ est ut $\Omega\phi$. Sed differentia illa (id est, excessus vis elasticæ puncti ϵ supra vim elasticam puncti γ)



excessus vis elasticæ puncti E, suprà vim elasticam puncti G erit ad medii vim elasticam mediocrem &c.

(h) * *Ob angustos limites vibrationum.* Quoniam eo tempore quo punctum G vibrationem unam ex itu & reditu per brevissimum spatium Ee compositam absolvit & quo pulsus transfertur à B ad C, innumeræ fere medii particulæ per medii compressionem & dilatationem successivè agitantur, spatium illud Ee, seu æquale PS, perbreve erit, si conferatur cum pulsuum intervallo BC, aut etiam cum radio V circuli qui circumferentiam habet æqualem BC. Rectè igitur supponitur quantitates HL & KN, longe minores esse quantitate V.



(i) * *Ob proportionales.* Liquet (per not. 215.) esse HL—KN ad HK, ut est OM ad OI vel OP, undè $HL-KN=\frac{HK\times OM}{OP}$, & ideò ob datum radium OP, datumque arcum HK, qui est ad datam FG ut peripheria data PHSP ad datam BC, erit HL—KN ut variabilis OM. Sed Ff=PS, Fϕ=PM, & propterea si Ff bisecetur in Ω, ut sit OP=FΩ, erit OM=$\phi\Omega$. Est igitur HL—KN ut $\phi\Omega$.

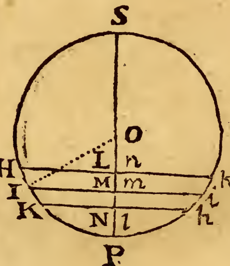
(k) * *Et eodem argumento.* Nam in reditu, vis elastica puncti F in loco $\epsilon\gamma$ est ad vim ejus elasticam mediocrem in loco EG, ut $\frac{1}{V+im}$, ad $\frac{1}{V}$, & vires elasticæ punctorum physicorum G & E, in loco $\epsilon\gamma$, sunt ut $\frac{1}{V+hl}$, & $\frac{1}{V+kn}$, ad $\frac{1}{V}$, & virium differentia ad medii vim elasticam mediocrem ut $\frac{kn-hl}{VV+V\times hl+V\times kn+hl\times kn}$, ad $\frac{1}{V}$, hoc est, ut $\frac{kn-hl}{VV}$ ad $\frac{1}{V}$ sive ut kn—hl ad V, &c.

De Motu Corporum.

(l) est vis quâ interjecta medii lineola physica $\epsilon\gamma$ acceleratur in itu & retardatur in reditu; & propterea vis acceleratrix physica $\epsilon\gamma$, est ut ipsius distantia à medio vibrationis loco Ω. Proinde tempus (per prop. XXXVIII. lib. I.) rectè exponitur per arcum PI; & medii pars linearis $\epsilon\gamma$ lege (m) præscriptâ movetur, id est, lege oscillantis penduli: estque par ratio partium omnium linearium ex quibus medium totum componitur. *Q. E. D.* (†)

(l) * *Est vis quâ interjecta lineola.* Medium in ϵ & in γ vi suâ elasticâ sese dilatare in plagas oppositas C & B nititur, iis viribus interjecta lineola physica $\epsilon\gamma$, seu punctum physicum φ, urgetur in utramque plagam, & excessu vis elasticæ in ϵ, suprà vim elasticam in γ, acceleratur in itu & retardatur in reditu.

(m) * *Lege præscriptâ movetur.* Demonstratum est quod si punctum physicum E ad legem oscillantis penduli moveatur, uti si vibrationibus partium corporis tremuli aut nervi musici (quemadmodum in not. 314. exposuimus) agitetur, tùm solâ vi elasticâ medii punctum physicum F, & alia deindè puncta secundum eandem legem oscillantis penduli successivè movebuntur.



(†) *Jam pridem Vir Acutissimus Eulerus, hanc Newtoni Theoriam suspectam habuit, aliamque formulam dedit quâ soni celeritatem determinaret à Newtonianâ diversam, sed suæ formulæ demonstrationem, aut vitium Newtonianæ, palam non fecit, quod sciamus; Observationes suas hanc in rem nobis communicavit Vir Doctissimus* GABRIEL CRAMER, *Vir in his rebus expertissimus, sagacissimique ingenii, quas suâ cum venia, publici juris facimus, quasque Doctorum attentione dignissimas credimus; Certè planissimè ostendit aliquod subreptionis vitium in hac Demonstrandi formâ quam Newtonus adhibet latere; scilicet demonstrationem ipsam non ex rei naturâ sed ex Hypothesi assumptâ fluere. Ipsi verò motus aëris secundùm methodum Newtonianam assequi conabimur, nam ipsam ejus propositionem veram esse, etsi ejus demonstratio vitio quodam laboret persuasum habemus, sed eam ex naturâ motûs puncti Elastici sonori esse deducendam, potius quam ex motibus aëris, qui variis modis pro ratione agitationis ipsi impressæ peragi possent. Hæc autem sunt Viri Illustrissimi verba.*

Propositio XLVII. Lib. II. Princip. Philos. & Newtoni, minus firma demonstratione nititur, ut ex eo patet, quod si diversæ prorsus conclusioni demonstrandæ applicetur, eodem successu gaudeat. Id ego cum pluribus diversis tentassem modis, lubet unum, exempli gratia, apponere. Sit, verbi causa, hoc Theorema à Newtoniano omnino diversum, eadem tamen Demonstratione munitum.

Pinsi-

LIBER SECUND. SECT. VIII. PROP. XLVII. THEOR. XXXVII.

Pulsibus per Fluidum elasticum propagatis, singulæ Fluidi particulæ, motu uniformiter retardato & accelerato euntes & redeuntes, oscillantur pro lege Gravis ascendentis & descendentis.

Designent AB, BC, CD, &c. pulsuum successivorum æquales distantias, ABC plagam motus pulsuum ab A versus B propagati, E, F, G, puncta tria Physica medii quiescentis in recta BC ad æquales distantias sita, Ee, Ff, Gg, spatia æqualia perbrevia per quæ puncta illa motu uniformiter retardato moventur; ε, φ, γ, loca quævis intermedia illorum punctorum, & EF, FG lineolas physicas seu partes medii lineares punctis illis interjectas & successivè translatas in loca $\varepsilon\varphi$, $\varphi\gamma$, & ef, fg. Rectæ Ee æqualis ducatur recta PS, quâ tanquam axe describatur parabola SHIK. Per basim Tt exprimatur totum tempus unius vibrationis, & per ejus partes, partes temporis proportionales exprimantur, sic ut completo tempore quovis TR, vel Tr, si erigatur normalis RH aut rh, & capiatur Eε æqualis RH vel PL, aut rh vel Pl, punctum Physicum E reperiatur in ε. Hâc lege punctum quodvis E eundo ab E per ε ad e, & inde redeundo per ε ad E, iisdem retardationis & accelerationis gradibus vibrationem unam peraget cum ascendente & descendente Corpore gravi, Probandum est quod singula medii puncta physica tali motu agitari debeant. Fingamus igitur medium tali motu à causa quâcunque cieri, & videamus quid inde sequatur.

In recta Tt, sumantur æquales partes OQ, QR, vel oq, qr, eam habentes rationem ad rectam totam Tt, quam habent æquales rectæ EF, FG ad pulsuum intervallum BC; Et erectis OK, QI, RH, vel ok, qi, rh: demissis etiam si placet KN, IM, HL; Rn, im, hl; quoniam puncta E, F, G, motibus similibus successivè agitantur, & vibrationes suas integras itu & reditu compositas interea peragunt dum pulsus transfertur ex B ad C, si TR vel Tr sit tempus ab initio motus puncti E, erit TQ vel Tq tempus ab initio motus puncti F, & TO vel To, tempus ab initio motus puncti G: & propterea Eε, Fφ, Gγ, erunt ipsis RH, vel PL, QI vel PM, & OK vel PN in itu punctorum, vel ipsis rh aut Pl, qi aut Pm, & ok vel Pn in reditu æquales respective: Unde $\varepsilon\gamma$ seu EG+Gγ−Eε in itu punctorum æqualis erit EG−LN: in reditu autem æqualis EG+ln. Sed $\varepsilon\gamma$ latitudo est seu expansio partis medii EG in loco $\varepsilon\gamma$, & propterea expansio partis illius in itu, est ad ejus expansionem mediocrem ut EG−LN ad EG; in reditu autem ut EG+ln seu EG+LN ad EG. Quare cum sit LN seu HX ad KX seu OR, ut LM ad semiparametrum Parabolæ, & OR ad EG ut Tt ad BC, id est (si ponatur V ad semiparametrum ut BC ad Tt, vel si sit Tt æqualis semiparametro & V æqualis BC) ut semiparameter ad V, & ex æquo LN ad EG ut IM ad V; erit expansio partis EG punctive Physici F in loco $\varepsilon\gamma$ ad expansionem mediocrem quam pars illa habet in loco suo primo EG, ut V−IM ad V in itu, utque V+im ad V in reditu. Unde vis elastica puncti F in loco $\varepsilon\gamma$ est ad vim ejus elasticam mediocrem in loco EG, ut $\frac{1}{V-IM}$ ad $\frac{1}{V}$ in itu,

314.

De Motu Corporum.

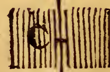
itu, in reditu verò ut $\frac{1}{V+im}$ ad $\frac{1}{V}$. Et eodem argumento itus punctorum physicorum E & G in itu sunt ut $\frac{1}{V-HL}$ & $\frac{1}{V-KN}$ ad $\frac{1}{V}$, & virium differentia ad vim elasticam mediocrem, ut $\frac{KN-HL}{VV-V\times HL-V\times KN+HL\times KN}$ ad $\frac{1}{V}$, hoc est, ut $\frac{KN-HL}{VV}$ ad $\frac{1}{V}$ sive ut $KN-HL$ ad V, si modo (ob angustos limites Vibrationum) supponamus HL & KN indefinite minores esse quantitate V. Quare cum quantitas V detur, differentia virium est ut $KN-HL$ seu KX, seu OR, hoc est, ob proportionales OR, EF, & Tt, BC, (datasque EF, Tt & BC) constans. Et eodem argumento, differentia virium punctorum physicorum ε & γ in reditu lineolæ physicæ $\varepsilon\gamma$ est etiam constans. Sed differentia illa (id est, excessus vis elasticæ puncti ε supra vim elasticam puncti γ) est vis qua interjecta medii lineola physica acceleratur aut retardatur, & propterea vis acceleratrix lineolæ physicæ $\varepsilon\gamma$ est constans. Propterea tempus rectè exponetur per ordinatam IM & medii pars linearis $\varepsilon\gamma$ lege præscripta movetur, id est, lege ascendentis descendentisque Gravis, estque par ratio omnium linearum ex quibus medium totum componitur. Q. E. D.

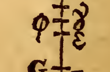
Sed (quod sanemirum) Prop. XLIX. in quâ ex sua hypothesi Newtonus soni velocitatem computat, eandem dabit conclusionem in nostra, &, ut arbitror, in aliâ quâcunque. Sic.

Fingamus medium ab incumbente pondere, pro more aëris nostri, comprimi, sitque A altitudo medii homogenei, cujus pondus adæquet pondus incumbens & cujus densitas eadem sit cum densitate medii compressi in quo pulsus propagatur. Et quo tempore corpus cadet ex altitudine æquali dimidio ipsius A eodem tempore pulsus percurret spatium æquale toti altitudini A. (Id quod congruit cum Corol. 1. dictæ Prop. XLIX.)

Nam stantibus quæ in Propos. XLVII. constructa sunt; si linea quævis physica singulis vibrationibus describendo [illegible] PS urgeatur in itu & reditu à vi Elastica quæ ipsius ponderi, æquetur peraget semivibrationem quo tempore corpus cadet ex altitudine PS, adeoque vibrationem, quo tempore corpus grave caderet ex altitudine 4PS. Quare, cum tempora descensus sint in subduplicata ratione longitudinum percursarum, fiet tempus vibrationis unius ad tempus descensus ex altitudine $\frac{1}{2}$A, in subduplicatâ ratione longitunis 4PS ad $\frac{1}{2}$A, seu 8PS ad A. Sed vis quâ in singulis punctis urgetur particula EG erat ad ejus vim mediocrem elasticam, ut $KN-HL$ seu KX vel OR ad V, & vis illa mediocris hoc est pondus incumbens quo lineola EG comprimitur est ad pondus lineolæ EG, ut A ad EG, adeoque ex æquo, vis quâ lineola EG in singulis punctis urgetur, est ad ejus pondus, ut $OR\times A$ ad $EG\times V$, seu ut semiparameter in A, ad VV (est enim OR ad EG ut Tt ad BC, atque ideo ut semiparameter ad V) vel ut $8PS\times A$ ad BC^2, ob Vq ad BCq ut semiparametri quadratum. ad Tt quad. (atque ideo ut 8PS ad semiparametrum). Quare cum tempora quibus æqualia corpora per æqualia spatia impelluntur, sint reciproce in subduplicata ratione virium, erit tempus vibrationis unius, urgente vi illa Elastica, ad tempus unius vibrationis urgente

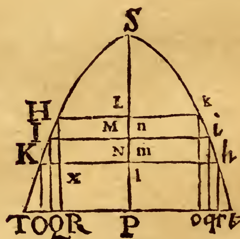










vi ponderis, in subduplicata ratione BC^2 ad $8PS \times A$. Atque adeo ad tempus descensus ex altitudine $\frac{1}{2}$ A, in subduplicata ratione BC^2 ad $8PS \times A$ & subduplicata ratione SPS ad A, hoc est in ratione integra BC ad A. Sed tempore unius vibrationis pulsus progrediendo conficit latitudinem suam BC. Ergo tempus quo pulsus percurrit spatium BC est ad tempus descensus ex altitudine $\frac{1}{2}$ A, ut BC ad A. Tempus autem quo pulsus percurrit spatium A est ad tempus quo percurrit spatium BC, ut A ad BC, adeoque æquale tempori descensus ex altitudine $\frac{1}{2}$ A.

Hic notandum, quod absurda sit, & facile refutanda hypothesis hic assumpta, quod nempe pulsus propagetur, particulis euntibus & redeuntibus pro lege gravis ascendentis & descendentis. Verum id ipsum est quod Demonstrationem Newtonianam evertit, ostendendo nimirum eam ipsam absurdæ hypothesi probandæ æque inservire.

Hactenus Vir Doctissimus; sequuntur ea quibus restitui posse Newtonianam demonstrationem credimus.

De Motibus in fluido Elastico genitis.

1. *Hypothesis.* Suppono medium Elasticum constare punctis, quantitate exiguâ sed finitâ à se dissitis, & vi repulsivâ donatis quæ distantiæ illorum punctorum sit reciprocè proportionalis; nec ad alia puncta præter ea quæ immediatè proxima sunt sese extendit: Hoc enim modo quæcumque sit partium medii Elastici natura, satis feliciter repræsentantur effectus qui ex eorum Elaterio pendent.

2. Cor. 1. Medii Elastici status naturalis est ut puncta ejus Elastica à se mutuò æqualiter distent.

3. Cor. 2. Puncta elastica velocitatem finitam suscipere possunt vel per immediatum contactum corporis moti; velocitate suâ finitâ punctum elasticum urgentis vel per actionem continuatam vis repulsivæ punctorum elasticorum si ab unâ parte fortior sit quàm ab aliâ. Reliquas causas motus, ut gravitatem, vires centrales &c. hic non consideramus.

4. Theor. 1. Si velocitas finita quocumque modo excitetur in puncto Elastico, distantiæ ejus à proximo puncto versus quod movetur minuetur finita quantitate antequam in reliquo medio factus sit ullus motus ullaque compressio: Sint A, B, C, tria puncta medii Elastici æquidistantia moveatur A versus B velocitate finitâ, & tempore infinitè parvo describat spatium infinitè parvum primi ordinis Aa, Vis motrix puncti B erit differentia virium repulsivarum puncti A & C, est autem vis repulsivâ puncti A ubi pervenit in a, ad vim puncti C (si immotum supponatur) ut BC ad Ba, & dividendo vis motrix puncti B, ad vim repulsivam puncti C, ut BC − Ba (= Aa) ad Ba. Sed Aa, est infinite parvum ex Hypothesi & Ba est finita quantitas, ergo vix motrix puncti B, est infinite parva vis respectu vis repulsivæ puncti C, quæ vis repulsiva pro ipsa vi naturali elaterii assumi potest; Vis autem Elasticitatis est ex genere pressionum, tempore infinitè parvo velocitatem infinitè parvam generaret, quæ velocitas infinitè parva durante tempore infinitè parvo, spatium infinitè parvum secundi ordinis describere faceret: Ergo siquidem vis motrix puncti B hujus vis respectu est infinitè parva, tempore infinite parvo spatium infinitè parvum duntaxat tertii ordinis describere faceret; nullus ergo motus in puncto B generabitur nisi spatium descriptum Aa sit finita quantitas, nulla ergo erit compressio inter puncta B & C. Q. E. D.

314.

A a B C

5. Cor. 1. Nullus ergo motus ex puncto medii Elastici in punctum proximum transfertur nisi post tempus finitum, nam spatium finitum Aa, nonnisi tempore finito percurri potest per velocitatem finitam.

6. Cor. 2. Et velocitas finita in puncto Elastico excitata non mutabitur nisi post tempus finitum & postquam quantitate finitâ processerit. Sint enim medii particulæ Z, A, B, procedat punctum A velocitate finita utcumque in id punctum

Z A B
a

De Motu Corporum.

ctum producta, & tempore infinitè parvo describat spatium infinitè parvum A a, vis quâ sistetur ea velocitas orietur ex differentia virium Elasticarum puncti Z; & puncti B, estque vis puncti B ad vim puncti Z ut A B + A a ad A B − A a, & dividendo Vis sistens punctum A ad vim puncti Z, ut 2 A a ad A B − A a, sed A a est infinitè parvum respectu quantitatis A B − A a, ergo, vis sistens punctum A est infinitè parva, respectu vis puncti Z, quæ est vis elaterii naturalis, ideo (eodem modo ac in Theorematis demonstratum fuit) probabitur, vim illam tempore infinite parvo spatium infinitè parvum tertii ordinis producturam: Quare etiamsi singula puncta à parte B posita æquali vi agerent eorumque numerus infinitus foret, vires illæ omnes non nisi spatium infinitè parvum secundi ordinis infinitè parvo tempore ex spatio A a eodem tempore descripto detraherent, maneret itaque idem, velocitates ergo puncti A non mutabitur ex actione omnium punctorum medii Elastici, nisi post tempus finitum & postquam finita quantitate processerit.

Z A B

a

7. Cor. 3. Si considerentur innumera puncta Elastica ordine in lineâ rectâ posita,

A B C D E &c.

nec attendatur ad alia quæ circumquâque solidum spatium constituunt, si unum velocitate finitâ quâcumque ex causâ urgeatur, quæ constans in eo maneat, quoddam tempus finitum requiretur ut eadem velocitas in proximo puncto excitetur, paulo longius tempus ut in tertio producatur, sicque deinceps, nam per Cor. 1. 2. nullus motus ex puncto medii Elastici in punctum proximum transfertur nisi elapso finito tempore; velocitas ergo primi puncti ad secundum non transit nisi post finitum tempus ab initio motus primi puncti & velocitas secundi puncti ad tertium non transit nisi post finitum tempus ab initio motus secundi ejus puncti. Breviori autem tempore excitari debet data velocitas in secundo puncto per actionem continuatam ab initio motus primi puncti, quam in tertio per actionem continuatam ab initio motus puncti secundi, cum enim velocitas primi puncti sit finita & æquabilis, compressio exinde orta ab initio ejus motus est major quam compressio quæ per motum secundi puncti ab initio ejus motus acquiritur, siquidem ad celeritatem primi puncti nonnisi per gradus pervenit, ergo vis motrix quæ urget secundum punctum ab initio, fortior est quam ea qua urgetur tertium punctum ab initio, ergò tertium punctum datam illam celeritatem tardius acquiret, & pari ratiocinio, cum vis motrix secundi puncti sub initio fortior sit quam vis motrix tertii, compressio inter secundum & tertium punctum major erit sub initio quam inter tertium & quartum; unde vis motrix quæ urget tertium punctum sub initio fortior est quam ea quâ urgetur quartum punctum; Ergo cum punctum sequens aliqualem velocitatem suscipere non possit nisi postquam punctum præcedens spatium finitum descripserit & longiori tempore ab initio motus suscepti datam velocitatem possit suscipere, liquet quod ea data velocitas nonnisi successivè ad successiva medii Elastici puncta pertingit.

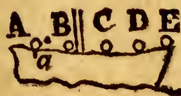
8. Schol. Hinc patet discrimen inter motum in medio Elastico excitatum & motum qui excitatur in medio non Elastico cujus partes contiguæ sunt, in tali enim medio, Pressio cuidam particulæ applicata ad omnes partes in directum positas, aut divaricantes, puncto temporis extendi debet; Motus verò instanti in circulum propagari debet; At in medio Elastico, Pressio ab uno puncto ad alterum non continuatur nisi per accessum punctorum medii, sive per realem motum, qui antrorsum propagetur, & post tempus finitum à puncto primum moto ad reliquas partes fluidi successivè perveniat.

9. PROB. Si punctum medii Elastici finitâ velocitate moveatur quæ constans maneat, definire motum punctorum sequentium in lineâ recta positorum, omissis aliis sphæricè circumquaque positis.

Primus Casus. Sint ordine puncta A, B, C, D, &c. fingatur ea omnia ad æquales distantias in navi posita, & punctum B ita adhærere malo ut ex ejus motu, navis motum suscipiat & reliqua puncta vehat; Recipiat verò punctum A velocitatem finitam

quæ

quæ constans maneat relatè ad navis punctum, in quo versabatur, & ponatur primo eam versus B tendere; ex accessu puncti

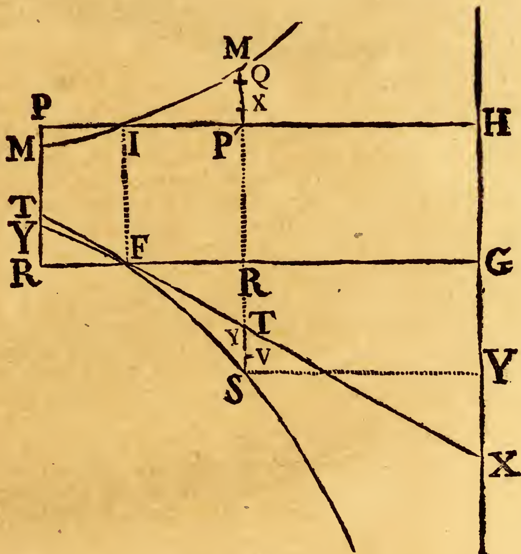


A versus B vis repulsiva particulæ A fortior fiet vi repulsivâ particulæ C, quare ex differentia virium nascetur vix motrix particulæ B; Procedat enim A ad B quantitate Aa, erit vis particulæ C in B, ad vim particulæ A in B, ut aB ad BC sive AB (quia particularum intervalla AB, BC initio erant æqualia) & dividendo, vis particulæ C, ad differentiam virium quæ est vis motrix puncti B ut aB ad AB − aB sive Aa, sed vis particulæ C est vis ipsa elaterii in statu naturali, ex Hypot. ergo Vis elaterii est ad vim moventem punctum B ut aB ad Aa. Repræsentet itaque IH tempus quo distantia AB punctorum elasticorum per velocitatem datam puncti A percurritur, dicaturque illud tempus a, ducatur deorsum ad angulos rectos linea HG quæ vim elasticam singulæ particulæ medii in statu naturali designet, ductaque FG parallela IH, asymptotis FG & GH & dignitate æquali $a \times HG$ describatur Hyperbola, transibit per punctum I, (siquidem $IF = HG$ & $FG = IH = a$, ideoque $IF \times FG = HG \times a$) & si IP repræsentet tempus quo durante A motum est, dicaturque x, Dico quod PM repræsentabit vim motricem puncti B eo temporis momento. Erit enim ex naturâ Hyperbolæ, $GR : GF = FI (HG) : RM$ & dividendo $GR\ (HP) : FR\ (IP) = HG : PM$; spatia verò uniformiter descripta sunt ut tempora; ergo $AB : Aa = IH : IP$ & dividendo $aB : Aa = HP : IP$, sed aB ad Aa ut vis elaterii ad vim motricem puncti B; ergo $HP : IP = HG : PM =$ vis elaterii ad vim motricem puncti B, sed HG repræsentat vim elaterii, ergo PM ubique repræsentat vim motricem puncti B.

Repræsentabit ergo etiam linea PM velocitatem momento P genitam, & area IPM totam velocitatem à puncto B acquisitam tempore IP sive tempore quo percurritur Aa à puncto A.

Describatur verò ex puncto F Logarithmica cujus axis sit linea HG producta, subtangens linea quævis GX quæ dicatur s, ductâque ex puncto P lineâ PTS dico quod linea TS repræsentabit velocitatem tempore IP acquisitam & area FTS spatium à puncto B descriptum.

Est enim (per nat. Logarith.) area IFRM, ad Rect. IFGH ut RS ad GX, & Rect. IFGH ad Rect. IFRP ut FG ad FR ut GX ad RT, ideoque ex æquo area IFRM ad Rect. IFRP ut RS ad RT, & dividendo, est IPM ad IFRP ut TS ad RT; Ergo area IPM est ad TS in Ratione datâ, ob datum PR & rationem FR ad RT datam, ut pote æqualem rationi FG ad GX, est ergo TS ut IPM, 314.



sive ut velocitas puncti B, & cum perpendicula inter ordinatas TS sint æqualia momentis temporis in linea IP sumptis, area FTS erit ut spatium à puncto B percursum.

Eodem modo constabit, quod si vis elastica ageret more gravitatis tempore a, velocitas quam eo tempore generaret, designaretur per subtangentem s, & spatium descriptum foret $\frac{as}{2}$, dicatur vero m velocitas data puncti A, data erit ratio s ad m, intervallum particularum AB erit ma, & spatium Aa velocitate datâ percursum est mx, notandum verò est quod ea velo-

velocitas s sit plusquam dupla velocitatis globi tormentarii, unde liquet quod in casibus sequentibus ubi velocitas puncti A longe minor velocitate globi tormentarii est intelligenda, quantitas $\frac{m}{s}$ est fractio satis parva.

Ad calculum verò facile revocatur linea FTS & area TS; 1°. enim cum subtangens sit s, ordinatarum FG, SY differentia sit x, area tota FGSY (ex nat. Log.) est sx, intervallum RS est $s \times \overline{\frac{x}{a} + \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3}}$ &c. Rectang. RG × RS $= \overline{a-x} \times s \times \overline{\frac{x}{a} + \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3}}$ &c. & quoniam est FG (a) : GX (s) = FR (x) : RT est RT $= \frac{sx}{a}$ & Triang. FRT $= \frac{sx^2}{2a}$. Detrahantur ergo Rectang. RG×RS & Tr. FRT ex area FGSY remanet area FTS $= sx - \overline{sa - sx} \times \overline{\frac{x}{a} + \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} \&c.} - \frac{sx^2}{2a} = sx \times \overline{1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3}}$ &c. $- sx \times \overline{1 + \frac{x}{2a} + \frac{x^2}{3a^2}}$ &c. $- \frac{sx^2}{2a} = \frac{sx^2}{a} \times \overline{\frac{x}{2\times 3a} + \frac{x^2}{3\times 4a^2} + \frac{x^3}{4\times 5a^3}}$ + &c.

erit itaque Aa ad Bb, ut mx, ad $\frac{sx^2}{a} \times \overline{\frac{x}{2\times 3a} + \frac{x^2}{3\times 4a^2} + \frac{x^3}{4\times 5a^3}}$ &c. vel ut m ad $\frac{sx}{a} \times \overline{\frac{x}{2\times 3a} + \frac{x^2}{3\times 4a^2}}$ &c. erit verò recta TS = RS − RT $= \frac{sx}{a} \times \overline{1 + \frac{x}{2a} + \frac{x^2}{3a^2}}$ &c. $- \frac{sx}{a} = \frac{sx}{a} \times \overline{\frac{x}{2a} + \frac{x^2}{3a^2}}$ &c. ideoque velocitas data puncti A erit ad velocitatem puncti B ut m ad $\frac{sx}{a} \times \overline{\frac{x}{2a} + \frac{x^2}{3a^2} + \frac{x^3}{4a^3}}$.

Coroll. Si quæratur in hac Hypothesi quo tempore & spatio descripto punctum B velocitatem puncti A obtineat, fiat $m = \frac{sx}{a} \times \overline{\frac{x}{2a} + \frac{x^2}{3a^2} + \frac{x^3}{4a^3}}$ &c. sed cum spatium A a sit ad B b ut m ad $\frac{sx}{a} \times \overline{\frac{x}{2\times 3a} + \frac{x^2}{3\times 4a^2}}$ &c. erit Aa ad Bb ut $\frac{x}{2a} + \frac{x^2}{3a^2} + \frac{x^3}{4a^3}$ &c. ad $\frac{x}{2\times 3a} + \frac{x^2}{3\times 4a^2} + \frac{x^3}{4\times 5a^3}$ &c. cumque primus terminus primæ seriei sit accuratè triplus primi termini alterius seriei, reliqui verò plusquam tripli; Punctum A totam suam celeritatem puncto B communicat antequam id punctum B tertiam partem ejus spatii descripserit quod descripsit punctum A.

Tempus verò x exprimetur per Radices hujus æquationis $0 = \frac{ma}{s} - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^3}{3a^2} - \frac{x^4}{4a^3}$ &c. Ubi liquet quod quando $\frac{m}{s}$ est fractio, tunc x est minus quam a, & series est Convergens, ideoque ex primo termino & proximo assumptis erit $x = a\sqrt{\frac{2m}{s}}$; rem accuratiùs expendere isto in casu, qui mere fictitius est, nihil est necesse.

Casus secundus. Si A moveatur uniformiter & acceleret punctum B quod etiam acceleret punctum C (nulla habitâ ratione motus puncti D) erit in hoc Casu

vis,

vis repulsiva A ad vim repulsivam C ut $AB - Bb + Cc$ ad $AB - Aa + Bb$ & differentia virium sive vis motrix puncti B ad vim repulsivam puncti C, ut $Aa - 2Bb + Cc$ ad $AB - Aa + Bb$; est præterea vis repulsiva puncti C ad vim Elaterii ut AB ad $AB - Bb + Cc$; & denique vis Elastica est ad vim moventem punctum B in primo casu ut $AB - Aa$ ad Aa; ideoque ex æquo vis vera motrix puncti B ad ejus vim in primo casu ut

A a B b C c D &c.

$$\left.\begin{matrix} Aa - 2Bb + Cc \\ AB \\ AB - Aa \end{matrix}\right\} \text{ ad } \left\{\begin{matrix} AB - Aa + Bb \\ AB - Bb + Cc \\ Aa \end{matrix}\right\}$$

In eadem autem Hypothesi vis motrix puncti C, hoc modo determinatur, est vis repulsiva puncti B ad vim repulsivam puncti D ut Dc ad bc sive ut $AB - Cc$, ad $AB - Bb + Cc$, ergo vis motrix puncti C ad vim repulsivam puncti D, ut $Bb - 2Cc$ ad $AB - Bb + Cc$.

Hæc vis repulsiva puncti D est ad vim Elasticam ut AB ad $AB - Cc$, denique vis Elastica ad vim moventem punctum B in primo Casu, ut $AB - Aa$, ad Aa, ideoque ex æquo vis motrix puncti C, ad vim moventem punctum B in primo Casu ut

$$\left.\begin{matrix} Bb - 2Cc \\ AB \\ AB - Aa \end{matrix}\right\} \text{ ad } \left\{\begin{matrix} AB - Bb + Cc \\ AB - Cc \\ Aa \end{matrix}\right\}$$

Ut verò derminetur motus puncti B in isto casu (qui pro vero haberi potest ob exiguitatem motus puncti D qui negligitur) concipiatur PM ad PQ ut

$$\left.\begin{matrix} AB - Aa + Bb \\ AB - Bb + Cc \\ Aa \end{matrix}\right\} \text{ ad } \left\{\begin{matrix} Aa - 2Bb + Cc \\ AB \\ AB - Aa \end{matrix}\right\}$$

& idem PM ad PX ut

$$\left.\begin{matrix} AB - Bb + Cc \\ AB - Cc \\ Aa \end{matrix}\right\} \text{ ad } \left\{\begin{matrix} Ab - 2Cc \\ AB \\ AB - Aa \end{matrix}\right\}$$

curvæ quæ transibunt per Q & X erunt loci virium motricium puncti B & puncti C, areæ IPQ, IPX erunt ut velocitates per illas vires dato tempore IP genitæ, & si sumantur ordinatæ TV & TY, tales ut TS, TV, TY sint ut areæ IPM, IPQ, IPX, areæ FTV, FTY erunt ut spatia Bb & Cc: sit ergo

$TV = Ax^2 + Bx^3 + Cx^4 + Dx^5$ &c.
& $TY = Ox^4 + Pa^5 + Ra^6$ &c.
erit $TV\,dx = Ax^2\,dx + Bx^3\,dx + Cx^4\,dx + Dx^5\,dx$ &c.
$TY\,dx = Ox^4\,dx + Px^5\,dx$

Unde integrando, est area $FTV = \frac{Ax^3}{3} + \frac{Bx^4}{4} + \frac{Cx^5}{5} + \frac{Dx^6}{6}$ &c. $= Bb$

& $FTY = \frac{Ox^5}{5} + \frac{Px^6}{6}$ &c. $= Cc$

fluxio autem $TV = 2Ax\,dx + 3Bx^2\,dx + 4Cx^3\,dx + 5Dx^4\,dx$ &c.
& fluxio $TY = 4Ox^3\,dx + 5Px^4\,dx$ &c.

Erat autem fluxio $TS = \frac{sx\,dx}{a^2} \times 1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^3}{a^3} + \frac{x^4}{a^4}$ &c.

Sed PM ad PQ, ut fluxio TS ad fluxionem TV
& PM ad PX ut fluxio TS ad fluxionem TY
ergo fluxio TS ad fluxionem TV ut

$$\left.\begin{matrix} AB - Aa + Bb \\ AB - Bb + Cc \\ Aa \end{matrix}\right\} \text{ ad } \left\{\begin{matrix} Aa - 2Bb + Cc \\ AB \\ AB - Aa \end{matrix}\right\}$$

& eadem fluxio TS ad fluxionem TY ut

$$\left.\begin{matrix} AB - Bb + Cc \\ AB - Cc \\ Aa \end{matrix}\right\} \text{ ad } \left\{\begin{matrix} Bb - 2Cc \\ AB \\ AB - Aa \end{matrix}\right\}$$

In his proportionibus multiplicatis extremis & mediis & terminorum collatione factâ, invenientur lineæ TV & TY & areæ FTV & FTY, sicque tempora quibus acquiruntur velocitates TV, TY & spatia descripta dum acquiruntur, obtineri poterunt, Calculum istum prolixissimum in compendio exhibebo, primo invenitur quod fluxio $TS \times AB \times AB - Aa = sm^2x\,dx$, est præterea $Aa - 2Bb + Cc$ æquale $mx + * - \frac{2A}{3}x^3 - \frac{2B}{4}x^4 - \frac{2C - O}{5}x^5 - \frac{2D - P}{6}x^6$ &c. estque $Bb - 2Cc = \frac{A}{3}x^3 + \frac{B}{4}x^4 + \frac{C - 2O}{5}x^5 + \frac{D - 2P}{6}x^6$ &c. quæ series multiplicatæ per $sm^2x\,dx$ dant facta extremorum in utráque proportione.

LIBER SECUND. SECT. VIII. PROP. XLVII. THEOR. XXXVII.

314

De Motu Corporum.

Ut habeantur facta mediorum, in primâ proportione est AB − Bb + Cc × Aa = $mx \times ma + * + * - \frac{Ax^3}{3} - \frac{Bx^4}{4} - \frac{C-O}{5}x^5 - \frac{D-P}{6}x^6$; ducatur in AB − Aa + Bb =

$$ma - mx + * + \frac{Ax^3}{3} + \frac{Bx^4}{4} + \frac{Cx^5}{5} + \frac{Dx^6}{6}$$ fit

$$mx \times m^2a^2 - m^2ax + * + * + \frac{mAx^4}{3} + \frac{mBx^5}{4} + \frac{C-O}{5}mx^6 \text{ \&c.}$$
$$\frac{Omax^5}{5} + \frac{Pmax^6}{6}$$
$$-\frac{A^2x^6}{3\times3}$$

Quod ducatur in fluxionem TV =
$dx \times 2Ax + 3Bx^2 + 4Cx^3 + 5Dx^4 + 6Ex^5 + 7Fx^6$ factum erit

$$mx\dot{d}x \times 2m^2a^2Ax - 2m^2aAx^2 - 3m^2aBx^3 + 4m^2aCx^4 + \frac{2mA^2x^5}{3} + \frac{18mBAx^6}{3\times4}$$
$$+3m^2a^2Bx^2 + 4m^2a^2Cx^3 + 5m^2a^2Dx^4 - 5m^2aDx^5 + \frac{2maAOx^6}{5} \text{ \&c.}$$
$$+6m^2a2Ex^5 - 6m^2aEx^6$$
$$+7m^2a^2Fx^6$$

termini omnes hujus seriei dividantur per sm, & conferantur cum correspondentibus terminis seriei quam exhibet factum extremorum primæ proportionis & habebitur $m = \frac{2ma^2A}{s}$, ideoque $A = \frac{s}{2a^2}$, tum $\frac{-2maA}{s} + \frac{3ma^2B}{s} = 0$, ideoque B $= \frac{s}{3a^3}$, 3°. $-\frac{2A}{3} = -\frac{3maB}{s} + \frac{4ma^2C}{s}$, unde invenitur C $= \frac{s}{4a^4} - \frac{s}{3\times4ma^4}$, 4° $-\frac{2B}{4} = -\frac{4maC}{s} + \frac{5ma^2D}{s}$ est ergo D $= \frac{s}{5a^5} - \frac{6s^2}{3\times4\times5ma^5}$; 5°. $\frac{O-2C}{5} = + \frac{2mA^2}{3s} - \frac{5maD}{s} + \frac{6ma^2E}{s}$ est ergo E $= \frac{s}{6a^6} - \frac{46s^2}{3\times4\times5\times6ma6} + \frac{2s^3}{3\times4\times5\times6m^2a^6} + \frac{sO}{5\times6\times ma^2}$ & denique invenitur F $= \frac{s}{7a^7} - \frac{252s^2}{3.4.5.6.7ma^7} + \frac{24s^3}{3.4.5.6.7m^2a^7} + \frac{sP}{6.7ma^2}$.

In alterâ Proportione resumatur factum AB − Bb + Cc × Aa quod est $mx \times ma + * + * - \frac{Ax^3}{3} - \frac{Bx^4}{4} - \frac{C-O}{5}x^5 - \frac{D-Px^6}{6}$ ducatur in AB − Ce quod est

$$ma + * + * + * + * - \frac{Ox^5}{5} - \frac{Px^6}{6} \text{ \&c. fit}$$

$mx \times m^2a^2 + * + * - \frac{maAx^3}{3} - \frac{maBx^4}{3} - \frac{maCx^5}{5} - \frac{maDx^6}{6}$ &c. Multiplicetur per fluxionem TX quæ est $dx \times 4Ox^3 + 5Px^4 + 6Qx^5 + 7Rx^6$ &c.
habetur $mxdx \times 4m^2a^2Ox^3 + 5m^2a^2Px^4 + 6m^2a^2Qx^5 + 7m^2a^2Rx^6 + 8m^2a^2Sx^7$
$$-\frac{4maAOx^6}{3} - \frac{4maBOx^7}{4}$$
$$-\frac{5maAOx^7}{3}$$

termini omnes hujus seriei dividantur per sm & conferantur cum terminis correspondentibus seriei quam exhibet factum extremorum secundæ proportionis & habebitur $\frac{A}{3} = \frac{4ma^2O}{s}$ ideoque $O = \frac{s^2}{2\times3\times4ma^4}$: 2°. $\frac{B}{4} = \frac{5ma^2P}{s}$ hinc $P = \frac{s^2}{3\times4\times5ma^5}$

3°.

LIBER SECUND. SECT. VIII. PROP. XLVII. THEOR. XXXVII.

314.

$3°. \frac{C}{5} - \frac{2O}{5} = \frac{6ma^2Q}{s}$, hinc $Q = \frac{s^2}{4\times5\times6ma^6} \; \frac{2s^3}{3\times4\times5\times6m^2a^6}$ &c. unde tandem obtinentur hæ ſeries, quibus velocitates & ſpatia deſcripta exprimuntur: exprimitur ergo velocitas puncti B,

per $TV = \frac{sx^2}{2a^2} + \frac{sx^3}{3a^3} + \frac{sx^4}{4a^4} + \frac{sx^5}{5a^5} + \frac{sx^6}{6a^6} + \frac{sx^7}{7a^7}$ &c.

$- \frac{2s^2x^4}{2.3\times4ma^4} - \frac{6s^2x^5}{3\times4\times5ma^5} - \frac{46s^2x^6}{3\times4\times5\times6ma^6} - \frac{390s^2x^7}{3.4.5.6.7ma^7}$ &c.

$+ \frac{5s^3x^6}{2\times3\times4\times5\times6m^2a^6} + \frac{50s^3x^7}{2\times3\times4\times5\times6\times7m^2a^7}$ &c.

area $FTV = \frac{sx^3}{2\times3a^2} + \frac{sx^4}{3\times4a^3} + \frac{sx^5}{4\times5a^4} + \frac{sx^6}{5\times6a^5} + \frac{sx^7}{6\times7a^6} + \frac{sx^8}{7\times8a^7}$ &c.

$- \frac{s^2x^5}{3\times4\times5ma^4} - \frac{6s^2x^6}{3\times4\times5\times6\times ma^5} - \frac{46s^2x^7}{3\times4\times5\times6\times7ma^6} - \frac{390s^2x^8}{3.4.5.6.7.8ma^7}$

$+ \frac{5s^3x^7}{2\times3\times4\times5\times6\times7m^2a^6} + \frac{50s^3x^8}{2.3.4.5.6.7.8m^2a^7}$

velocitas puncti C exprimitur per $TX = \frac{s^2x^4}{2\times3\times4ma^4} + \frac{s^2x^5}{3\times4\times5ma^5} + \frac{s^2x^6}{4\times5\times6ma^6}$ &c.

$- \frac{2s^3x^6}{3\times4\times5\times6m^2a^6}$

area denique $FTX = \frac{s^2x^5}{2\times3\times4\times5ma^4} + \frac{s^2x^6}{3\times4\times5\times6ma^7} + \frac{s^2x^7}{4\times5\times6\times7ma^6}$ &c.

$- \frac{2s^3x^7}{3\times4\times5\times6\times7m^2a^6}$

 Pun-

De Motu Corporum.

Aa Bb Cc Dd Ee

Punctorum sequentium motus determinari possent simili ratione; Etenim vires motrices punctorum B, C, D, E &c. sunt ut A a — 2 B b, B b — 2 C c, C c — 2 D d, D d — 2 E e, &c. Vis enim cujusvis puncti ut C est ad vim puncti E ut d e ad c d sive ut A B + E e — D d ad A B + D d — C c & dividendo vis motrix puncti D ad vim puncti E ut C c — 2 D d + E e ad c d; vis puncti E est ad vim Elasticam naturalem ut A B ad e d, ergo vis motrix puncti D ad vim Elasticam naturalem ut $\left.\begin{matrix}Cc - 2Dd + Ee\\ AB\end{matrix}\right\}$ ad $\left\{\begin{matrix}cd\\ ed\end{matrix}\right.$ sive ut C c — 2 D d + E e ad $\frac{cd \times de}{AB}$, ergo alternando est vis motrix puncti D ad C c — 2 D d + E e ut vis Elastica naturalis ad $\frac{cd \times de}{AB}$, ideóque in paulò majori ratione quam vis elastica ad A B quia tam c d quam d e paulò minores sunt quam A B, sed vis motrix puncti D est ad C c — 2 D d in majori ratione quam eadem vis motrix ad C c — 2 D d + E e, ergo vis motrix puncti D est semper ad C c — 2 D d in majori ratione quam vis elastica ad A B, cumque id verum sit in omnibus punctis & hæc ultima ratio sit constans, Ratio vis motricis puncti cujusvis ad spatium à præcedenti puncto descriptum dempto duplo spatii ab ipso hoc puncto descripti, erit semper major ratione constante, non tamen multo, ideo Physice pro constante assumi potest, hinc alternando vires illæ motrices, punctorum successivorum, sunt in ratione indicatâ.

Sed calculum pro illis punctis instituere necesse non est, per Analogiam enim ex motu duorum priorum punctorum B & C reliquorum motum statuere, sufficiens videtur.

10. Si, missis cæteris casibus, quæratur intervallum temporis quo velocitas data m, in punctis successivis B, C, generetur, ut & ratio spatiorum A a, B b, C c eo tempore descriptorum; Fiat T V = m, & utroque ducto in $\frac{a^2}{s}$, erit $\frac{a^2 TV}{s} = \frac{a^2 m}{s}$, dicatur $\frac{a^2 m}{s} = z^2$ & in serie $\frac{a^2 TV}{s}$ ponatur ubique $\frac{m}{z^2}$ loco $\frac{s}{a^2}$, hæc series in hanc formam migrabit $z^2 = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3a} + \frac{x^4}{4a^2} + \frac{x^5}{5a^3} + \frac{x^6}{6a^4}$ &c.

$$- \frac{2x^4}{2.3.4z^2} - \frac{6x^5}{3.4.5\,az^2} - \frac{46x^6}{3.4.5.6a^2z^2} \text{ \&c.}$$
$$+ \frac{5x^6}{2.3.4.5.6z^4} \text{ \&c.}$$

Juxta Analyseos Newtonianæ Methodum sumantur omnes termini in quibus differentiæ exponentium x & z minimum efficiunt valorem, fiantque æquales z^2 reliqui termini seriei $\frac{a^2 TV}{s}$ negligi possunt, quia per dignitates quantitatis $\frac{x}{a}$ respectu eorum qui assumpti fuerunt multiplicantur; (in Hypothesi quæ velocitatem m alicujus momenti assumeret hi termini negligendi non forent, sed in casu præsenti velocitatem m minimam supponere nobis licet cum de tali tantum in futurum simus acturi) erit ergo

$$z^2 = \frac{x^2}{2} - \frac{2x^4}{2.3.4z^2} + \frac{5x^6}{2.3.4.5.6z^4} - \frac{14x^8}{2.3.4.5.6.7.8z^6} + \frac{41x^{10}}{2.3.4.5.6.7.8.9.10z^8} - \frac{122x^{12}}{2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12z^{10}} \text{ \&c.}$$

(qui termini continuatâ serie T V inveniuntur) & æquatione per approximationem soluta invenietur $x^2 = 3.57\,z^2 = \frac{3.57\,a^2 m}{s}$.

Jam verò in area F T V quæ spatium B b exprimit loco $\frac{s}{a^2}$ ponatur ut prius $\frac{m}{z^2}$ & assumantur termini in quibus differenria exponentium quantitatum x & z minimi

evadit, ii sunt $\frac{m x^3}{2 \times 3 z^2} - \frac{2 m x^5}{2.3.4.5 z^4} + \frac{5 m x^7}{2.3.4.5.6.7 z^6} - \frac{14 x^8}{2.3.4.5.6.7.8.9 z^7}$ in quibus si valor $x^2 = 3.57 z^2$ substituatur fiet hæc series $m x \times \frac{3.57}{2 \times 3} - \frac{2 \times 3.57 \times 3.57}{2.3.4.5} + \frac{5 \times 3.57 \times 3.57 \times 3.57}{2.3.4.5.6.7} - \frac{14 \times 3.57 \times 3.57 \times 3.57 \times 3.57}{2.3.4.5.6.7.8.9}$ &c. sive $Bb = m x \times .428$.

Eodem modo valor Cc invenietur ex hac serie $\frac{m x^5}{2 \times 3.4.5 z^4} - \frac{2 m x^7}{3 \times 4.5.6.7 z^6}$ sive substituto valore x^2, erit $Cc = m x \times \frac{3.57 \times 3.57}{2.3.4.5.} - \frac{2 \times 3.57 \times 3.57}{3.4.5.6.7}$ &c. sive $Cc = m\ x \times .07$ sive circiter sexta pars intervalli à puncto B descripti eodem tempore quo acquirit celeritatem m.

Et Celeritas à puncto C tunc temporis acquisita erit iisdem substitutionibus factis $m \times \frac{3.57 \times 3.57}{2.3.4.} - \frac{2 \times 3.57 \times 3.57 \times 3.57}{3.4.5.6}$ &c. $= m \times .279$ &c. circiter $\frac{1}{4}$ celeritatis m.

11. Quod si eventus quæratur in hypothesi velocitatem m non esse quamminimam; supponatur illa æqualis ipsi s; si quæratur spatium descriptum à puncto B, dum ejus velocitas fit m, fiat series $TV = m$, & utroque ducto in x, erit $x\ TV = m x$, ergo collatâ serie x TV, & FTV habebitur ratio spatiorum percursorum Aa & Bb, sed illæ series posito $\frac{s}{m} = 1.$ sunt $x TV = \frac{s x^3}{2 a^2} + \frac{s x^4}{3 a^3} + \frac{s x^5}{6 a^4} + \frac{s x^6}{10 a^5} + \frac{s x^7}{30 a^6}$ &c. & $FTV = \frac{s x^3}{6 a^2} + \frac{s x^4}{12 a^3} + \frac{s x^5}{30 a^4} + \frac{s x^6}{60 a^5} + \frac{11 s x^7}{2160 a^6}$ &c.

Ubi liquet quod primus terminus primæ seriei sit triplus primi termini secundæ, reliqui verò termini primæ seriei reliquorum terminorum secundæ seriei plusquam tripli, unde liquet quod Aa est magis quam triplum spatii per punctum B descripti usque dum celeritatem m recipiat; Ex quo consequitur, quod siquidem B eo momento non est in medio inter puncta A & C, sed vicinius puncto A ad minimum sextâ parte spatii à puncto A descripti ab eo ulterius urgetur & acceleratur celeritatemque majorem quam m recipit donec ad medium inter A & C perveniat, ibique cum celeritate majore quam A feratur, versus C magis accedet, sicque vim repulsivam puncti C sentiet, dumque ultra medium inter A & C promovebitur sensim tardabitur, tandem destructo ejus excessu celeritatis supra celeritatem m, cum sit vicinius puncto C quam puncto A diminuetur ulterius ejus celeritas m, ideoque puncto A vicinius gradatim fiet, in medio inter A & C iterum occurret, sed cum velocitate diminutâ, quare perget vicinius fieri puncto A, sicque ab ipso velocitatis incrementum de novo accipiet, sicque perpetuò oscillabitur punctum B circa medium inter punctum A & punctum C ad morem fibræ sonantis; Eâque ratione fit ut Particulæ aeris magnâ velocitate pulsæ sonum edant sponte, ut in tonitru, pulvere fulminante, flagellis, tapetibus aut lodicibus fortiter excussis &c.

314.

Sed ubi m minima fit, punctum B eam celeritatem m acquisivit eo tempore quo parùm abest a medio inter puncta A & C, (per hujus n. 10.) una circiter vicesima spatii à puncto A descripti, ideoque agitationes supra dictas exiguas suscipit quas pro nullis habere Physicis licere debet, quamvis Mathematicè non omninò nullæ sint.

12. Supposito ut prius velocitatem datam m esse minimam, ut obtineatur intervallum temporis quo punctum C celeritatem eam datam m acquiret sumpto ut prius $z^2 = \frac{a^2 m}{s}$ fiat $TX = m$ & $\frac{a^4 m^2}{s^2} TX = m z^4$ & ponatur ubique in serie TX, $\frac{m}{z^2}$ pro $\frac{s}{a^2}$ fiet $m z^4 = \frac{m x^4}{2.3.4} + \frac{m x^5}{3.4.5}$ &c. sive sumptis terminis in quibus exponentes quantitatum x & z differentiam minimam habent, erit $m z^4 = \frac{m x^4}{2.3.4} - \frac{4 m x^6}{2.3.4.5.6 z^2}$ +

$+ \frac{13 m x^8}{2.3.4.5.6.7.8 z^4} - \frac{40 m x^{10}}{2.3.4.5.6.7.8.9.10 z^6}$ &c. & æquatione per approximationem soluta, invenitur $x^2 = 9\frac{2}{5}x^2$. Et seriem FTX ulterius continuando & calculum instituendo ut pro serie FTV factum est, invenitur quod via à puncto A emensa, dum punctum C velocitatem m acquirit est ad viam quam ipsum punctum C emetitur ut 100 ad 32, sive fere ut 3 ad 1. Quod quidem paulo majus est vero, quia omissa est consideratio motus puncti D, quod cum discedat à puncto C efficit ut vis B in ipsum C sit fortior, breviorique tempore motum m ipsi impertiatur.

13. Hinc, cum tempus quo punctum B celeritatem datam m acquisivit sit $z\sqrt{3.57}$ & tempus quo punctum C eam celeritatem acquisivit sit $z \sqrt{9\frac{2}{5}}$, illa tempora sunt ut $\sqrt{3.57}$ ad $\sqrt{9\frac{2}{5}}$ sive ut 19 ad 30 fere ut 2 ad 3; cum ergo punctum A uniformiter moveatur, spatium quod punctum A describit dum C acquirit velocitatem m, est ad spatium quod idem punctum A descripserat dum B eamdem velocitatem m acquisiverat, sicut 3 ad 2; spatium verò quod C descripsit dum eam celeritatem acquisivit est proximè tertia pars spatii eodem tempore ab A descripti, & spatium quod B describit dum eamdem celeritatem m acquirit est fere dimidia pars spatii eo tempore ab A descripti, ergo illa spatia à punctis C & B descripta, donec velocitatem m singula acquirant sunt æqualia.

14. Ex analogiâ verò deducetur quod spatium quod punctum quartum D describit, dum velocitatem m attingit, erit 4ª. pars spatii ab A descripti, siquidem spatium a 2do. puncto descriptum est dimidia pars spatii ab A descripti, spatium à 3o. puncto descriptum tertia pars spatii descripti ab A &c. Imo eum ordinem accuratius observari in punctis remotioribus statuere licet quod punctum C tertiam partem spatii ab A descripti dum velocitatem m acquirit accuratius describat quam B dimidiam partem spatii ab A descripti dum velocitatem m suscipit, calculum tentare potest qui hac Analogiâ rem sufficienter demonstrari non censebit, & B. L. ignoscere rogamus quod talem laborem subire piguerit.

Ex eadem Analogiâ (art. 13.) deducetur spatia quæ percurrunt successiva puncta D, E dum velocitatem m acquirunt, æqualia esse iis quæ puncta singula B & C descripserunt.

15. Quibus admissis sequitur diminutionem intervalli inter particulas medii, cum motu communi cum puncto A feruntur esse ubicumque eamdem, & æqualem dimidio spatio ab A descripto dum B celeritatem m acquirit.

Nam cum A bis id dimidium spatium descripserit & B semel dum B communem cum A motum suscipit, contrahitur spatium inter A & B dimidio illo spatio; A processit ter illo dimidio spatio & C semel dum C communem cum B & A motum suscipit, ergo intervallum inter A & C duplo ejus dimidii spatii diminutum est, sed inter A & C duo sunt particularum intervalla A & B, B & C, & primum intervallum est contractum dimidio illo spatio, ergo intervallum inter B & C eodem dimidio intervallo diminutum esse debet, sicque de cæteris.

16. Ideo si quolibet tempore elapso sumatur via tota puncti A, ea via æqualis erit summæ diminutionum intervallorum inter omnes particulas ad quas celeritas m communicata fuit; cum ergo motus puncti A sit uniformis, uniformiter etiam crescit numerus particularum ad quas celeritas m communicatur; & numerus earum particularum æqualis erit viæ à puncto A percursæ divisæ per diminutionis intervalli unius quantitatem.

17. Manente autem fluido eodem, sed mutatâ celeritate puncti A, tempora quibus puncta successiva medii celeritatem ejus puncti A suscipiunt eadem tamen manent: Nam si in formula $x^2 = \frac{3.57 a^2 m}{s}$ quâ determinatur quadratum temporis quo punctum B recipit celeritatem puncti A substituantur loco m & s quantitates ipsis æquipollentes, formula hæc fiet quantitas constans (manente Elaterio medii & intervallo particularum) quæcumque sit velocitas puncti A; Etenim dicatur f vis elastica medii, quoniam, ex Hypothesi Problematis hujusce, uniformiter agere censetur tempore quod exprimitur per a ut celeritatem s generet, erit $s = af$; præterea quoniam particularum intervallum

BA

$\frac{\frac{3.57a^2m}{s} = 3.57a^2\frac{AB}{a} = \frac{3.57AB}{f}}{af}$ quæ quantitas, conſtantes tantùm continet à celeritate m independentes; Hinc, tempus quo punctum B celeritatem puncti A recipit idem eſt quæcumque ſit velocitas puncti A; Idem demonſtrabitur de tempore quo punctum C eam celeritatem recipit, nam habet (not. 13.) rationem conſtantem ad tempus quo punctum B eam celeritatem acquirit, eſt nempe ad id tempus ut 3 ad 2, & ſic de cæteris punctis. Q. E. D.

18. Diminutiones intervallorum inter partes medii Elaſtici (manente eodem fluido) ſunt ut celeritas puncti A; Nam ſpatium A a percurſum à puncto A tempore quo certa quædam particula medii Elaſtici celeritatem m recipit eſt ſemper mx, (x deſignante tempus quo illa particula medii celeritatem m ſuſcipit) ſed illud tempus eſt conſtans (n. 17. hujuſce) quæcumque ſit celeritas puncti A, ergo ſpatium A a eſt ſemper ut velocitas m; ſed illud ſpatium A a eſt ſumma diminutionum intervallorum inter partes ad quas celeritas m pervenit (n. 16.), ſingulæ autem diminutiones ſunt æquales (n. 15.) ergo ſingulæ diminutiones ſunt ut illud ſpatium A a, ſive ut velocitates.

19. Et vice versâ, numerus partium compreſſarum quæ dato tempore celeritatem puncti A receperunt eſt ſemper idem quæcumque ſit puncti A velocitas; Nam ille numerus eſt ut ſpatium A a diviſum per unius partis diminutionem, ſpatium A a dato tempore eſt ut celeritas puncti A, diminutio unius partis eſt etiam ut ea celeritas; ergo numerus partium quæ dato tempore celeritatem puncti A receperunt eſt ut celeritas per celeritatem diviſa, hoc eſt, in ratione conſtanti; Unde, in diverſis temporibus numerus particularum ad quas celeritas m pervenerit, erit directè ut tempus.

20. Quod ſi Particulæ datâ celeritate jam ſint dimotæ, & certum gradum compreſſionis ſuſceperint, poſtea verò nova velocitas addatur (vel detrahatur) puncto A, novus ille celeritatis gradus eodem tempore ab unâ particulâ ad aliam propagabitur quo prima celeritas propagata fuit, (in Hypotheſi quod tam velocitas m quam hæc nova velocitas additita exiguæ ſunt.) idque hoc modo demonſtrari poteſt.

Fingatur omnes particulas primâ celeritate motas & compreſſas in navi poſitas eſſe quæ ipsâ particularum earum celeritate feratur, ita ut illæ particulæ in eâ nave reſpectivè quieſcant, urgeatur verò prima pars per exceſſum novæ celeritatis ſuper primam, communicatio iſtius exceſſus celeritatis ad omnes partes in navi poſitas ut & nova compreſſio particularum determinabitur ut in præcedenti Problemate, mutatis celeritate, intervallo particularum medii, & ejus elaſticitate; Si ergo prima celeritas fuerit ut prius m; a tempus quo intervallum particularum AB eâ celeritate percurrebatur, ideoque ſit $AB = ma$, ſit ut prius s velocitas genita tempore a per vim elaſticam medii in ſtatu naturali conſiderati & uniformiter agentis, inventum eſt quod tempus quo punctum B celeritatem m acquiſiverat erat $a\sqrt{\frac{3.57m}{s}}$ (n. 10.) quod ſpatium A a interea à puncto A deſcriptum erat $ma\sqrt{\frac{3.57m}{s}}$, & ſpatium B b erat $.428\,ma\sqrt{\frac{3.57m}{s}}$, ita ut compreſſio particularum ſit A a − B b $= .572\,ma\sqrt{\frac{3.57m}{s}}$, ideoque novum intervallum inter particulas in nave poſitas erit $ma \times 1 - .572\sqrt{\frac{3.57m}{s}}$; Eſt autem Vis Elaſtica prior ad vim Elaſticam novam inversè ut partium intervalla, ſive ut $ma \times 1 - .572\sqrt{\frac{3.57m}{s}}$ ad ma, ſive ut $1 - .572\sqrt{\frac{3.57m}{s}}$ ad 1. Et, ſi exceſſus novæ velocitatis ſuper priorem dicatur n, tempus quo novum intervallum inter particulas deſcriberetur per hanc celeritatem n, erit $\frac{am}{n} \times 1 - .572\sqrt{\frac{3.57m}{s}}$, nam tempus a quo prius intervallum ma deſcribebatur velocitate m debet eſſe ad iſtud tempus directè ut intervalla ma & $ma \times 1 - .572\sqrt{\frac{3.57m}{s}}$ & inversè ut velocitates m & n. Denique, ſubtangens Logarithmicæ quæ deſignabatur per s in caſu priore eſt in

iſto

LIBER SECUND. SECT. VIII. PROP. XLV. XLVII. THEOR. XXXVII.

314.

isto $\frac{ms}{n}$, cum enim designet velocitatem uniformiter genitam ab Elaterio tempore quo intervallum particularum describitur est directè ut vis elastica & ut tempus, habetur ergo hæc proportio, est

$$\left.\begin{matrix} 1-.572\sqrt{\frac{3.57m}{s}} \\ a \end{matrix}\right\} \text{ad} \left\{\begin{matrix} 1 \\ \frac{am}{n}.1-\sqrt{.572\frac{3.57m}{s}} \end{matrix}\right.$$

ut s ad $\frac{ms}{n}$.

In seriebus ergo supra inventis loco m ponatur n; loco a ponatur $\frac{am}{n}\times 1 -.572\sqrt{\frac{3.57m}{s}}$; loco s ponatur $\frac{ms}{n}$, & tempus quo punctum B celeritatem n acquirit, invenietur (substituendo hos valores in formula $a\sqrt{\frac{3.57m}{s}}$)

$$\frac{am}{n}\times 1-.572\sqrt{\frac{3.57m}{s}}\times\sqrt{\frac{3.57n}{\frac{ms}{n}}}=\frac{am}{n}\times 1-.572\sqrt{\frac{3.57m}{s}}\times\sqrt{\frac{3.57nnm}{mms}}=a\times 1-.572\sqrt{\frac{3.57m}{s}}\times\sqrt{\frac{3.57m}{s}}.$$

Ideoque tempus $a\sqrt{\frac{3.57m}{s}}$ quo in præcedenti casu punctum B acquirebat celeritatem m, est ad tempus quo in hoc casu acquirit celeritatem n, ut 1 ad $1-.572\sqrt{\frac{3.57m}{s}}$, sed hæc ratio, existente m quantitate minimâ ut suppositio fert, est ferè æqualitatis. Quare nova celeritas, sive excessus novæ celeritatis supra præcedentem, propagabitur ad punctum proximum medii elastici eodem temporis intervallo quo præcedens celeritatis gradus in eo puncto genitus fuerat, ideoque etiam ad puncta successiva iisdem temporibus perveniet.

21. Si per datum aliquod tempus primum punctum A medii Elastici constanti celeritate m fuerit motum, postea urgeatur majori celeritate $m+n$ durante æquali tempore, omnes particulæ quæ primam celeritatem m susceperant, altero isto tempore celeritatem novam $m+n$ suscipient, & interea totidem particulæ ulteriores priorem celeritatem m accipient; Nam incrementum celeritatis n ad eas omnes particulas à primâ propagari potest dato tempore, ad quas eo ipso tempore celeritas m propagata fuerat (hujusce 20). Interea verò uniformiter propagata fuisset velocitas pristina m ab ultimis particulis quæ eam susceperant ad totidem ulteriores. Si itaque successivè post æqualia tempora velocitas crescat, totidem formabuntur portiones medii Elastici æquali numero partium constantes, quæ successivas illas celeritates habebunt, portio proxima puncto A ultimam celeritatem habebit, secunda penultimam, & sic deinceps.

22. Hinc, si medium Elasticum urgeatur per successivos velocitatis gradus, imprimi potest ejus partibus velocitas satis magna ut sensibiliter in aures agat nec tamen excitetur in medii Elastici partibus sensibilis ea vibratio quæ juxta n. 11. nasceretur si simul & semel tota illa velocitas ipsi imprimeretur; & hinc intelligitur differentia inter aërem sonum generantem, aërem sonum propagantem, & aërem ventum deferentem; si magna velocitas particulæ aëreæ imprimatur, particula ipsi proxima tremores suscipit, fitque punctum sonorum; si velocitas minor excitetur quæ constans maneat nec per gradus augeatur aer uniformiter transfertur & fit ventus; sed si ab exiguâ velocitate ad magnam assurgatur, aëris particulæ successivos illos gradus recipiunt, & quia singula velocitas accepta est exigua tremores sensibiles non excitantur in particulis aëreis, quæ velocitatem illam magnam suscipientes & ad aurem deferentes sensationem soni producunt.

23. Si autem velocitas novâ minor sit velocitate præcedente, eodem modo constabit quod decrementum illud velocitatis eodem tempore ad proximum punctum transibit quo præcedens velocitatis gradus ab eo acquisitus fuerat, & ad successiva puncta iisdem etiam temporibus perveniet quibus priorem celeritatem acquisiverant, imo solutio per constructionem Problematis ipsius productâ Logarithmica ultra punctum F quæri potest, eademque obtinebuntur ac prius.

24. Quibus positis intelligitur effectus vibrationis fibræ flexæ & redeuntis in aërem

1us. Casus. Dividatur tempus ejus reditus in partes æquales quam minimas, & durante singulâ temporis parte, fibræ velocitas uniformis manere censeatur. Prima velocitas, ad certum numerum partium dato eo tempore communicabitur qui partium numerus dicatur N; altero instanti secunda velocitas eidem partium numero N communicabitur dum prima velocitas ad totidem particulas ulteriores N perveniet, tertio instanti primus partium numerus N tertiam velocitatem habebit, ulterior numerus N secundam velocitatem, numerus N adhuc ulterior primam; hinc ergo si fibra dimidiam vibrationem absolverit, hoc est ultra statum suum naturalem discesserit quantum potest, erunt in aëre totidem successivæ portiones, quæ particulas numero N continebunt, quot successivæ velocitates erunt genitæ, & particulæ remotissimæ à fibrâ primum celeritatis gradum habebunt, proximæ fibræ ultimum, mediæ verò medium, qui maximus est; diminutiones intervallorum correspondebunt illis celeritatum gradibus, ut sint minimæ tam in particulis à fibrâ remotissimis, quam in particulis ipsi proximis, maximæ in mediis.

Regrediente fibrâ, eadem omnino Lex observabitur nisi quod partes aëris fibræ proximæ retrò movebuntur & compressiones in dilatationes mutabuntur, dum in portiones ulteriores medii celeritates primo receptæ propagantur, ideoque tota vibratione absolutâ numerus particularum agitatarum duplus erit ejus quem in dimidiâ vibratione notaveramus, pars dimidia remotior est plane æqualis illi de quâ primo actum est & similiter constituta, pars citerior verò negativam celeritatem obtinebit & dilatationem; ejus citerioris partis portio remotissima à fibrâ primum celeritatis fibræ regredientis gradum habebit, & portio fibræ proxima ultimum (quietem nempe), media portio medium, hoc est retrocedet eâ ipsâ celeritate quâ medium ulterioris partis procedit & dilatationes illis celeritatibus negativis correspondebunt, ideoque in medio illius proximæ portionis maxima erit dilatatio ut & maximus regressus.

2^dus^. Casus. Quod si singula tempuscula, quibus durantibus velocitas fibræ uniformis fingitur, æqualia non sint, eâdem ratione intelligentur effectus fibræ in partes medii, nisi quod portiones medii quæ singulis successivis velocitatis gradibus gaudent non sint æquales, sed (per not. 19.) sint sicut tempora quibus durantibus singulæ illæ velocitates in fibrâ permanserunt.

3us. Casus. Quamvis autem fibræ velocitas nullo tempusculo uniformis maneat sed continuo acceleretur, eodem tamen modo fibra aget in medium ac si reverâ velocitas ejus cresceret per intervalla temporis, & durante tempusculo quam minimo (sed finito) uniformis maneret, idque propterea quod Intervalla inter particulas medii sunt finitæ quantitates non verò infinitè parva; nam per not. 4. & 5. nullus motus ex puncto A in punctum B transire potest, nisi punctum A processerit finitâ quantulâcumque quantitate, ideoque, nisi fibra quæ urget punctum A velocitatem finitam in eo generaverit (ut fert Hypothesis Problematis not. 9.); Pari ratiocinio punctum B non sentiet incrementa velocitatis puncti A, nisi postquam incrementum finitum velocitatis in eo genitum fuerit (not. 5. & 20.). Ergo fibra agit in medium quasi singulo tempusculo (æquali vel inæquali) ejus velocitas uniformis perstitisset; Intelligitur ergo effectus vibrationis fibræ in aërem per primum & secundum casum hujusce demonstrationis. Q. E. I.

25. Totum autem spatium cujus particulæ commotæ fuerunt durante integrâ fibræ vibratione à Newtono pulsus vocatur, & si vibratione absolutâ fibra quiesceret, semper ulterius propagaretur ille pulsus; Nam totus ille pulsus (momento quo absolvitur vibratio) divisus intelligatur in portiones totidem quot temporis intervalla in vibrationis duratione fuerunt assumpta, quæ temporis intervalla facilitatis ergo æqualia supponantur, singula portio medii eam velocitatem habebit quam habuit chorda in momento ipsi respondenti, ultima portio sive remotissima à fibra eam habebit celeritatem quam fibra habuerat primo instanti, penultima portio eam celeritatem habet quam fibra habuit secundo instanti &c.; sequenti verò tempusculo ultima portio pulsus ad novam portionem sibi æqualem & ulteriorem suam velocitatem propagabit (hujus 21.) dum ipsa suscipiet penultimæ portionis celeritatem, penultima verò portio celeritatem antepenultimæ &c., postea altero temporis intervallo ad alteram novam portionem ulteriorem prima celeritas propagabitur, & secunda celeritas in

314.

in primâ portione novi istius pulsus generabitur, sicque deinceps: novus ergo pulsus formabitur plane similis priori æqualiter extensus, æquali celeritate in singulis partibus donatus (semotâ ut dixi consideratione partium circumquâque positarum remque considerando quasi de partibus in linea rectâ positis unicè ageretur).

26. Ipse autem primus pulsus penitus quiescit quando in secundum totus transiit si nulla nova chordæ agitatio succedat, nam celeritas portionis pulsus quæ fibræ proxima est successivè ad sequentes portiones transit dum novus pulsus formatur, sed celeritas ejus portionis fibræ proximæ est ultima fibræ celeritas quæ in hâc Hyp. est quies, sed ubi pulsus secundus totus formatus est, celeritas portionis pulsus quæ fibræ proxima erat ad initium secundi pulsus est translata & per omnes partes pulsus primi successivè transiit, ideoque in quiete eas constituit in quâ permanserunt nullâ succedente novâ agitatione.

27. Quòd si chorda novam vibrationem faciat, ut evenit, Restituetur primus pulsus æqualis præcedenti qualiscumque sit ejus vibrationis velocitas initialis, nam dividatur totius vibrationis hujusce tempus in totidem partes æquales partibus in quas tempus primæ vibrationis divisum fuerat, quod fieri potest cum vibrationes sint isochronæ, istæ partes temporis æquales erunt iis quæ in præcedenti vibratione assumptæ fuerunt; Dato autem tempore numerus particularum compressarum est semper idem qualiscumque sit velocitas (n. 19. hujusce). Ergo siquidem singulo instanti dato totidem partes comprimuntur, totidemque sunt instantia data in vibrationibus Isochronis, pulsus ad totidem particulas in quâvis vibratione Isochronâ extendetur.

28. Si per velocitatem pulsûs intelligatur (cum Newtono) distantia ad quam pulsus extenditur divisa per tempus quo pulsus ad eam distantiam pervenit, dico Pulsus in eodem medio esse omnes æquiveloces quæcumque sit fibræ pulsum producentis vibratio: Id jam liquet de vibrationibus Isochronis in quibus tempore unius vibrationis ad totidem partes pulsus propagatur, ideoque æquale spatium æquali tempore percurrit, postea verò idem pulsus similiter propagatur, sed id pariter verum est de Vibrationibus Eterochronis; Dividantur enim inæqualia vibrationum tempora in totidem utrinque tempuscula minima quæ totis temporibus sint proportionalia, numerus partium compressarum singulis tempusculis diversis sunt illis tempusculis proportionales (n. 19. hujusce) ideoque totis vibrationum temporibus proportionales, sed in singulâ vibratione totidem tempuscula assumpta sunt, ergo totus numerus partium quæ singulum pulsum constituunt est proportionalis tempori vibrationis. Sed distantia ad quam pervenit pulsus est semper numero partium proportionalis. Ideoque distantia ad quam pervenit pulsus est tempori vibrationis proportionalis, sed velocitas pulsus est distantia ad quam pervenit divisa per tempus quo ad eam distantiam pervenit, ergo ea velocitas est constans. Ergo in eodem medio omnes pulsus, sunt æquiveloces; Quod de sono per experimenta verum esse demonstravit Derhamus.

29. Quod si medium diversum sit, velocitates pulsuum erunt inverse in ratione subduplicatâ densitatis & directe in ratione subduplicatâ vis Elasticæ, quippe (n. 17. hujusce) deprehendimus quadratum temporis quo celeritas puncti A transit in punctum B esse $\frac{3.57\,AB}{f}$ designante AB particularum intervallo & f vi elasticâ, & uniformiter procedere motum in pulsu ab unâ particulâ ad sequentem, sumantur ergo totidem partes in utroque medio, tempora quibus motus pulsus à primâ ad ultimam perveniet erit ut $\frac{\sqrt{AB}}{\sqrt{f}}$ (neglectâ quantitate constanti 3.57). Velocitas verò pulsus est directè ut spatium quod occupant illæ omnes particulæ & inversè ut tempus quibus motus à primâ ad ultimam transit, spatium verò quod occupant illæ particulæ cum sint totidem est ut intervallum AB singulæ particulæ, ideoque est velocitas pulsus ut $\frac{AB}{\sqrt{\frac{AB}{f}}} = \sqrt{AB} \times \sqrt{f}$.

Intervallum particularum est inversè ut densitas medii (rem considerando ut in n 25 hujusce) ergo velocitas pulsus est inversè in ratione subduplicatâ densitatis medii, & directè in ratione subduplicatâ vis Elasticæ (quod Prop. XLVIII. statuit Newtonus).

30. His de toto pulsu dictis, nunc de motu singulæ particulæ pulsûs observandum est, in singulâ particulâ omnes velocitatis successivos gradus quos habuit prima particula A produci, & tantùmdem tem-

temporis in eâ particulâ durare, quantùm in ea particula A, hoc cum discrimine quod tardius eos velocitatis gradus suscipiat quam particula A, & quidem eò tardius quò ab ea remotior est; 1us. Casus. Dividatur ut prius vibrationis tempus in tempuscula & durante uno tempusculo æquabilis manere censeatur velocitas impressa particulæ A, fingamus singulo tempusculo velocitatem ad viginti particulas pervenire & spectemus speciatim motum quem 10a. particula à puncto A suscipiet quæ particula dicatur X, illa particula X motum puncti A non suscipit nisi post novem particulas antecedentes, tum ipsa particula X motum puncti *A* suscipit & uniformiter cum eo movetur durante reliquo tempusculo, tunc ex Hypothesi mutatur celeritas puncti A, interea tamen uniformis manet celeritas puncti X donec nova ea celeritas ad ipsam pervenire potuerit, hoc est postquam successivè pervenit ad particulas novem antecedentes, sed nova hæc celeritas per novem particulas antecedentes particulam X propagatur eodem tempore quo prima celeritas per easdem novem particulas propagata fuerat, ergo prima celeritas tantò diutius permanet in particulâ X quantò tardius eam receperat, ergo ea prima celeritas tamdiù durat in particulâ X quamdiù duraverat in particulâ *A*; cumque idem de singulis successivis motibus puncti A dici possit, hinc quælibet particula X ipsissimum habet motum ac particula A, nisi quod tardius in eâ incipiat & desinat. Ideoque etiam manifestum est in hoc casu, spatia à particulis *A* & X descripta æqualia fore & similiter descripta.

2us. Casus. Ponatur nunc quod motus puncti *A* æquabilis non maneat durante singulo tempusculo, velocitates tamen successivæ puncti X erunt illæ quas in fine singuli tempusculi quam minimi punctum *A* acquisiverit, ut liquet ex tertio casu notæ 24, ideoque punctum X suscipiet velocitates correspondentes velocitatibus puncti A sumptis per saltus, sed quoniam cùm primùm punctum A spatium finitum descripsit, agere incipit in punctum proximum, saltus illi quamminimi intelligi debent, ideoque Physicè nulli, hinc Physicè particula X & particula A eosdem motus habebunt.

Pariter describent spatia æqualia & similia; Quippe abscissæ curvæ cujusvis repræsentent tempus quo durante punctum *A* movetur, & ejus ordinatæ repræsentent correspondentes velocitates, & dividatur axis curvæ in partes quamminimas sed finitas, eriganturque ordinatæ, illæ repræsentabunt velocitates æquabiles puncti *X* initio singuli tempusculi, & Parallelogrammata contenta sub ordinata & portione axis respondente repræsentabunt spatia à puncto *X* descripta, areæ verò mixtilineæ inter easdem ordinatas easdem axis portiones & arcus curvæ comprehensæ repræsentabunt spatia correspondentia à puncto *A* descripta, sed quando portiones axis sunt quamminimæ, summæ omnium eorum Parallelogrammatum & arearum mixtilinearum correspondentium pro æqualibus habentur, Ergo spatia à particulis A & X descripta sunt æqualia & similiter descripta saltem quàm proximè.

31. Ideo uniformiter motus fibræ propagatur trans particulas medii; singulæ verò ejus particulæ successivè motum fibræ suscipiunt & ejus ad instar moventur, sed in fibrâ Elasticâ vires sunt semper proportionales distantiæ fibræ à puncto medio motus sui, ut per experimenta constat, & illarum virium actio sensibiliter non turbatur per resistentiam aëris, propter ejus raritatem, nec per ejus elaterium quia hinc inde à fibrâ aer datur qui ferè æqualiter premit, ideo fibra elastica ac per consequens particulæ ipsæ medii moventur secundum Legem Prop. XXXVIII. Lib. I. Sed eadem est Lex motus Penduli in Cycloide oscillantis Prop. LI. lib. I. Ergo *Pulsibus per fluidum propagatis singulæ particulæ motu reciproco brevissimo euntes & redeuntes accelerantur semper & retardantur pro Lege oscillantis Penduli.* Q. E. D.

314.

32. Sumatur tempus quodvis, simulque illud intervallum inter particulas pulsus quod tale est ut eo tempore assumpto motus fibræ à primâ particulâ ejus intervalli ad ultimam perveniat. Dico, quod tempus illud erit ad totum vibrationis tempus ut illud intervallum ad totius pulsus longitudinem; Res est evidentissima ex præcedentibus; nam cum motus propagetur in pulsu uniformiter qualiscumque sit celeritas, hoc est, cum ad totidem particulas dato tempore perveniat, manifestum est quod sicut est totum vibrationis tempus, sive totum tempus quo pulsus formatur ad omnes particulas quæ pulsum constituunt, ita portio quævis ejus temporis ad numerum particularum quæ eâ temporis portione motum receperunt.

DE MOTU CORPORUM.

33. Ut melius horum cum Newtonianis nexus pateat, hic adjungere lubet Propositionis XLIX demonstrationem ex XLVII. desumptam, quamvis vix diversa sit ab iis quæ in ipso Textu leguntur, & 1°. quidem, sit PS spatium quod fibra unâ vibratione eundo per currit, ex ejus medio O ut centro describatur circulus PKSk ejus circumferentia repræsentet totum vibrationis ex itu & reditu compositæ tempus, partes ejus circumferentiæ ut KH repræsentabunt tempora quibus fibra per spatium correspondens NL movebitur; HL, KN repræsentabunt velocitates fibræ in punctis N & L, & HL—KN velocitatum incrementa vel decrementa, actioni elaterii fibræ proportionalia, hæc omnia patent ex Propos. XXXVIII. & LI. Lib. I.

2°. Sit BC longitudo pulsus, & dicatur V radius circuli cujus circumferentiæ illa longitudo BC æqualis foret, dico quod vis naturalis elaterii medii erit ad vim acceleratricem fibræ ut V—KN ad HL—KN.

Sint enim duo puncta E & G in suo naturali situ in medio elastico, quæ post aliquod tempus in locis ε & γ occurrant, suscepto nempe motu fibræ secundum leges à nobis expositas, singula seorsim eumdem motum ac fibra habebunt, ideoque si sumptum fuerit $E\varepsilon = PL$ erit PH tempus elapsum à momento quo punctum E motum fibræ suscepit & erit HL ejus velocitas in ε, pariter sit $G\gamma = PN$ erit PK tempus elapsum à momento quo G motum fibræ suscepit, & erit KN ejus velocitas in γ, sint verò E & G puncta proxima; compressio spatii EG ubi in $\varepsilon\gamma$ pervenit oritur ex eo quod plus processit ε quam γ itaque diminutio ejus spatii erit æqualis spatio LN, ideoque $\varepsilon\gamma$ erit æqualis EG—LN, utque vires quibus urgentur puncta medii, eorum densitati est proportionalis, vis tota quâ urgetur punctum γ est ad eam quâ urgebatur punctum G (quæ erat vis naturalis elaterii) inverse ut spatium $\varepsilon\gamma$ ad EG seu ut $\frac{1}{EG-LN}$ ad $\frac{1}{EG}$. Sed est LN ad KH ut IM ad radium PO, & cum KH designet intervallum temporis quo pulsus à puncto E ad punctum G pervenit, est (per n. 32.) KH ad EG ut tota circumferentia PKSk ad BC, sive ut PO ad V; Ergo ex æquo est LN ad EG ut IM ad V & convertendo EG—LN ad EG ut V—IM ad V ideoque $\frac{1}{EG-LN} : \frac{1}{EG} = \frac{1}{V-IM} : \frac{1}{V}$, ac per consequens vis tota quâ urgetur punctum γ est ad vim naturalem elaterii ut $\frac{1}{V-IM}$ ad $\frac{1}{V}$.

Vis illa tota quâ urgetur punctum γ est vis naturalis Elaterii medii cui superaddita est tota vis motrix fibræ quæ ad id punctum pervenit, ergo dividendo & reducendo ad communem denominatorem, Vis motrix fibræ in puncto N, est ad vim naturalem elaterii ut IM ad V—IM, sive invertendo, Vis naturalis elaterii, ad vim totam motricem fibræ in puncto N ut V—IM ad

Corol. Hinc patet quod numerus pulsuum propagatorum idem sit cum numero vibrationum corporis tremuli, neque multiplicatur in eorum progressu. Nam lineola physica $\epsilon\gamma$, quamprimum ad locum suum primum redierit, (n) quiescet; neque deinceps movebitur, nisi vel ab impetu corporis tremuli, vel ab impetu pulsuum qui à corpore tremulo propagantur, motu novo cieatur. Quiescet igitur quamprimum pulsus à corpore tremulo propagari desinunt.

PRO-

ad I M, vel quia I M & K N pro se mutuo sumi possunt ubi puncta N & L sunt proxima est vis naturalis elaterii ad vim totam motricem fibræ ut V — K N ad K N; sed vis tota motrix fibræ est ad vim ejus acceleratricem durante tempusculo K H ut K N ad H L — K N, ergo ex æquo, est vis naturalis elaterii ad vim acceleratricem fibræ ut V — K N ad H L — K N: Q. E. D.

3°. In ipso motûs fibræ initio, vis elaterii fluidi in statu suo naturali est ad vim acceleratricem fibræ ut V ad H K; Nam ipso motus initio si P H sit infinitè parvum, ac per consequens etiam E ϵ infinitè parvum nullus adhuc motus ad particulam proximam G communicatur (per n. 4.) ergo omninò evanescit K N ideoque V — K N = V, & H L — K N = H L sed arcus infinitè parvus & ejus sinus æquantur ergo H L = H K; Ergo vis elaterii fluidi in statu naturali est ad vim acceleratricem fibræ ipso ejus motus initio ut V ad H K.

Ex quibus fluit demonstratio Propositionis X L I X. Q. E. I.

(n) * *Quiescet, neque deinceps movebitur.* Quamprimùm lineola physica ϵ γ ad locum suum primum redierit, ipsius velocitas quam ordinata, m i, semper exponit (prop. 38. lib. 1.) extinguetur; & ejusdem lineolæ densitas visque elastica eadem erit cum densitate & vi elasticâ partis E G medii quiescentis; ideóque quiescet &c. * Id liquet ex n. 20. additionis nostræ de Motibus in fluido Elastico genitis.

316. Ex his intelligitur quomodò per vibrationes isochronas corporis resonantis producantur in aëre pulsus quibus ad aurem appulsis, fit in nobis perceptio soni, & cur soni, cessante motu tremulo corporis sonori, statim cessent. Liquet etiam tonos à numero pulsuum qui in aëre tempore dato excitantur, pendere, cum (per cor. prop. hujus) numerus pulsuum æqualis sit numero vibrationum ex itu & reditu compositarum quas chorda musica peragit, & ab isto numero tonorum diversitas oriatur (308).

317. Patet etiam quomodo aëris pulsus sonum & tremores in aliis corporibus unisonis aut consonantibus creare possint. 317. Nam cum aëris pulsus in nervum musicum incurrit qui vibrationem unam ex itu & reditu compositam absolvere aptus sit, eo tempore quo pulsus suam percurrit latitudinem, commovetur nervus & oscillatur per exiguum licet spatium, & recurrentibus novis atquè conspirantibus aëris pulsibus celeriùs agitatur sonumque reddit. At si nervus vibrationes suas integras seu ex itu & reditu compositas perficere nequeat quo tempore pulsus aëris latitudinem suam describit, possit tamen in partes aliquotas hujusmodi vibrationibus peragendis aptas dividi; partes illæ, quiescentibus divisionum punctis, congruenter ad pulsuum recursum sensim agitabuntur, vibrationesque suas cum pulsibus unisonas singulæ perficient. Si verò nervi duo proximi in eas partes aliquotas dividi possint quæ sint inter se ad unisonum, aut quod idem est, quæ vibrationes isochronas peragant, & horum nervorum unus pulsetur sonumque edat, nervi duo sese in partes suas aliquotas veluti divident ut ad unisonum reducantur. Ut si ejus-

PROPOSITIO XLVIII. THEOREMA XXXVIII.

Pulsuum in fluido elastico propagatorum velocitates sunt in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione vis elasticæ directè & subduplicatâ ratione densitatis inversè; si modo fluidi vis elastica ejusdem condensationi proportionalis esse supponatur.

Cas. 1. Si media sint homogenea, & pulsuum distantiæ in his mediis æquentur inter se, sed motus in uno medio intensior sit: contractiones & dilatationes partium analogarum (o) erunt ut iidem motus. Accurata quidem non est hæc proportio. Verumtamen nisi contractiones & dilatationes sint valde intensæ, non errabit sensibiliter, ideoque pro physicè accurata haberi potest. (p) Sunt autem vires elasticæ motrices ut contractiones & dilatationes; & velocitates partium æqualium simul genitæ sunt ut vires. Ideoque æquales & correspondentes pulsuum correspondentium partes itus & reditus suos per spa-

ejusdem nervi capiantur partes duæ quarum sit ratio 2 ad 3 & æqualiter tendantur, alteraque pars pulsetur, dividetur minor nervus in partes duas, & major in partes tres æquales quæ singulæ seorsim oscillabuntur. Nam brevior nervus duarum nempè partium, ter oscillando dum nervus longior partium trium, duas oscillationes absolvit (306) frequentiores in aëre pulsus excitat quorum recursu nervus longior citiùs quam par est agitatur; & cum utriusque nervi aerisque motus congruere non possint nisi singulæ nervorum partes aliquotæ & æquales seorsim oscillentur, motus ille conspirans tam in nervis quam in aëre tandem producitur. Et hæc quidem in experimentis musicis ità contingere observarunt Joan. Wallis Operum in fol. tom. 2. pag. 466. Et deindè Acusticæ instaurator D. Sauveur in monum. Acad. Paris. an. 1701. ubi alia experimenta refert quæ ex prædictis facilè possunt explicari; * & inde ingeniosissimi systematis de tonorum productione & Harmoniâ fundamenta derivavit Ill. De Mayrans omni laude superior, quod ad Praxim felicissimè revocavit vir inter eruditos Orpheos Illustrissimus D. Rameau.

(o) * *Erunt ut iidem motus.* Motus enim illi sunt vel causæ vel effectus contractionis & dilatationis partium in pulsibus correspondentium. Hæc tamen proportio accurata non est, si contractiones & dilatationes sint valdè intensæ, quemadmodum si chorda musica nimiâ vi pulsetur, vis motrix particularum ejus non est amplius proportionalis spatiis per quæ debet moveri, & aëris densitas vi ipsius elasticæ proportionalis non manet, si nimiâ vi comprimatur vel dilatetur aer. * Singulæ diminutiones intervallorum sunt ut velocitates (n. 19.); non tamen ex eo sequitur contractiones esse ut velocitates, (hunc verò casum & reliquos demonstravimus n. 29. additionis de mot. fluid. el.)

(p) * *Sunt autem vires elasticæ motrices.* Nam vires elasticæ motrices sunt ut partium analogarum densitates, hoc est, datâ materiæ quantitate, ut contractiones; & contractiones sunt ut dilatationes quæ viribus elasticis medii contracti producuntur;

ſpatia contractionibus & dilatationibus proportionalia, cum velocitatibus quæ ſunt ut ſpatia, ſimul peragent: & propterea pulſus, qui tempore itus & reditus unius latitudinem ſuam progrediendo conficiunt, & in loca pulſuum proximè præcedentium ſemper ſuccedunt, ob æqualitatem diſtantiarum, æquali cum velocitate in medio utroque progredientur.

Caſ. 2. Sin pulſuum diſtantiæ ſeu longitudines ſint majores in uno medio quàm in altero; (q) ponamus quod partes correſpondentes ſpatia latitudinibus pulſuum proportionalia ſingulis vicibus eundo & redeundo deſcribant: & (r) æquales erunt earum contractiones & dilatationes. Ideoque ſi media ſint homogenea, æquales erunt etiam vires illæ elaſticæ motrices quibus reciproco motu agitantur. Materia autem his viribus movenda eſt ut pulſuum latitudo; & in eâdem ratione eſt ſpatium per quod ſingulis vicibus eundo & redeundo moveri debent. (ſ) Eſtque tempus itus & reditus unius in ratione compoſitâ ex ratione ſubduplicatâ materiæ & ratione ſubduplicatâ ſpatii, atque ideo ut ſpatium. Pulſus autem temporibus itus & reditus unius eundo latitudines ſuas conficiunt, hoc eſt, ſpatia temporibus proportionalia percurrunt; & propterea ſunt æquiveloces.

Caſ.

tur; *& velocitates partium æqualium ſimul genitæ ſunt ut vires* (13. lib. 1.), hoc eſt, ut contractiones & dilatationes, *ideóque* cum ſpatia ſimul deſcripta ſint ut velocitates ſimul genitæ, *æquales & correſpondentes pulſuum correſpondentium partes itus & reditus ſuos*, ſeu motus ſuos *per ſpatia contractionibus proportionalia, cum velocitatibus quæ ſunt ut ſpatia ſimul peragent, & propterea pulſus qui tempore itûs & reditûs latitudinem ſuam progrediendo conficiunt* (314.) *& in loca pulſuum proximè præcedentium ſemper ſuccedunt, ob æqualitatem diſtantiarum* æqualibus temporibus *deſcriptarum æquali cum velocitate in medio utroque progredientur.*

(q) *Ponamus quod partes correſpondentes.* Quoniam (per caſ. 1.) in eodem medio homogeneo & datâ pulſuum latitudine ſpatium quod partes medii oſcillando deſcribunt, manente tempore oſcillationis, minui poteſt in datâ ratione; nihil obſtat quominùs in hoc ſecundo caſu ſupponatur quod partes mediorum correſpondentes ſpatia latitudinibus pulſuum proportionalia, iiſdem manentibus oſcillationum in unoquoque medio temporibus, eundo & redeundo percurrant. 317.

(r) * *Æquales erunt.* Si media ſint homogenea, uti in hoc 2°. caſu supponitur, vires elaſticæ motrices ſunt ut partium correſpondentium contractiones & dilatationes quas producunt, ſed quia quantitates materiæ in partibus correſpondentibus ſunt ut pulſuum latitudines, ſeu ut partium analogarum volumina, & partes illæ analogæ eundo & redeundo dilatantur & contrahuntur per ſpatia quantitatibus materiæ proportionalia (per hyp.) contractiones & dilatationes ideóque vires elaſticæ motrices æquales erunt.

(ſ) * *Eſtque tempus itûs & reditûs.* Nam tempus quo materia viribus æqualibus ad legem oſcillantis penduli agitatur, eſt in ra-

De Motu Corporum.

Cas. 3. In mediis igitur densitate & vi elasticâ paribus, pulsus omnes sunt æquiveloces. Quod si medii vel densitas vel vis elastica intendatur, quoniam vis motrix in ratione vis elasticæ, & materia movenda in ratione densitatis augetur; (t) tempus, quo motus iidem peragantur ac prius, augebitur in subduplicatâ ratione densitatis, ac diminuetur in subduplicatâ ratione vis elasticæ. Et propterea velocitas pulsuum erit in ratione compositâ ex ratione subduplicatâ densitatis medii inversè & ratione subduplicatâ vis elasticæ directè. *Q. E. D.*

Hæc propositio ulterius patebit ex constructione sequentis.

PRO-

ratione compositâ ex subduplicatâ ratione materiæ & subduplicatâ ratione spatii (per cor. 5. prop 24. lib. 2.).

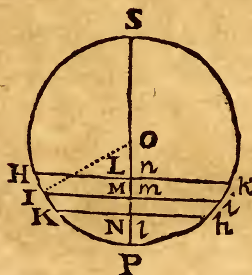
(t) *Tempus quo motus iidem peragantur &c.* Tempus quo motus per æqualia spatia peraguntur est in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione materiæ movendæ directè & subduplicatâ ratione vis motricis inversè (per cor. 5. prop. 24.) ideóque in hoc tertio casu, tempus, manente spatio descripto, augebitur in subduplicatâ ratione densitatis, ac diminuetur in subduplicatâ ratione vis elasticæ, & propterea velocitas quæ est ut spatium directè & tempus inversè, (ob datum spatium per hyp.) erit in ratione compositâ ex ratione subduplicatâ densitatis medii inversè, & ratione subduplicatâ vis elasticæ directè; sed datis medii densitate & vi elasticâ, velocitas pulsuum, utcumquè varietur spatium, data est, (per cas. 1. & 2.) ergò velocitas pulsuum erit semper in ratione compositâ ex ratione subduplicatâ densitatis medii inverse & ratione subduplicatâ vis elasticæ directe.

318. Ex hâc propositione patet cur soni omni generis, gravis & acutus, intensus & remissus, pari velocitate in eodem aëre propagentur. Nam sonorum diversitas, quoad *grave* & *acutum*, à numero pulsuum qui in aëre tempore dato excitantur, pendet (316); (at per hanc prop.) pulsus aëris, seu plures seu pauciores dato tempore producantur, eâdem semper velocitate diffunduntur & dato tempore datum spatium conficiunt: Soni verò in eodem aëre producti eo intensiores sunt, manente tono, quo majus est spatium quod aëris particulæ eundo & redeundo describunt dato tempore; ut si chorda musica validius pulsetur, majores vibrationes dato tempore peragit, majoresque oscillationes particularum aëris excitat, & sonus intensior percipitur, licet tonus idem maneat & proinde pulsuum latitudo ac velocitas non mutentur. Cum ergo tanta sit velocitas lucis ut per atmosphæram in instanti quoad sensum propagetur (per schol. ad prop. XCVI. lib. 1.); Si sonus & lux eodem puncto temporis excitentur, uti in machinis bellicis flamma & fragor producuntur simul, & spectator spatium quo à corpore resonante distat, tempusque quod inter luminis & soni perceptiones intercedit, dimediatur, soni velocitas innotescet. Atque eo modo in variis regionibus varia observata est velocitas soni, & in Angliâ eâ celeritate ferri Flamstedio & Halleyo visus est, quâ pedes Londinenses plus minus 1142, Parisienses verò 1070, tempore minuti unius secundi percurreret. Quia verò densitas & vis elastica aëris in variis terrarum locis, diversisque anni tempestatibus in eodem loco mutantur, inde quoque mutari oportet soni velocitatem. Diu creditum est, observantibus Mersenno, Gassendo, & Academicis Florentinis, sonum neque conspirante vento accelerari, neque adverso retardari; Sed D. Derham experimentis accuratè institutis, falsum id esse asserit.

PROPOSITIO XLIX. PROBLEMA XI.

Datis medii densitate & vi elasticâ, invenire velocitatem pulsuum.

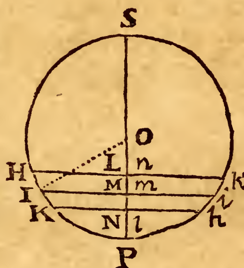
Fingamus medium ab incumbente pondere pro more aëris nostri comprimi; sitque A altitudo medii homogenei, cujus pondus adæquet pondus incumbens, & cujus densitas eadem sit cum densitate medii compressi, in quo pulsus propagantur. Constitui autem intelligatur pendulum, cujus longitudo inter punctum suspensionis & centrum oscillationis sit A: & quo tempore pendulum illud oscillationem integram ex itu & reditu compositam peragit, eodem pulsus eundo conficiet spatium circumferentiæ circuli radio A descripti æquale.



Nam stantibus quæ in propositione XLVII. constructa sunt, si linea quævis physica *EF*, singulis vibrationibus describendo spatium *P S*, urgeatur in extremis itus & reditus cujusque locis *P* & *S*, à vi elasticâ (u) quæ ipsius ponderi æquetur; peraget hæc vibrationes singulas quo tempore eadem in cycloide, cujus perimeter tota longitudini *P S* æqualis est, oscillari posset: id adeo quia vires æquales æqualia corpuscula per æqua-

(u) * *Quæ ipsius ponderi æquetur*, & quæ decrescat ut ipsius distantia à centro O; peraget hæc vibrationes singulas quo tempore eadem in cycloide, cujus perimeter tota longitudini P S æqualis est, oscillari posset; quia particulæ E F in hujusmodi cycloide oscillantis vis motrix est semper ut distantia ipsius à puncto cycloidis infimo seu medio, & in altissimis seu extremis punctis cycloidis ponderi ipsius æquatur, per Cor. Prop. L I. lib. I.

lia ſpatia ſimul impellent. Quare cum oſcillationum tempora (x) ſint in ſubduplicatâ ratione longitudinis pendulorum, (y) & longitudo penduli æquetur dimidio arcui cycloidis totius; foret tempus vibrationis unius ad tempus oſcillationis penduli, cujus longitudo eſt A, in ſubduplicatâ ratione longitudinis $\frac{1}{2}$ PS ſeu PO ad longitudinem A. Sed vis elaſtica, quâ lineola phyſica EG, in locis ſuis extremis P, S exiſtens, urgetur, erat (in demonſtratione propoſitionis XLVII.) ad (z) ejus vim totam elaſticam ut $HL-KN$ ad V, hoc eſt (cum punctum K jam incidat in P) ut (a) HK ad V: & (b) vis illa tota, hoc eſt pondus incumbens, quo lineola EG comprimitur, eſt ad pondus lineolæ ut ponderis incumbentis altitudo A ad (c) lineolæ longitudinem EG; ideoque ex æquo, vis quâ lineola EG in locis ſuis P & S urgetur, eſt ad lineolæ illius pondus ut $HK \times A$ ad $V \times EG$, ſive ut $PO \times A$ ad VV, (d) nam HK erat ad EG ut PO ad V. Quare cum tempora, quibus æqualia corpo-



(x) * *Sint in ſubduplicata ratione longitudinis pendulorum* (472. lib. 1.).

(y) * *Et longitudo penduli æquetur dimidio arcui cycloidis totius*, per cor. Prop. L. & Cor. 2. Prop. LII. lib. 1.

(z) * *Ad ejus vim totam elaſticam* in loco EG ubi medium quieſcit, ut &c.

(a) * *Ut HK ad V.* Cum punctum K incidit in P, evaneſcit KN & fit HL−KN=HL=HK, per cor. 1. lem. VII. lib. 1.

(b) * *Et vis illa tota, hoc eſt, pondus incumbens, quo &c.* Vis elaſtica tota partis EG eſt in æquilibrio cum pondere comprimente, ubi medium quieſcit.

(c) * *Ad lineolæ longitudinem* EG. Cum enim medium homogeneum, cujus altitudo eſt A, ſit (per hyp.) ejuſdem denſitatis cum medii parte EG, pondera ſunt ut volumina, hoc eſt, ut lineæ A & EG.

(d) * *Nam HK erat ad EG ut PO ad V*, in Dem. Prop. XLVII.

ra per æqualia spatia impelluntur, sint (e) reciprocè in subduplicatâ ratione virium, erit tempus vibrationis unius, urgente vi illâ elasticâ, ad tempus vibrationis, urgente vi ponderis, in subduplicatâ ratione V V ad $PO \times A$, atque (f) ideo ad tempus oscillationis penduli cujus longitudo est A in subduplicatâ ratione VV ad $PO \times A$, & subduplicatâ ratione PO ad A conjunctim; id est, in ratione integrâ V ad A. Sed tempore vibrationis unius ex itu & reditu compositæ, pulsus progrediendo conficit latitudinem suam BC. Ergo tempus, quo pulsus percurrit spatium BC, (g) est ad tempus oscillationis unius ex itu & reditu compositæ, ut V ad A, id (h) est, ut BC ad circumferentiam circuli cujus radius est A. Tempus autem, quo pulsus percurret spatium BC, est ad tempus quo percurret longitudinem huic circumferentiæ æqualem, in (k) eâdem ratione; ideoque tempore talis oscillationis pulsus percurret longitudinem huic circumferentiæ æqualem. *Q. E. D.*

Corol. 1. Velocitas pulsuum ea est, quam acquirunt gravia æqualiter accelerato motu cadendo, & casu suo describendo dimidium altitudinis A. Nam tempore casus hujus, cum velocitate cadendo acquisitâ, pulsus percurret spatium (l) quod erit æqua-

(e) * *Sint reciprocè in subduplicatâ ratione virium.* Patet per cor. 3. prop. XXIV. libri hujus.

(f) * *Atque ideo ad tempus &c.* Patet per compositionem rationum & ex æquo; quia (ex demonstratis) tempus unius vibrationis particulæ E F, urgente vi ponderis ipsius, est ad tempus oscillationis penduli cujus longitudo est A, in subduplicatâ ratione P O ad A.

(g) * *Est ad tempus oscillationis unius ex itu & reditu compositæ*, penduli cujus longitudo est A.

(h) * *Id est, ut B C ad circumferentiam circuli cujus radius est A.* Nam (in demonstr. prop. XLVII.) erat V radius circuli circumferentiam habentis æqualem intervallo B C; unde est V ad A ut B C ad circumferentiam circuli cujus radius est A.

(k) * *In eadem ratione.* Quoniam tempus quo pulsus percurrit spatium B C, est ad tempus datum oscillationis integræ penduli cujus longitudo A, datis medii densitate & vi elasticâ datâ, est ut spatium B C ad datam peripheriam circuli radio A descripti; liquet, quod tempus, quo pulsus percurrit spatium B C, aut eadem celeritate percurreret datam peripheriam circuli radio A descripti, fore eis spatiis proportionalem. Quare tempus quo pulsus percurrit spatium B C, est ad tempus oscillationis unius ex itu & reditu compositæ penduli cujus longitudo est A, ut tempus quo pulsus percurrit idem spatium B C, ad tempus quo percurrit longitudinem æqualem circumferentiæ circuli cujus radius est A; Ideoque tempore talis oscillationis pulsus percurret longitudinem huic circumferentiæ æqualem.

(l) * *Quod erit æquale toti altitudini A* (30. lib. 1.)

æquale toti altitudini A; ideoque tempore oſcillationis unius ex itu & reditu compoſitæ percurret ſpatium æquale circumferentiæ circuli radio A deſcripti: eſt (m) enim tempus caſus ad tempus oſcillationis ut radius circuli ad ejuſdem circumferentiam.

Corol. 2. Unde cum altitudo illa A ſit ut fluidi vis elaſtica directè & denſitas ejuſdem inversè; (n) velocitas pulſuum erit in ratione compoſitâ ex ſubduplicatâ ratione denſitatis inversè & ſubduplicatâ ratione vis elaſticæ directè.

PROPOSITIO L. PROBLEMA XII.

Invenire pulſuum diſtantias.

Corporis, cujus tremore pulſus excitantur, inveniatur numerus vibrationum dato tempore. Per numerum illum dividatur ſpatium quod pulſus eodem tempore percurrere poſſit, & pars inventa (o) erit pulſus unius latitudo. *Q. E. I.*

Scho-

(m) * *Eſt enim tempus caſûs*, per dimidiam altitudinem A ad tempus oſcillationis unius ex ſolo itu, vel ſolo reditu conſtantis, ut diameter circuli ad ejus circumferentiam (470. lib. 1.), ideóque ad tempus duplum oſcillationis unius ex itu & reditu compoſitæ, ut radius circuli ad ejus circumferentiam. Quare cum velocitates uniformes ſint ut ſpatia eodem tempore deſcripta, pulſus verò propriâ velocitate æquabili peripheriam circuli radio A deſcripti tempore oſcillationis unius ex itu & reditu compoſitæ percurrat, & grave cum uniformi velocitate, quam acquirere poteſt cadendo per dimidiam altitudinem A, eodem tempore idem ſpatium deſcribat; patet velocitates illas pulſus & gravis eſſe æquales.

(n) * *Velocitas pulſuum erit &c.* Velocitas pulſuum, ut pote æqualis (per cor. 1.) velocitati quam gravia per dimidiam altitudinem A cadendo acquirunt, eſt in ratione ſubduplicatâ altitudinis illius A (28. lib. 1.); Sed altitudo A medii homogenei cujus denſitas eadem eſt cum denſitate medii E G & pondus in æquilibrio cum ejuſdem medii EG vi elaſticâ, manente denſitate eſt ut pondus ſeu ut vis elaſtica directè, & manente vi elaſticâ ſeu pondere eſt ut denſitas inversè, quia denſitas eſt ſemper ut pondus directè & volumen ſeu altitudo A inversè; & propterea conjunctis his rationibus altitudo A eſt ſemper in ratione compoſitâ ex ratione vis elaſticæ directè & ratione denſitatis inversè. Quare velocitas pulſuum erit in ratione compoſitâ ex ſubduplicatâ ratione denſitatis inversè & ſubduplicatâ ratione vis elaſticæ directè.

(o) * *Erit pulſus unius latitudo.* Quoniam pulſus omnes uniformi cum velocitate propagantur (ex dem. Prop. XLVIII. & XLIX.) & tot pulſus æquales producuntur in aëre, quot ſunt corporis tremuli vibrationes iſochronæ ex itu & reditu compoſitæ (per cor. Prop. XLVII.); Si ſpatium quod pulſus ſeu ſonus dato tempore percurrere poſſit, per numerum vibrationum, quas corpus ſonorum eodem tempore perficit, dividatur, quotus erit pulsûs unius latitudo. Sed dato ſono, numerus vibrationum quas corpus ſonorum dato tempore

Scholium.

Spectant propositiones novissimæ ad motum lucis & sonorum. (p) Lux enim cum propagetur secundum lineas rectas, in actione solâ (per prop. XLI. & XLII.) consistere nequit. Soni verò propterea quod à corporibus tremulis oriantur, nihil aliud sunt quam aëris pulsus propagati per prop. XLIII. Confirmatur id ex tremoribus quos excitant in corporibus objectis, si modo vehementes sint & graves, quales sunt soni tympanorum. (q) Nam tremores celeriores & breviores difficilius excitantur. Sed & sonos quosvis, in chordas corporibus sonoris unisonas impactos, excitare tremores notissimum est. Confirmatur etiam ex velocitate sonorum. Nam cum pondera specifica aquæ pluvia.

re peragit, invenitur (per formulas 303, 304); Si nimirum chorda musica ad unisonum vel ad notam consonantiam cum sono dato reducatur. Cum enim tonorum differentia à numero vibrationum quas corpus resonam dato tempore absolvit, pendeat (308 & 312), iidem toni eodem vibrationum isochronarum numero producuntur. Notum verò est spatium quod sonus dato tempore describit (318).

Exempli causâ, si sonus omnium acutissimus, quem possimus distinguere, vibrationibus integris 6400 tempore minuti unius secundi absolutis producatur, & omnium gravissimus vibrationibus 12 $\frac{1}{2}$ excitetur, uti D. Sauveur in Historia Acad. Scient. Paris. an. 1700. arbitratus est; divide spatium 1142. pedum Londinensium, quod sonus tempore minuti unius secundi conficit, per numeros 6400. & 12 $\frac{1}{2}$ successivè, & quoti, videlicet digiti 2, 14, & pedes 91, 36, erunt latitudines pulsuum, quibus soni acutissimus & gravissimus producuntur.

(p) * *Lux enim cum propagetur secundum lineas rectas*, & interpositis corporibus opacis intercipiatur, in actione solâ, seu pressione, motuve per medium quodlibet fluidum propagato, consistere nequit; quia pressio & motus per medium omne fluidum propagata divergunt à recto tramite in spatia immota & pone obstacula circumquaque diffunduntur, per prop. citatas. Cum igitur lumen sit corpus, ut pote motu progressivo præditum, ab obstaculis reflexum & refractum, motumque in corporibus quæ inflammat excitans, necesse esse videtur ut à corporibus luminosis tenuissima corpuscula incredibili fere velocitate quaquaversum emittantur. Spatia igitur cœlestia, quæ astrorum omnium Lux immensâ illâ celeritate permeat, materiâ quâdam ætherea densissimâ, quæ radiorum lucis motum interciperet, plena esse non possunt. 319.

(q) 319. * *Nam tremores celeriores & breviores difficilius excitantur.* Corpora enim majora & minus elastica majoribus soni gravioris, cum quo consonare possunt, vibrationibus facilius concutiuntur & congruenter ad pulsuum motum agitantur; nam debet esse proportio quædam inter pulsuum aëris latitudinem & corporum circumjectorum magnitudinem, densitatem & vim elasticam, ut sonus iis communicetur; & quo fibræ breviores sunt, tenuiores & magis tensæ, eo facilius acuto sono seu brevioribus aëris pulsibus agitantur & contremunt. Quæ omnia patent per notam 317.

De Motu Corporum.

vialis & argenti vivi ſint ad invicem ut 1 ad $13\frac{2}{5}$ circiter, & ubi mercurius in *Barometro* altitudinem attingit digitorum *Anglicorum* 30, pondus ſpecificum aëris & aquæ pluvialis ſint ad invicem ut 1 ad 870 circiter: (r) erunt pondera ſpecifica aëris & argenti vivi ut 1 ad 11890. Proinde cum altitudo argenti vivi ſit 30 digitorum, altitudo aëris uniformis, cujus pondus aërem noſtrum ſubjectum comprimere poſſet, erit 356700 digitorum, ſeu pedum *Anglicorum* 29725. Eſtque hæc altitudo illa ipſa quam in conſtructione ſuperioris problematis nominavimus A. Circuli radio 29725 pedum deſcripti (ſ) circumferentia eſt pedum 186768. Et cum pendulum digitos $39\frac{1}{5}$ longum oſcillationem ex itu & reditu compoſitam tempore minutorum duorum ſecundorum, uti notum eſt, (t) abſolvat; pendulum pedes 29725 ſeu digitos 356700 longum (u) oſcillationem conſimilem tempore minutorum ſecundorum $190\frac{3}{4}$ abſolvere debebit. Eo igitur tempore ſonus progrediendo (x) conficiet pedes 186768, ideoque tempore minuti unius ſecundi pedes 979.

Cæterum in hoc computo nulla habetur ratio craſſitudinis ſolidarum particularum aëris, per quam ſonus utique (y) propagatur in inſtanti. Cum pondus aëris ſit ad pondus aquæ ut 1 ad

(r) * *Erunt*, ex æquo & per compoſitionem rationum, pondera ſpecifica ſive denſitates aëris & argenti vivi ut 1 ad 11890. Sed fluidorum in ſe homogeneorum, eidem baſi incumbentium, & in æquilibrio conſiſtentium altitudines ſunt inversè ut denſitates (173. lib. 2.): eſt igitur 1 ad 11890 ut 30 digit. ad altitudinem aëris uniformis qui cum 30 digitis argenti vivi æquiponderat; & ideo altitudo hæc eſt digitorum 356700, ſeu, dividendo per 12, pedum Anglicorum 29725.

(ſ) * *Circumferentia eſt pedum* 186768. Eſt enim radius ad circumferentiam ut 113 ad 710, ſive ut 29725 ad 186768 quam proximè.

(t) * *Abſolvat.* Pendulum cujus longitudo eſt pedum Pariſienſium 3 & linearum $8\frac{1}{2}$, oſcillationem unam ex itu & reditu compoſitam tempore minutorum duorum ſecundorum abſolvit (471. lib. 1.); & pes Londinenſis eſt ad pedem Pariſienſem ut 15 ad 16 quam proximè, & ita ſunt pedes 3 cum lineis $8\frac{1}{2}$ ad digitos $39\frac{1}{6}$, vel $39\frac{1}{5}$ quam proximè.

(u) * *Oſcillationem conſimilem tempore &c.* Oſcillationum tempora ſunt in ſubduplicatâ ratione longitudinis pendulorum (472. lib. 1.), & propterea ut $39\frac{1}{5}$ ad 356700, ita 4 ad quadratum numeri minutorum ſecundorum, qui quæritur, & peracto calculo invenitur eſſe $190\frac{3}{4}$ quam proximè.

(x) * *Conficiet pedes &c.* Per Prop. XLIX.

(y) * *Propagatur in inſtanti.* Nam corpus ſolidum quod condenſari non poteſt, dum movetur, totum ſimul movetur, & ideo motus ab uno corporis illius extremo

ad 870, & sales sint fere duplo densiores quam aqua; si particulæ aëris ponantur esse ejusdem circiter densitatis cum particulis vel aquæ vel salium, & raritas aëris oriatur ab intervallis particularum: (z) diameter particulæ aëris erit ad intervallum inter centra particularum, ut 1 ad 9 vel 10 circiter, & ad intervallum inter particulas ut 1 ad 8 vel 9. Proinde ad pedes 979, quos sonus tempore minuti unius secundi juxta calculum superiorem conficiet, addere licet pedes $\frac{979}{9}$. seu 109 circiter, ob crassitudinem particularum aëris: & sic sonus tempore minuti unius secundi conficiet pedes 1088 circiter.

LIBER SECUND. SECT. VIII. PROP. XLVIII. THEOR. XXXVIII.

His adde quod vapores in aëre latentes, cum sint alterius ela-

mo ad alterum extremum propagatur in instanti.

(z) * *Diameter particulæ aëris erit &c.* Fingantur cubi duo æquales, quorum alter aëre plenus sit, alter medio continuo ejusdem circiter densitatis cum aquâ vel salibus. Hoc medium continuum divisum sit in particulas æquales, tenuissimas & sese mutuo contingentes; aër verò ex hujusmodi particulis, quæ æqualibus intervallis distinctæ sint, constet. Harum particularum diameter dicatur D, spatium inter illas in aëre interceptum S, & ideo intervallum inter centra particularum aëris $S+D$, numerus particularum aëris in uno cubi latere N, & proinde earum numerus in cubo toto aëreo N^3, & latus cubi $NS+ND$. Sit M numerus particularum alterius medii continui in uno latere cubi, & propterea M^3 earum numerus in cubo toto, ac MD cubi latus. Quia duo cubi æquales supponuntur, erit $NS+ND=MD$. Si densitas aëris sit ad densitatem alterius medii continui ut 1 ad A; quia paribus voluminibus, densitates sunt ut quantitates materiæ, quæ sunt ut numeri particularum magnitudine & densitate æqualium, erit $1:A=N^3:M^3$, & hinc $1:A^{\frac{1}{3}}=N:M$, ideoque $M=NA^{\frac{1}{3}}$. Quare cum sit $NS+ND=MD=NDA^{\frac{1}{3}}$, erit $S+D=DA^{\frac{1}{3}}$, & $S=D\times[A^{\frac{1}{3}}-1]$, ideoque $D:S=1:A^{\frac{1}{3}}-1$ ac $D:S+D=1:A^{\frac{1}{3}}$. Jam si ponatur A fere æqualis numero 870, erit fere $A^{\frac{1}{3}}=9$; si verò ponatur $A=1000$, vel $A=1100$, vel $A=1200$, erit fere $A^{\frac{1}{3}}=10$; unde diameter D solidæ particulæ aëris erit ad intervallum $S+D$ inter centra particularum, ut 1 ad 9 vel 10 circiter, & ad intervallum S inter particulas ut 1 ad 8 vel 9. Proinde spatium totum quod particulæ solidæ in lineâ rectâ datâ positæ occupant, erit ad spatium reliquum quod intervalla particularum in eâdem lineâ tenent, ut 1 ad 8 vel 9 circiter, & ad totam lineam ut 1 ad 9 vel 10. Sed si nulla habeatur ratio crassitudinis solidarum particularum aëris, sonus lineam rectam pedes 979 longam tempore minuti unius secundi describit: quare cum sonus per spatium totum quod solidæ particulæ aëris occupant, in instanti propagetur, & sit 9 ad 1 ut linea pedes 979 longa ad ipsius partem quam particula solidæ aëris occupant; partem illam, quæ est $\frac{979}{9}$, seu 109 pedum circiter, addere licet spatio 979 pedum. 319.

elateris & alterius toni, (a) vix aut ne vix quidem participant motum aëris veri quo ſoni propagantur. His autem quieſcentibus, motus ille celerius propagabitur per ſolum aërem verum, idque in ſubduplicatâ ratione minoris materiæ. Ut ſi atmoſphæra conſtet ex decem partibus aëris veri & unâ parte vaporum, motus ſonorum celerior erit in ſubduplicatâ ratione 11 ad 10, vel in integrâ circiter ratione 21 ad 20, quam ſi propagaretur per undecim partes aëris veri: ideoque motus ſonorum ſupra inventus, augendus erit in hâc ratione. Quo pacto ſonus, tempore minuti unius ſecundi, conficiet pedes 1142.

Hæc ita ſe habere debent tempore verno & autumnali, ubi aër per calorem temperatum rareſcit & ejus vis elaſtica nonnihil intenditur. At hyberno tempore, ubi aër per frigus condenſatur, & ejus vis elaſtica remittitur, motus ſonorum tardior eſſe debet in ſubduplicatâ ratione denſitatis; & viciſſim æſtivo tempore debet eſſe velocior.

Conſtat autem per experimenta quod ſoni tempore minuti unius ſecundi eundo conficiunt pedes *Londinenſes* plus minus 1142, *Pariſienſes* vero 1070.

Cognitâ ſonorum velocitate innoteſcunt etiam intervalla pulſuum. (b) Invenit utique *D. Sauveur*, factis à ſe experimentis, quod fiſtula aperta, cujus longitudo eſt pedum *Pariſienſium* plus minus quinque, ſonum edit ejuſdem toni cum ſono chordæ

(a) * *Vix aut ne vix quidem participant motum aëris veri quo ſoni propagantur.* Nam vibratorius particularum aëris motus, quo ſonus producitur, corporibus ejuſdem toni facile, at corporibus alterius elateris & alterius toni ægrè aut nullo modo communicari poteſt (317). Unde ſi atmoſphæra conſtet ex decem partibus aëris veri & unâ parte vaporum, ſitque proinde totum pondus atmoſphæræ ad pondus vaporum ut 11 ad 1, & ad pondus aëris veri, ſubducto pondere vaporum, ut 11 ad 10, minuenda eſt quantitas materiæ movendæ in ratione 11 ad 10. Sed ſi denſitas medii, ſive quantitas materiæ ſub dato volumine contentæ, cæteris paribus, minuatur, velocitas ſoni augetur in eâdem ratione ſubduplicatâ (per prop. XLVIII). Quare (in hyp. Newt.) velocitas ſoni augenda eſt in ratione ſubduplicatâ 10 ad 11, vel in integrâ circiter ratione 20 ad 21; & ideo ſpatium dato tempore minuti unius ſecundi deſcriptum, quod erat 1088 pedum, augendum in ratione 20 ad 21. Eſt autem fere 20 ad 21 ut 1088 ad 1142.

(b) * *Invenit utique* D. Sauveur in Hiſtoria Acad. Scient. Pariſ. an. 1700.

dæ quæ tempore minuti unius ſecundi (c) centies recurrit. Sunt igitur pulſus plus minus centum in ſpatio pedum *Pariſienſium* 1070, quos ſonus tempore minuti unius ſecundi percurrit; ideoque pulſus unus occupat ſpatium pedum *Pariſienſium* quaſi 10 $\frac{7}{16}$, id eſt, duplam circiter longitudinem fiſtulæ. (d) Unde veroſimile eſt quod latitudines pulſuum, in omnium apertarum fiſtularum ſonis, æquentur duplis longitudinibus fiſtularum.

LIBER SECUND. SECT. VIII. PROP. L PROBL. XII.

Por-

(c) * *Centies recurrit*, hoc eſt centum oſcillationes ex itu & reditu compoſitas tempore minuti unius ſecundi abſolvit. Idem D. Sauveur in monumentis Acad. Pariſ. an. 1713. oſcillationes 101 vel 102 pro ejuſdem fiſtulæ ſono poſuit.

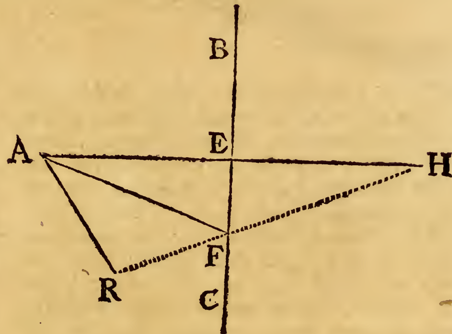
(d) * *Unde veroſimile eſt &c.* Idem confirmatur alio experimento ejuſdem D. Sauveur, qui loco mox citato invenit quod fiſtula aperta, cujus longitudo eſt pedum Pariſienſium plus minus 2, ſonum edit ejuſdem toni cum ſono chordæ quæ 243 oſcillationes integras tempore minuti unius ſecundi perficit. Unde ſi dividatur numerus 1070 per 243, prodit pulſus unius latitudo ped. Pariſ. 4 $\frac{2}{5}$ circiter, id eſt, dupla circiter longitudo fiſtulæ. Eſt autem in organis pneumaticis fiſtula aperta, quæ patet in ſuperiori & latiori extremo, alteri quo aër fiſtulam ingreditur, oppoſito. Si occludatur fiſtula, octavâ gravius ſonat.

Huc uſque de ſono directo plura diximus, de reflexo pauca adjungenda ſunt.

320. Prop. Sonus percipitur tanquam ex eo loco procedens ex quo quaſi centro pulſus aëris propagantur. Conſtat experientiâ.

321. Cor 1. Hinc ſi ſonus è centro quovis A directe propagatus in obſtaculum planum ſatis magnum BC incurrat, & ex A ducatur ad BC perpendicularis AE, producaturque ad H ut ſit EH æqualis AE; ſonus reflexus eodem fere modo percipietur ac ſi ex loco H tanquam centro directè propagaretur (194).

322. Cor. 2. Similiter ſi ſonus à centro quovis propagatus in obſtaculum quodlibet impingat, à quo ita reflectatur ut poſt reflexionem radii ſoni in centrum aliud convergant; ſonus reflexus tanquam ex hoc ſecundo centro propagatus audietur.



323. Cor. 3. Unde ſi radii ſonori ſatis denſi ad aurem appellentes & ſoni unius ſenſationem producentes, ab aure in diverſa centra convergant; locus ex quo ſonus propagatur, non bene diſtinguetur.

324. Si ſonus producatur in A, & deinde ab obſtaculo quovis BC (vide fig. ſup.) reflectatur tanquam ex centro H propagatus; auditor in loco R ſonum directum per AR propagatum percipiet primùm; deinde ſonum reflexum quaſi ex centro H procedentem, poſtquam motu directo ſpatium AF, & motu reflexo ſpatium FR deſcripſit, audiet. Idem igitur ſonus audietur bis, modo tamen diſtantiarum AR & AFR differentia tanta ſit ut ſonus directus & ſonus reflexus eodem ſenſibili momento organum auditus non afficiant; nam ſi ſonus reflexus ad aurem perve-

 niret

De Motu Corporum.

Porro cur soni cessante motu corporis sonori statim cessant, neque diutius audiuntur ubi longissimè distamus à corporibus sonoris, quam cum proximè absumus, patet ex corollario propositionis XLVII. libri hujus. Sed & cur soni in tubis stentorophonicis valde augentur ex allatis principiis manifestum est. Motus enim omnis reciprocus singulis recursibus à causâ generante augeri solet. Motus autem in tubis dilatationem sonorum impedientibus, tardius amittitur & fortius recurrit, & propterea à motu novo singulis recursibus impresso magis augetur. Et hæc sunt præcipua phænomena sonorum.

S E C-

niret eo tempore; quo soni directi impressio adhuc in eâ perseverat, non geminus, sed intensior tantùm sonus audiretur. Porrò experientiâ constat sonos vix posse distingui; si plures quam 9 circiter syllabæ tempore minuti unius secundi successive producantur; & ideo ne sonus reflexus cum directo confundatur, inter eorum ad aurem appulsus intercedere oportet partem nonam minuti unius secundi, quo tempore sonus describit spatium 127 pedum Londinensium circiter. Hoc igitur spatio minor esse non debet distantiarum AR & AFR differentia, ut sonus reflexus distinctè percipi possit in R. Quod si auditor in A locetur, ubi sonus directus producitur, & spatium 2 AE quod sonus describit ut ad centrum A post reflexionem in E redeat, sit 127 pedum Londinensium, ideoque AE 63 vel 64 pedum circiter, distingui poterit sonus reflexus à directo. Si plura sint obstacula justis intervallis dissita, in quæ sonus directe offendat, is quasi ex variis locis pluries repetitus audietur; ut cum machinarum bellicarum fragorem vel tonitru boatum circumjecta ædificia vel crassiores nubes pluries referunt. Sæpe etiam obstacula sonum directum mutant, dum vehementiori aëris tremore concussa variè contremunt & aerem repercutiendo detonant.

325. Ex iisdem principiis explicari potest tubæ vocalis seu stentorophonicæ efficacia ad vocem articulatam in loca maximè dissita propagandam. Sunt hujusmodi tubæ variarum figurarum, sed omnes

satis angustæ, oblongæ & intus perpolitæ, quo sonus in arctum coactus in latius spatium sese diffundere & virium detrimentum pati prohibeatur, ac radii sonori in determinatam plagam confertiores dirigantur. Fabrefiunt ex materia ad concipiendum motum tremulum, quo sonus producitur, apta, ut sonus hoc partium tubæ & aëris ab ipsis agitati tremulo motu multiplicatus impetum majorem acquirat & longius progrediendi vim habeat. Optima tubarum vocalium figura, Auctore Clar. Joh. Matthia Hasio, illa censetur, quæ fit ex conversione parabolæ circa ipsius axem, orificio exiguo tubæ, quod os loquentis suscipit, in ipso foco parabolæ constituto. Hâc enim tubâ radii sonori, saltem magnam partem, reflectuntur ad axem tubæ paralleli (194. lib. 2. & Theor. 3. de parabola lib. 1.). Idem Hasius,

SECTIO IX.

De motu circulari fluidorum.

HYPOTHESIS.

Resistentiam, quæ oritur ex defectu lubricitatis partium fluidi, cæteris paribus, proportionalem esse velocitati, quâ partes fluidi separantur (e) *ab invicem.*

fius, quo tubam longiorem, non nimium auctâ amplitudine, reddat, tubum ellipticum oblongum parabolico ita jungit, ut elliptici focus unus concidat cum foco parabolici, & os loquentis in altero elliptici foco constituatur; quâ ratione fit ut radii soni ab ore in tubo elliptico ad focum parabolici partim directi, partim reflexi dirigantur (per theor. 4. de ellipsi), & deinde in tubo parabolico, ut modo dictum est, progrediantur. Limbus tubæ, qua parte amplissima est, quâque sonus emittitur, ad formam labiorum recurvandus est, quo minus effectum tubæ turbare possit aëris externi in tubam irruentis motus. Hæc omnia fusè & accuratè exposita vides, in ipsa laudati Auctoris Dissertatione Physico-Mathematica de tubis stentoreis.

* Tubis stentoreis annumerandæ sunt omnes tubæ militares aut venatoriæ sive rectæ sive incurvæ, exiguus enim sibilus quem edit tubicen constricto aëre inter labium & tubæ oram, in prodigiosum erumpit sonum, & observabile videtur ea instrumenta ita à Parabolâ discrepare ut axis suæ respectu convexa potius sit tuba quam concava, Incrementum itaque soni non tam pendere videtur ex eo quod sonus secundum axis tubæ directionem parallelus exeat, quam ex eo ipso quod indicat Newtonus, nempe ex motus reciprocatione, ita ut forma tubæ ea esse debeat ut sonus ab uno pariete ad alterum repellatur, extrinsecus sonum derivando, ita tamen ut nonnisi per innumeras reflexiones sive reciprocationes foras emittatur. 321

(e) * *Ab invicem.* Resistentia quæ oritur ex defectu lubricitatis partium fluidi, cæteris paribus, est semper eadem in spatiis æqualibus, quæcumque fuerit mobilis velocitas; cum in omnibus spatiis æqualibus idem defectus lubricitatis superandus sit. Est igitur hæc resistentia, cæteris paribus, ut spatium quod mobile describit, hoc est, dato tempore, ut velocitas. Quia verò partes contiguæ quæ simul pari velocitate moventur, sese mutuo non atterunt; capienda hic est velocitas partium relativa, quâ partes separantur ab invicem. Sed de hâc hypothesi vide Scholium sequens.

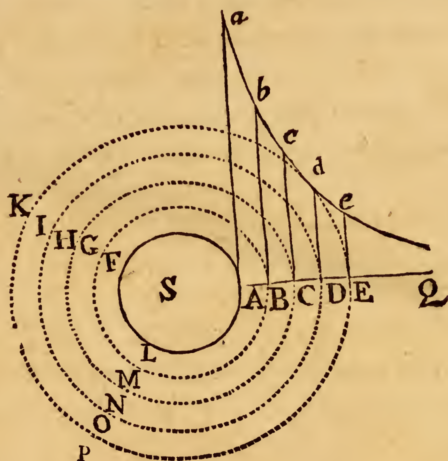
PROPOSITIO LI. THEOREMA XXXIX.

Si cylindrus solidus infinitè longus in fluido uniformi & infinito circa axem positione datum uniformi cum motu revolvatur, & ab hujus impulsu solo agatur fluidum in orbem, perseveret autem fluidi pars unaquæque uniformiter in motu suo; dico quod tempora periodica partium fluidi sunt ut ipsarum distantiæ ab axe cylindri.

Sit *AFL* cylindrus uniformiter circa axem *S* in orbem actus, & circulis concentricis *BGM*, *CHN*, *DIO*, *EKP*, &c. distinguatur fluidum in orbes cylindricos innumeros concentricos solidos ejusdem crassitudinis. Et quoniam homogeneum est fluidum, impressiones contiguorum orbium in se mutuo factæ erunt (per hypothesin) ut (a) eorum translationes ab invicem, & superficies contiguæ in quibus impressiones fiunt. Si impressio in orbem aliquem major est vel minor ex parte concavâ quam ex parte convexâ; prævalebit impressio fortior, & motum orbis vel accelerabit vel retardabit, prout in eandem regionem cum ipsius motu vel in contrariam dirigitur. Proinde ut orbis unusquisque in motu suo uniformiter perseveret, debent impressiones ex parte utrâque sibi invicem æquari & fieri in regiones

(a) 326. * *Ut eorum translationes ab invicem & superficies contiguæ &c.* Si superficies contiguæ nullâ velocitate relativâ inter se moverentur, aut si essent perfectè lubricæ, nulla foret earum frictio: at si superficies sint asperæ & alia super aliam incedat, nascetur ex partium attritu resistentia, quæ, dato tempore & cæteris paribus, velocitati superficierum relativæ proportionalis est (per hyp.). Unde si superficies contiguæ, homogeneæ & æqualis ubique asperitatis se se viribus æqualibus premant, & præterea superficies quæ super alias sibi contiguas incedunt, æquales sint; resistentiæ ex attritu dato tempore genitæ proportionales erunt translationibus superficierum contiguarum ab invicem, cum hujusmodi translationes sint spatia velocitatibus relativis dato tempore descripta. Si verò translationes illæ seu velocitates relativæ superficierum contiguarum ponantur æquales; resistentiæ, cæteris paribus, erunt ut superficies contiguæ quæ sese mutuo atterunt. Quare si nec superficies contiguæ, nec earum velocitates relativæ seu translationes ab invicem æquantur; resistentiæ, cæteris paribus, erunt in ratione compositâ ex ratione superficierum contiguarum & ratione translationum ab invicem dato tempore factarum. Impressiones verò contiguorum orbium in se mutuo factæ, sunt ut resistentiæ quibus producuntur.

giones contrarias. (b) Unde cum impressiones sunt ut contiguæ superficies & harum translationes ab invicem, erunt translationes inversè ut superficies, hoc est, inversè ut superficierum distantiæ ab axe. (c) Sunt autem differentiæ motuum angularium circa axem ut hæ translationes applicatæ ad distantias, sive ut translationes directè & distantiæ inversè; hoc est, conjunctis rationibus, ut quadrata distantiarum inversè. Quarè si ad infinitæ rectæ *SABCDEQ* partes singulas erigantur perpendicula *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, *Ee*, &c. ipsarum *SA*, *SB*, *SC*, *SD*, *SE*, &c. quadratis reciprocè proportionalia, & per terminos perpendicularium duci intelligatur (d) linea curva hyperbolica; erunt summæ differentiarum,



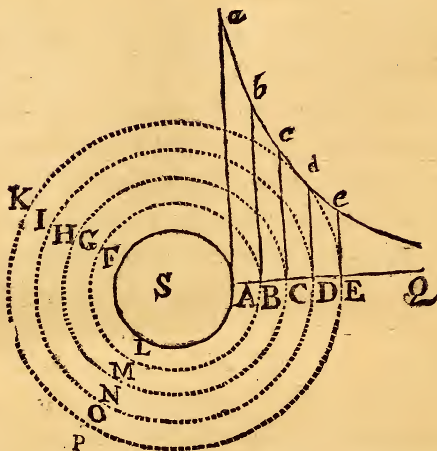
(b) * *Unde* cum (per hyp.) orbis unusquisque in motu suo uniformiter perseveret, & proinde impressiones ex utraque parte cujusque orbis in plagas contrarias factæ æquales sint; impressiones illæ, dato tempore, datæ sunt, & ideo ratio composita ex rationibus translationum & superficierum contiguarum, quæ est ut impressio, data est. Translationes igitur dato tempore factæ, sunt inversè ut superficies, hoc est, inverse ut superficierum distantiæ ab axe: nam cylindrorum ejusdem longitudinis superficies sunt ut distantiæ ab axe cylindri, & hic omnes superficies cylindricæ, quæ circa axem infinitum revolvuntur, sunt ejusdem longitudinis infinitæ (per hyp.).

(c) * 327. *Sunt autem differentiæ motuum angularium &c.* Motus angulares dicuntur ii, quibus singula puncta A, B, C, D, E &c. radiis ad axem cylindri perpendiculariter ductis angulos describunt. Sunt igitur anguli illi quasi spatia uniformi motu descripta, & ideo motus angulares sunt ut anguli descripti directè & tempora quibus describuntur inversè, & dato tempore sunt ut anguli descripti. Hinc, dato tempore, motuum angularium differentiæ sunt ut differentiæ angulorum descriptorum, hoc est (154. lib. 1.) ut translationes punctorum seu superficierum ab invicem directè & distantiæ ab axe inversè: nam translationes illæ sunt arcus circulares quos singula puncta per suam velocitatem relativam describunt, & distantiæ ab axe sunt illorum arcuum radii. Sed translationes dato tempore factæ, sunt (ex demonstr.) ut distantiæ ab axe inversè. Quare differentiæ motuum angularium, dato tempore, sunt ut quadrata distantiarum inversè. 326.]

(d) * *Linea curva hyperbolica.* Quoniam ordinatæ A a, B b, &c. sunt inversè ut abscissarum S A, S B, &c. quadrata; crescente abscissâ ac sine fine productâ, correspondens ordinata decrescit & num-

DE MOTU CORPORUM.

tiarum, (e) hoc eſt, motus toti angulares, ut reſpondentes ſummæ linearum *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, *Ee*, id eſt, ſi ad conſtituendum medium uniformiter fluidum, orbium numerus augeatur & latitudo minuatur in infinitum, ut areæ hyperbolicæ his ſummis analogæ *AaQ*, *BbQ*, *CcQ*, *DdQ*, *EeQ*, &c. Et (f) tempora motibus angularibus reciprocè proportionalia erunt etiam his areis reciprocè proportionalia. Eſt igitur tempus periodicum particulæ cujuſvis *D* reciprocè ut area *DdQ*, hoc eſt (per notas curvarum quadraturas) (g) directè ut diſtantia *SD*. *Q. E. D.*



(h) *Corol.* 1. Hinc motus angulares particularum fluidi ſunt reci-

numquam evaneſcit, & ideo recta SQ eſt curvæ aſymptotus; & ſimili ratione patet rectam per S ductam normaliter ad SQ eſſe alteram curvæ aſymptotum.

(e) * *Hoc eſt, motus toti angulares.* Quoniam ſolo cylindri AFL impulſu agitur fluidum in orbem (per hyp.), neceſſe eſt ut motus angularis partium fluidi, creſcente earum diſtantiâ ab axe cylindri, continuo decreſcat, ac tandem ad diſtantiam infinitam evaneſcat. Unde motus totus angularis puncti A ſeu orbis AFL eſt omnium maximus, & motus totus angularis puncti cujuſlibet C æqualis eſt ſummæ omnium differentiarum motuum angularium punctorum D, E & ſequentium in infinitum (106. lib. 1.); ideoque motus toti angulares ſunt ut reſpondentes ſummæ linearum Aa, Bb, Cc, Dd, Ee &c. in infinitum.

(f) * 328. *Tempora periodica motibus angularibus reciprocè proportionalia.* Motus angulares ſunt ut anguli deſcripti directè & tempora quibus deſcribuntur inverſè (326); & propterea ſi anguli deſcripti capiantur æquales quatuor rectis, ut totus circulus deſcribatur & tempora fiant temporibus periodicis æqualia, motus angulares erunt ut tempora periodica inverſe.

(g) * *Directe ut diſtantia* SD. Areæ DdQ momentum eſt Dd × DE; & ideo, ob ordinatam Dd quadrato abſciſſæ SD reciprocè proportionalem, momentum illud eſt ut $\frac{DE}{SD^2}$, & (per caſ. 4. Lemm. 2. libri hujus) area DdQ eſt ut $\frac{1}{SD}$; quæ quantitas negativa prodit, quia area DdQ abſciſſæ DS non adjacet, ſed ad partes contrarias vergit in infinitum. Eſt igitur tempus periodicum particulæ cujuſvis D reciprocè ut $\frac{1}{SD}$, hoc eſt, directè ut SD.

(h) * *Cor.* 1. Ex demonſtratis motus angulares partium fluidi ſunt reciprocè ut tempora periodica, hoc eſt, reciprocè ut illa-

reciprocè ut ipſarum diſtantiæ ab axe cylindri, & velocitates abſolutæ ſunt æquales.

Corol 2. Si fluidum in vaſe cylindrico longitudinis infinitæ contineatur, & cylindrum alium interiorem contineat, revolvatur autem cylindrus uterque circa axem communem, ſintque revolutionum tempora ut ipſorum ſemidiametri, & perſeveret fluidi pars unaquæque in motu ſuo: (i) erunt partium ſingularum tempora periodica ut ipſarum diſtantiæ ab axe cylindrorum.

Corol. 3. Si cylindro & fluido ad hunc modum motis addatur vel auferatur communis quilibet motus angularis; quoniam hoc novo motu non mutatur attritus mutuus partium fluidi, non mutabuntur motus partium inter ſe. Nam tranſlationes partium ab invicem pendent ab attritu. Pars quælibet in eo perſeverabit motu, qui, attritu utrinque in contrarias partes facto, non magis acceleratur quàm retardatur.

Corol. 4. Unde ſi toti cylindrorum & fluidi ſyſtemati auferatur motus omnis angularis cylindri exterioris, (k) habebitur motus fluidi in cylindro quieſcente.

Co-

illarum diſtantiæ ab axe cylindri. Velocitates verò abſolutæ, ut pote uniformes, ſunt ut circumferentiæ deſcriptæ, ſeu ut diſtantiæ ab axe cylindri directè & tempora periodica inversè, hoc eſt, ut diſtantiæ directè & diſtantiæ inversè, ideoque ſunt in ratione æqualitatis. Hinc verò (per cor. 5. prop. 4. lib. 1.) vires centrifugæ particularum æqualium fluidi ſunt reciprocè ut ipſarum diſtantiæ ab axe cylindri; & propterea vis quâ tota ſuperficies cylindrica nititur ab axe cylindri recedere, eſt ut eadem ſuperficies directè & diſtantia ejus ab axe inversè, & ideo data eſt.

(i) * *Erunt partium ſingularum tempora periodica ut &c.* Patet, quia cylindrus exterior uniformi velocitate motus locum tenet ſuperficiei cylindricæ, quæ in demonſtratione adhibita eſt.

(k) * *Habebitur motus fluidi in cylindro quieſcente.* Sit E K P cylindrus exterior, cujus tempus periodicum in hypotheſi Corollarii 2i. dicatur t E; & quoniam in eadem hypotheſi velocitates particularum abſolutæ ſunt æquales (per cor. 1.), ſingulæ illæ particulæ ſpatia æqualia eodem tempore t E deſcribent, hoc eſt, ſpatia æqualia peripheriæ E K P, quam punctum E tempore t E percurrit. Jam ſi toti cylindrorum & fluidi ſyſtemati auferatur motus omnis angularis. Cylindri exterioris; Ex ſpatio E K P, quod ſingulæ particulæ tempore t E deſcribunt, auferenda erit integra circuli peripheria, quam particula quælibet ſeorſim deſcribit, ut habeatur ſpatium quod eadem particula eodem tempore t E percurrit in cylindro quieſcente. Erit igitur E K P — D I O ſpatium quod particula ævis D tempore t E deſcribit, poſt quam motus omnis angularis cylindri exterioris ablatus eſt. Quia verò particulæ ſingulæ revolvuntur æquabiliter (per hyp.), erit ſpatium EKP—DIO ad D I O, ſive SE—SD ad S D, ut tempus t E ad tempus pe- 327.

De Motu Corporum.

Corol. 5. Igitur si fluido & cylindro exteriore quiescentibus, revolvatur cylindrus interior uniformiter; communicabitur motus circularis fluido, & paulatim per totum fluidum propagabitur; nec prius desinet augeri quam fluidi partes singulæ motum corollario quarto definitum (l) acquirant.

Corol. 6. Et quoniam fluidum conatur motum suum adhuc latius propagare, hujus impetu circumagetur etiam cylindrus exterior nisi violenter detentus; & accelerabitur ejus motus (m) quoad usque tempora periodica cylindri utriusque æquentur inter se. Quod si cylindrus exterior violenter detineatur, conabitur is motum fluidi retardare; & nisi cylindrus interior vi aliquâ extrinsecus impressâ motum illum conservet, efficiet ut idem paulatim cesset.

Quæ omnia in aquâ profundâ stagnante experiri licet.

riodicum particulæ D in cylindro quiescente; & ideo si hoc tempus dicatur TD, erit $TD = \frac{SD \times tE}{DE}$; & simili modo tempus periodicum particulæ A in eâdem hypothesi (quod dicatur TA) $= \frac{SA \times tE}{AE}$; unde habetur $tE = \frac{AE \times TA}{SA}$, & ideo $TD = \frac{SD \times AE \times TA}{SA \times DE}$. Dato igitur tempore periodico cylindri interioris, dabitur tempus periodicum particulæ cujusvis fluidi in cylindro quiescente. Quia verò AE, SA, & TA datæ sunt, erit TD ut $\frac{SD}{DE}$, hoc est, particularum fluidi tempora periodica sunt ut distantiæ ipsarum ab axe cylindri interioris directe & distantiæ earumdem à superficie cylindri quiescentis inversè.

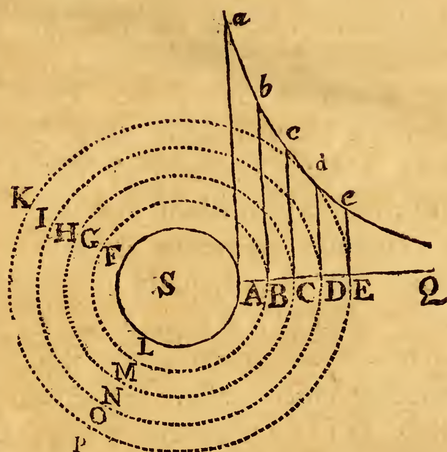
(l) * *Acquirant.* Patet per cor. 3.

(m) * *Quoadusque tempora periodica cylindri utriusque æquentur.* Tamdiu enim cylindrus interior atterit & urget fluidi partes, motumque ipsis eâ actione communicat qui ad cylindrum exteriorem transit, quamdiu omnium partium contiguarum motus angulares inæquales sunt, seu quamdiu tempora periodica non æquantur inter se.

PROPOSITIO LII. THEOREMA XL.

Si sphæra solida, in fluido uniformi & infinito, circa axem positione datum uniformi cum motu revolvatur, & ab hujus impulsu solo agatur fluidum in orbem; perseveret autem fluidi pars unaquæque uniformiter in motu suo: dico quod tempora periodica partium fluidi erunt ut quadrata distantiarum à centro sphæræ.

Cas. 1. Sit *AFL* sphæra uniformiter circa axem *S* in orbem acta, & circulis concentricis *BGM*, *GHN*, *DIO*, *EKP*, &c. distinguatur fluidum in orbes innumeros concentricos ejusdem crassitudinis. Finge autem orbes illos esse solidos; & quoniam homogeneum est fluidum, impressiones contiguorum orbium in se mutuo factæ, erunt (per hypothesin) ut eorum translationes ab invicem & superficies contiguæ in quibus impressiones fiunt. Si impressio in orbem aliquem major est vel minor ex parte concavâ quàm ex parte convexâ; prævalebit impressio fortior, & velocitatem orbis vel accelerabit vel retardabit, prout in eandem regionem cum ipsius motu vel in contrariam dirigitur. Proinde ut orbis unusquisque in motu suo perseveret uniformiter, debebunt impressiones ex parte utrâque sibi invicem æquari, & fieri in regiones contrarias. Unde cum impressiones sint ut contiguæ superficies & harum translationes ab invicem; erunt translationes inversè ut superficies, hoc (n) est, inversè ut quadrata distantiarum superficierum à centro. Sunt autem diffe-

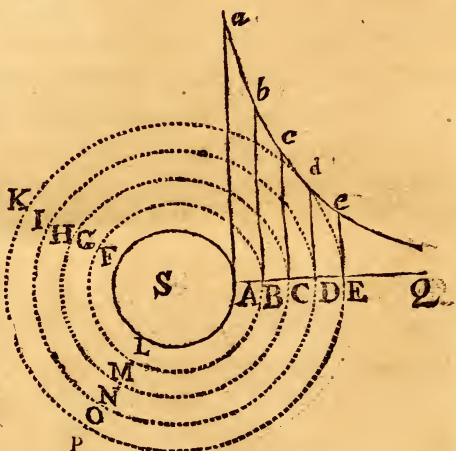


(n) * *Hoc est, inversè ut quadrata distantiarum superficierum à centro.* Nam superficies sphæricæ, ut pote similes, sunt ut quadrata radiorum seu distantiarum à centro.

327.

De Motu Corporum.

rentiæ motuum angularium circa axem ut hæ translationes applicatæ ad distantias, sive ut translationes directè & distantiæ inversè; hoc est, conjunctis rationibus ut cubi distantiarum inverse. Quare si ad rectæ infinitæ *SABCDEQ* partes singulas erigantur perpendicula *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, *Ee*, &c. ipsarum *SA*, *SB*, *SC*, *SD*, *SE*, &c. cubis reciprocè proportionalia, erunt summæ differentiarum, hoc est, motus toti angulares, ut respondentes summæ linearum *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, *Ee*: id est (si ad constituendum medium uniformiter fluidum, numerus orbium augeatur & latitudo minuatur in infinitum) ut areæ hyperbolicæ his summis analogæ *AaQ*, *BbQ*, *CcQ*, *DdQ*, *EeQ*, &c. Et tempora periodica motibus angularibus reciprocè proportionalia erunt etiam his areis reciprocè proportionalia. Est igitur tempus periodicum orbis cujusvis *DIO* reciprocè ut area *DdQ*, hoc est, per notas curvarum quadraturas, (o) directè ut quadratum distantiæ *SD*. (p) Id quod volui primò demonstrare.



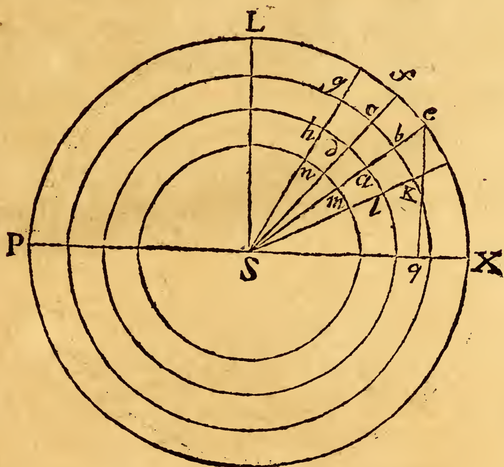
Cas.

(o) * *Directè ut quadratum distantiæ SD.* Areæ DdQ momentum est $Dd \times DE$; ideoque, ob ordinatam Dd cubo abscissæ SD reciprocè proportionalem, momentum illud est ut $\frac{DE}{SD^3}$, & propterea (per cas. 4. Lem. 2. libri hujus) area fluens DdQ est ut $\frac{1}{SD^2}$, quæ negativa prodit, quia non adjacet abscissæ DS, sed in plagam contrariam DQ vergit. Est igitur tempus periodicum orbis cujusvis DIO reciprocè ut $\frac{1}{SD^2}$, hoc est, directè ut quadratum distantiæ SD.

(p) * *Id quod volui primo demonstrare.* Casûs primi demonstratio valet, si medium sphæræ circumfusum ex innumeris orbibus solidis, tenuissimis ac concentricis constare fingatur. In casibus secundo & tertio singuli illi orbes sphærici in innumeros annulos, & annuli singuli in tenuissimas particulas, ad constituendum medium fluidum, dividuntur.

LIBER SECUND. SECT. IX. PROP. LII. THEOR. XL.

(q) *Cas.* 2. A centro sphæræ ducantur infinitæ rectæ quam plurimæ, quæ cum axe datos contineant angulos, æqualibus differentiis se mutuo superantes; & his rectis circa axem revolutis concipe orbes in annulos innumeros secari; & annulus unusquisque habebit annulos quatuor sibi contiguos, unum interiorem, alterum exteriorem & duos laterales. Attritu interioris & exterioris non potest annulus unusquisque, nisi in motu juxta legem casus primi facto, æqualiter & in partes contrarias urgeri. Patet hoc ex demonstratione casus primi. Et propterea annulorum series quælibet à globo in infinitum rectà pergens, movebitur pro lege casus primi, nisi quâtenus impeditur ab attritu annulorum ad latera. At in motu hâc lege facto attritus annulorum ad latera nullus est; neque ideo motum, quo minus hâc lege fiat, impediet. Si annuli qui à cen-



(q) * *Casus* 2. A centro sphæræ S ducantur rectæ quam plurimæ, longitudine infinitæ S k, S b, S c, S g &c., quæ æquales angulos k S b, b S c, c S g &c. complectantur; & his rectis circa axem P X revolutis & superficies conicas describentibus, concipe orbes in annulos innumeros secari. Nam cum superficies P f e X circa axem P X revolvitur, singuli arcus k b, b c, c g, e f, a l, &c. portiones superficierum sphæricarum annulares describunt, & particula quælibet ut b c d a, describit annulum solidum. Annulus unusquisque, ut ille qui revolutione superficiei a b c d describitur, habebit annulos quatuor sibi contiguos, unum interiorem ex revolutione figuræ m a d n, alterum exteriorem ex revolutione figuræ b e f c, & duos laterales ex revolutione figurarum k b a l & c g h d. Attritu interioris & exterioris non potest annulus unusquisque nisi in motu juxta legem Casûs primi facto, æqualiter & in partes contrarias urgeri. Alioquin partes fluidi non perseverarent in motu suo uniformiter, sed intermedius iste annulus (contra hyp.) in motu suo acceleraretur vel retardaretur, ut de orbibus integris ostensum est in Casu primo. *Et propterea annullorum series quælibet à globo in infinitum recta pergens* & inter duas proximas superficies conicas comprehensa, qualis est series annulorum quos figuræ m a d n, a b c d, b e f c &c. circa axem P X rotatæ describunt, *movebitur pro lege Casûs primi, nisi &c.*

327

DE MOTU CORPORUM.

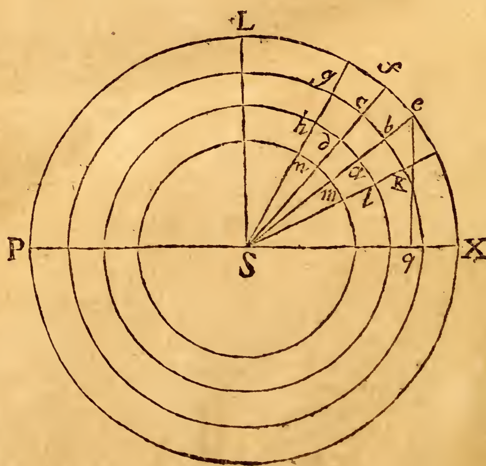
(r) centro æqualiter diſtant, vel citius revolverentur vel tardius (ſ) juxta polos quam juxta eclipticam; tardiores accelerarentur, & velociores retardarentur ab attritu mutuo, & ſic vergerent ſemper tempora periodica ad æqualitatem, pro lege caſus primi. Non impedit igitur hic attritus quo minus motus fiat ſecundum legem caſus primi, & propterea lex illa obtinebit: hoc eſt, annulorum ſingulorum tempora periodica erunt ut quadrata diſtantiarum ipſorum à centro globi. Quod volui ſecundò demonſtrare.

Caſ. 3. Dividatur jam annulus unuſquiſque ſectionibus tranſverſis in particulas innumeras conſtituentes ſubſtantiam abſolutè & uniformiter fluidam; & quoniam hæ ſectiones non ſpectant ad legem motus circularis, ſed ad conſtitutionem fluidi ſolummodo conducunt, perſeverabit motus circularis ut prius. His ſectionibus annuli omnes quam minimi aſperitatem & vim attritus mutui aut non mutabunt, (t) aut mutabunt æqualiter. Et manente cauſarum proportione manebit effectuum proportio, hoc eſt, proportio motuum & periodicorum temporum. *Q. E. D.* Cæterum cum motus circularis, & inde orta vis cen-

(r) * *Qui à centro æqualiter diſtant*, ſeu qui ſunt ex eodem orbe reſecti, quales ſunt annuli ex figurarum l k b a, a b c d, d c g h & revolutione deſcripti.

(ſ) * *Juxta polos X & P*, quam juxta æquatorem, quem recta S E ad axem P X perpendicularis rotata deſcribit.

(t) * *Aut mutabunt æqualiter.* Quoniam enim hæ Sectiones non niſi ad fluiditatem ſingulis annulis conciliandam factæ ſunt, & fluidum homogeneum ſupponitur; ſi inde mutetur annulorum aſperitas & vis attritus mutui, mutabitur æqualiter ſeu in data ratione. Et idcirco manente reſiſtentiarum & impreſſionum, quæ ex mutuo partium attritu oriuntur, proportione, manebit effectuum inde productorum proportio, hoc eſt, proportio motuum & periodicorum temporum; & propterea partium ſingularum tempora periodica erunt, ut in ſuperioribus caſibus, proportionalia quadratis diſtantiarum ipſarum à centro globi.



centrifuga, major (u) ſit ad eclipticam quam ad polos; debebit cauſa aliqua adeſſe quâ particulæ ſingulæ in circulis ſuis retineantur; ne materia, quæ ad eclipticam eſt, recedat ſemper à centro & per exteriora vorticis migret ad polos, indeque per axem ad eclipticam circulatione perpetuâ revertatur.

(x) *Corol.* 1. Hinc motus angulares partium fluidi circa axem globi, ſunt reciprocè ut quadrata diſtantiarum à centro globi, & velocitates abſolutæ reciprocè ut eadem quadrata applicata ad diſtantias ab axe.

Corol. 2. Si globus in fluido quieſcente ſimilari & infinito circa axem poſitione datum uniformi cum motu revolvatur, communicabitur motus fluido in morem vorticis, & motus iſte paulatim propagabitur in infinitum; neque prius ceſſabit in ſingulis fluidi partibus accelerari, quam tempora periodica ſingularum partium ſint ut quadrata diſtantiarum à centro globi.

Corol. 3. Quoniam vorticis partes interiores ob (y) majorem ſuam velocitatem atterunt & urgent exteriores, motumque ipſis eâ actione perpetuo communicant, & exteriores illi eandem motus quantitatem in alios adhuc exteriores ſimul tranſferunt, eâque actione (z) ſervant quantitatem motus ſui planè

(u) * *Major ſit ad eclipticam quam ad polos.* Quoniam particularum E & e in eodem orbe conſtitutarum tempora periodica æquantur, ipſarum vires centrifugæ ſunt inter ſe ut radii circulorum quos deſcribunt (per cor. 3. prop. 4. lib. 1.), hoc eſt, ut perpendiculares ad axem ES & eq. Vis igitur centrifuga eo major eſt, quo magis particula accedit ad æquatorem ſeu eclipticam SE, & in æquatore maxima eſt, in polo nulla.

(x) 328. * *Cor.* 1. Motus angulares ſunt reciproce ut tempora periodica (327), ideoque (ex demonſtratis) reciprocè ut quadrata diſtantiarum à centro globi. Velocitates abſolutæ particularum ſunt ut peripheriæ circulorum quas deſcribunt, ſeu ut ipſarum diſtantiæ ab axe directè, & tempora periodica inversè; & propterea ſunt ut diſtantiæ ab axe directè & quadrata diſtantiarum à centro globi inversè, ac proindè ſunt reciprocè ut eadem quadrata applicata ad diſtantias ab axe. Unde velocitates abſolutæ particularum in æquatore ſunt reciprocè ut ipſarum diſtantiæ à centro globi, & earum vires centrifugæ reciprocè ut cubi diſtantiarum à centro globi (per cor. 1. prop. IV. lib. 1.). 328.

(y) * *Ob majorem ſuam velocitatem &c.* Velocitates angulares orbium à centro globi minus diſtantium majores ſunt (per cor. 1.) quam velocitates angulares orbium exteriorum & à centro vorticis remotiorum; ſed orbes interiores exceſſu velocitatis angularis, quo relative ad orbes exteriores moventur, hos atterunt & urgent, *motumque ipſis* &c.

(z) * *Servant quantitatem motus ſui planè invariatam.* Quia (per hyp.) ea eſt vorticis conditio, ut unaquæque fluidi pars perſeveret in ſuo motu uniformiter, & in eâdem à centro diſtantia eodem

De Motu Corporum.

nè invariatam; patet quod motus perpetuo transfertur à centro ad circumferentiam vorticis, & per infinitatem circumferentiæ absorbetur. Materia inter sphæricas duas quasvis superficies vortici concentricas nunquam accelerabitur, eo quod motum omnem à materia interiore acceptum transfert semper in exteriorem.

Corol. 4. Proinde ad conservationem vorticis constanter in eodem movendi statu, requiritur principium aliquod activum, à quo globus eandem semper quantitatem motus accipiat, quam imprimit in materiam vorticis. Sine tali principio necesse est ut globus & vorticis partes interiores, propagantes semper motum suum in exteriores, neque novum aliquem motum recipientes, tardescant paulatim & in orbem agi desinant.

Corol. 5. Si globus alter huic vortici ad certam ab ipsius centro distantiam innataret, & interea circa axem inclinatione datum vi aliquâ constanter revolveretur; hujus motu raperetur fluidum in vorticem: & primo revolveretur hic vortex novus & exiguus unà cum globo circa centrum alterius, & interea latius serperet ipsius motus, & paulatim propagaretur in infinitum, ad modum vorticis primi. Et eâdem ratione, quâ hujus globus raperetur motu vorticis alterius, raperetur etiam globus alterius motu hujus, sic ut globi duo circa intermedium aliquod punctum revolverentur, seque mutuo ob motum illum circularem fugerent, nisi per vim aliquam cohibiti. Postea si vires constanter impressæ, quibus globi in motibus suis perseverant, cessarent, & omnia legibus mechanicis permitterentur, languesceret paulatim motus globorum (ob rationem in corol. 3. & 4. assignatam) & vortices tandem conquiescerent.

Corol. 6. Si globi plures datis in locis circum axes positione

dem semper tenore moveatur; & tamen, propter orbium interiorum majorem velocitatem angularem attritumque continuum, orbes exteriores perpetuo urgentur & ad motum accelerandum incitantur; necesse est ut motus perpetuo transferatur à centro ad circumferentiam vorticis & per infinitatem extimæ circumferentiæ absorbeatur. Quâ ratione fit ut orbium singulorum, qui eamdem motus quantitatem in alios exteriores simul & semper transferunt, idem fit perpetuo motus.

ne datos certis cum velocitatibus conſtanter revolverentur, fierent vortices totidem in infinitum pergentes. Nam globi ſinguli eâdem ratione quâ unus aliquis motum ſuum propagat in infinitum, propagabunt etiam motus ſuos in infinitum, adeo ut fluidi infiniti pars unaquæque eo agitetur motu qui ex omnium globorum actionibus reſultat. Unde vortices non definientur certis limitibus, ſed in ſe mutuo paulatim excurrent; globique per actiones vorticum in ſe mutuo, perpetuo movebuntur de locis ſuis, uti in corollario ſuperiore expoſitum eſt; neque certam quamvis inter ſe poſitionem ſervabunt, niſi per vim aliquam retenti. Ceſſantibus autem viribus illis quæ in globos conſtanter impreſſæ conſervant hoſce motus, materia ob rationem in corollario tertio & quarto aſſignatam, paulatim requieſcet & in vortices agi deſinet.

Corol. 7. Si fluidum ſimilare claudatur in vaſe ſphærico, ac globi in centro conſiſtentis uniformi rotatione agatur in vorticem, globus autem & vas in eamdem partem circa axem eundem revolvantur, ſintque eorum tempora periodica ut quadrata ſemidiametrorum: partes fluidi non prius perſeverabunt in motibus ſuis ſine acceleratione & retardatione, quam ſint eorum tempora periodica ut quadrata diſtantiarum à centro vorticis. Alia (a) nulla vorticis conſtitutio poteſt eſſe permanens.

Corol. 8. Si vas, fluidum incluſum, & globus ſervent hunc motum, & motu præterea communi angulari circa axem quemvis datum revolvantur; quoniam hoc motu novo non mutatur attritus partium fluidi in ſe invicem, non mutabuntur motus partium inter ſe. Nam tranſlationes partium inter ſe pendent ab attritu. Pars quælibet in eo perſeverabit motu, quo fit ut attritu ex uno latere non magis tardetur quam acceleretur attritu ex altero.

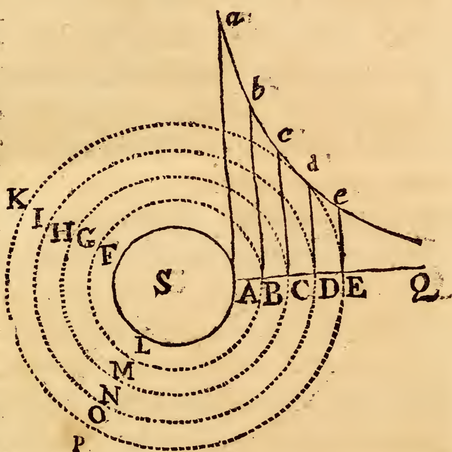
Corol. 9. (b) Unde ſi vas quieſcat ac detur motus globi, dabitur motus fluidi. Nam concipe planum tranſire per axem globi & motu contrario revolvi; & pone ſummam temporis re-

(a) * *Alia nulla vorticis conſtitutio poteſt eſſe permanens.* Nam (ex demonſtr.) ea debet eſſe vorticis conſtitutio, ut pars quælibet fluidi poſſit in ſuo motu uniformiter perſeverare, & ut attritu ex uno latere non magis tardetur quam acceleratur attritu ex altero latere. 328.

(b) * *Cor.* 9. Fluidum ſimilare in vaſe ſphærico EKP clauſum ita agatur in vorticem, ut tandem partes fluidi in motibus

DE MOTU CORPORUM. volutionis hujus & revolutionis globi esse ad tempus revolutionis globi, ut quadratum semidiametri vasis ad quadratum semidiametri globi: & tempora periodica partium fluidi respectu plani hujus erunt ut quadrata distantiarum suarum à centro globi.

tibus suis sine acceleratione & retardatione perseverent, quemadmodum in corollario 7. expositum est. In hâc hypothesi velocitates particularum in æquatore existentium sunt ut distantiæ à centro S inversè (328), & ideo ut SD ad SE, sive, ut peripheria DIO ad peripheriam EKP ita est peripheria EKP (quam particula E tempore suo periodico tE describit) ad spatium quod alia quævis particula D eodem tempore conficit, quod proinde spatium erit $\frac{EKP^2}{DIO}$. Quiescat jam vas sphæricum, hoc est, toti systemati vorticis auferatur vasis motus angularis, & particula D tempore tE describet spatium $\frac{EKP^2}{DIO} - DIO$. Sed hoc spatium est ad circumferentiam DIO, aut quod idem est, $SE^2 - SD^2$ est ad SD^2, ut tempus tE ad tempus periodicum (TD) particulæ D in vase quiescente; quod proinde tempus erit $\frac{SD^2 \times tE}{SE^2 - SD^2}$. Et simili modo tempus periodicum particulæ A, quod dicatur TA, erit in vase quiescente $\frac{SA \times tE}{SE^2 - SA^2}$. Si itaque detur motus globi, seu tempus periodicum TA, dabitur tempus $tE = \frac{TA \times [SE^2 - SA^2]}{SA^2}$, & inde dabitur tempus periodicum $TD = \frac{SD^2 \times tE}{SE^2 - SD^2} = \frac{SD^2 \times TA \times [SE^2 - SA^2]}{SA^2 \times [SE^2 - SD^2]}$. Si igitur vas quiescat ac detur motus globi, dabitur motus fluidi ad quamlibet datam à centro distantiam. Concipe nunc planum transire per axem globi & motu contrario revolvi; & pone summam temporis revolutionis hujus & revolutionis globi esse ad tempus revolutionis globi, ut quadratum semidiametri vasis ad quadratum semidiametri globi; sive pone SA^2 ad SE^2 ut TA ad quartum, quod erit $\frac{SE^2 \times TA}{SA^2} = \frac{SE^2 \times tE}{SE^2 - SA^2}$; & tempus periodicum plani erit $\frac{SE^2 \times tE}{SE^2 - SA^2} - \frac{SA^2 \times tE}{SE^2 - SA^2} = tE$, quia $TA = \frac{SA^2 \times tE}{SE^2 - SA^2}$. Quare planum, quo hic utitur Newtonus, ita movetur ut revolutionem suam absolvat eodem tempore tE, quo vas suam revolutionem perficit in hyp. cor. 7. Sit X tempus periodicum particulæ D respectu plani in vase quiescente; & quia planum & vortex in regiones contrarias moventur, erit TD ad X ut circumferentia DIO, quam particula D tempore periodico TD describit, ad ejusdem circumferentiæ partem quam eadem particula tempore X percurrit; & ideo pars illa erit $\frac{X \times DIO}{TD} = \frac{X \times DIO \times [SE^2 - SD^2]}{SD^2 \times tE}$, & pars residua circumferentiæ DIO, quam planum eodem tempore X conficit, erit $DIO - \frac{DIO \times X}{TD} = \frac{SD^2 \times DIO \times tE - X \times DIO \times [SE^2 - SD^2]}{SD^2 \times tE}$. Quia verò planum tempore tE uniformi motu revolutionem suam DIO absolvit, est



Corol. 10. Proinde si vas vel circa axem eundem cum globo, vel circa diversum aliquem datâ cum velocitate quâcunque moveatur, dabitur motus fluidi. Nam si systemati toti auferatur vasis motus angularis, manebunt motus omnes iidem inter se qui prius, per corol VIII. Et (c) motus isti per corol. IX. dabuntur.

Corol. 11. Si vas & fluidum quiescant & globus uniformi cum motu revolvatur, propagabitur motus paulatim per fluidum totum in vas, & circumagetur vas nisi violenter detentum, neque prius desinent fluidum & vas accelerari, quam sint eorum tempora periodica æqualia temporibus periodicis globi. Quod

est tE ad X ut DIO ad spatium modo inventum, seu ut $SD^2 \times tE$ ad $SD^2 \times tE - X \times [SE^2 - SD^2]$; unde habetur $SD^2 \times X \times tE = SD^2 \times tE^2 - X \times tE \times [SE^2 - SD^2]$, & ideo $SE^2 \times X = SD^2 \times tE$, ac proinde tempus $X = \frac{SD^2 \times tE}{SE^2}$. Cum ergo tE & SE sint quantitates datæ, tempus periodicum X particulæ fluidi D respectu plani prædicti est ut SD^2, sive ut quadratum distantiæ à centro globi. Et quia omnium particularum in eodem orbe constitutarum tempora periodica æquantur inter se; earum omnium tempora periodica respectu plani sunt ut quadrata distantiaum suarum à centro globi. Q. E. D.

(c) * *Et motus isti per cor. 9. dabuntur*, proindeque si cum iis motibus datis componatur vasis motus angularis datus, dabitur motus fluidi in vase data cum velocitate moto.

PROBLEMA.

319. Sphæra solida in fluido infinito & in eâdem à centro distantiâ similari, sed in diversis distantiis in datâ quâvis distantiarum ratione inæqualiter denso circà axem positione datum uniformi cum motu revolvatur & à sphæræ impulsu solo agatur fluidum in orbem, perseveret autem fluidi pars unaquæque uniformiter in motu suo, sitque resistentia quæ oritur ex defectu lubricitatis partium fluidi, cæteris paribus, in ratione compositâ ex ratione quâlibet densitatis & ratione etiam quâcumque velocitatis relativæ, oportet invenire tempora periodica partium fluidi.

Distinguatur fluidum in orbes innumeros concentricos ejusdem crassitudinis ut in demonstratione prop. 52. factum est; dicanturque $AD = x$, fluidi densitas in loco $D = z$, translatio orbium ab invicem tempore dato $= v$, densitas z sit proportionalis dignitati x^n, & resistentia, cæteris paribus, sit ut $z^m v^p$, seu ut $x^{mn} v^p$. Quia superficies sphærica DIO, est ut x^2, erit impressio orbis DIO, in orbem contiguum, ut $x^{2+mn} v^p$; sed ut orbis unusquisque in motu suo uniformiter perseveret, debent impressiones ex parte utrâque sibi invicem æquari & fieri in regiones contrarias, ac proindè quantitas $x^{2+mn} v^p$, debet esse constans. Quarè erit v^p ut $\frac{1}{x^{2+mn}}$, & v ut $\frac{1}{x^{\frac{2+mn}{p}}}$. Sunt autem differentiæ motuum angularium circà axem ut translationes orbium applicatæ ad distantias, hoc est, ut $\frac{v}{x}$, sive ut $\frac{1}{x^{\frac{2+mn}{p}+1}}$. Sit jam $DE = dx$, & ordinata Dd, ad curvam abde, sit ut $\frac{1}{x^{\frac{2+mn}{p}+1}}$ erit sum-

De Motu Corporum.

Quod si vas vi aliquâ detineatur, vel revolvatur motu quovis constanti & uniformi, deveniet medium paulatim ad statum motus in corollariis VIII. IX. & X. definiti, nec in alio unquam statu quocunque perseverabit. Deinde vero si, viribus illis cessantibus, quibus vas & globus certis motibus revolvebantur, permittatur systema totum legibus mechanicis; vas & globus in se invicem agent mediante fluido, neque motus suos in se mutuo per fluidum propagare prius cessabunt, quam eorum tempora periodica æquentur inter se; & systema totum ad instar corporis unius solidi simul revolvatur.

Scho-

ma differentiarum, hoc est, motus totus angularis ut area D d Q, quæ est ut S. $\frac{dx}{x^{\frac{2+mn}{p}+1}} = -\frac{p}{2+mn} \times \frac{1}{x^{\frac{2+mn}{p}}}$; & tempora periodica motibus angularibus reciprocè proportionalia, sunt ut $x^{\frac{2+mn}{p}}$, neglectâ quantitate constante $\frac{p}{2+mn}$. Q. E. I.

330. Cor. 1. Si resistentia, cæteris paribus, sit ut velocitas, & tempora periodica sint in ratione sesquiplicatâ distantiarum à centro, erit $p=1$, & $\frac{2+mn}{p} = \frac{3}{2}$, ideóque $n = -\frac{1}{2m}$. Sed cum resistentia proportionalis supponatur densitatis dignitati cujus index est m, & crescente densitate crescat, necesse est ut m sit numerus positivus, ac proindè n numerus negativus. Quarè densitas, ut pote proportionalis dignitati x^n, crescente distantiâ in hypothesi corollarii hujus decrescet. Hoc autem repugnat. Nam materia vorticis eò densior esse debet quò longius distat à centro. Conatur enim materia per motum suum circularem recedere ab axe vorticis & propterea premit materiam omnem ulteriorem, eamque condensat, si condensari possit. Prætereà velocitas absoluta partium fluidi in æquatore vorticis est ut earum distantia à centro globi directè & tempus periodicum inversè, hoc est, in hypothesi cor. hujus ut $\frac{x}{x^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$, ideóque vis centrifuga partium (per cor. 1. prop. 4. lib. 1.) cæteris paribus est ut $\frac{1}{xx}$, & proindè decrescit in ratione duplicatâ distantiæ auctæ. Ut igitur vortex ad statum permanentem reducatur, oportet ut partes densiores à centro recedant & rariores ad illud accedant, quo vis centrifuga partium centro propiorum, quæ ob majorem velocitatem & minorem distantiam nimia est per minorem densitatem minuatur.

331. Cor. 2. Si tempora periodica sint in ratione sesquiplicatâ distantiarum à centro, hoc est, si $\frac{2+mn}{p} = \frac{3}{2}$, erit $p = \frac{4+2mn}{3}$, & ideò resistentia, cæteris paribus, ut velocitatis dignitas cujus exponens est $\frac{4+2mn}{3}$. Sed (ex dem. cor. 1.) m & n sunt numeri positivi. Quarè tempora periodica non possunt esse in ratione sesquiplicatâ distantiarum à centro, quin index $\frac{4+2mn}{3}$ sit unitate major, & quin proindè resistentia, cæteris paribus, in majori ratione crescat quam in ratione velocitatis auctæ.

332. Cor. 3. Si spatium quo vortex continetur sit ubique plenum & propterea medii densitas uniformis supponatur, lit-

tera

Scholium.

In his omnibus ſuppono fluidum ex materiâ quoad denſitatem & fluiditatem uniformi conſtare. Tale eſt in quo globus idem eodem cum motu, in eodem temporis intervallo, motus ſimiles & æquales, ad æquales ſemper à ſe diſtantias, ubivis in fluido conſtitutus, propagare poſſit. Conatur quidem materia per motum ſuum circularem recedere ab axe vorticis, & propterea premit materiam omnem ulteriorem. Ex hâc preſſione fit attritus partium fortior & ſeparatio ab invicem difficilior; & per conſequens diminuitur materiæ fluiditas. Rurſus ſi partes fluidi ſunt alicubi craſſiores ſeu majores, fluiditas ibi minor erit, ob pauciores ſuperficies in quibus partes ſeparentur ab invicem. In hujuſmodi caſibus deficientem fluiditatem vel lubricitate partium vel lentore aliâve aliquâ conditione reſtitui ſuppono. Hoc niſi fiat, materia ubi minus fluida eſt magis cohærebit & ſegnior erit, ideoque motum tardius recipiet & longius (d) propagabit quam pro ratione ſuperius aſſignatâ. Si

tera z quæ denſitatem exponebat, ſignificet jam fluiditatis defectum, ſitque reſiſtentia, cæteris paribus, ut dignitas z^m. His poſitis oſtendetur ut in cor. 1. & 2. factum eſt, quod ſi tempora periodica ſtatuantur in ratione ſeſquiplicatâ diſtantiarum à centro, materia vorticis eò fluidior erit quò longius diſtat à centro, vel reſiſtentia augebitur in majori ratione quam ea eſt in quâ velocitas relativa augetur.

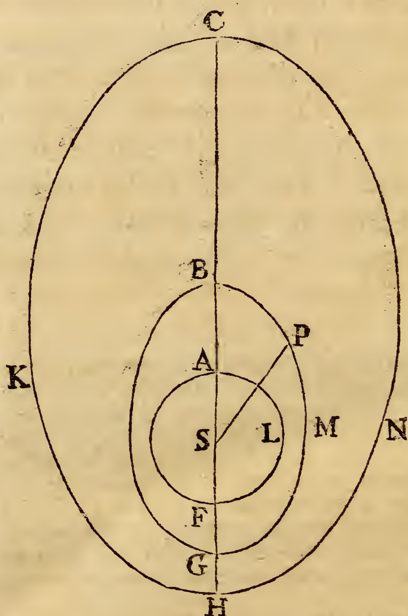
333. Cor. 4. Si reſiſtentia, cæteris paribus, augeatur in ratione minore quam in ratione velocitatis, hoc eſt, ſi index p, ſit unitate minor, erit $\frac{2+mn}{p}$ binario major, & proinde tempora periodica partium vorticis erunt in majori ratione quam duplicatâ ratione diſtantiarum à centro. Nam vel eſt $mn = o$, quod contingit dùm eadem eſt ubique fluidi denſitas ac fluiditas, vel mn, eſt numerus poſitivus, quia defectus fluiditatis vel denſitas, auctis diſtantiis à centro augetur (per cor. 1.). 333.

(d) * *Et longius propagabit quam pro ratione ſuperiùs aſſignatâ.* In ſuperioribus demonſtrationibus Newtonus ſuppoſuit fluidum homogeneum eſſe & preſſionem ubique æqualem; ſi verò in diverſis à vorticis centro diſtantiis aliqua ſit partium fluidi aut preſſionis inæqualitas, minorem vel majorem fluiditatem inde ortam, vel lubricitate partium vel lentore aliâve aliquâ conditione ad æqualitatem reſtitui ſupponit, ut vortex in eodem ſtatu juxtà leges præſcriptas, permaneat. Hoc niſi fiat, materia ubi minus fluida eſt, magis cohærebit & ſegnior erit, ideóque motum à globo centrali communicatum difficiliùs ac tardiùs, cæteris paribus, recipiet; ſed illum longiùs propagabit. Nam ſi vorticis partes ità inter ſe & cum globo cohærerent, ut nullâ vi poſſent ſeparari, non poſſet globus centralis circumvolvi, quin materia tota vorticis, tanquam

Si figura (e) vasis non sit sphærica, movebuntur particulæ in lineis non circularibus sed conformibus eidem vasis figuræ, & tempora periodica erunt ut quadrata mediocrium distantiarum à centro quam proximè. In partibus inter centrum & circumferentiam, ubi latiora sunt spatia, tardiores erunt motus, ubi angustiora velociores, (f) neque tamen particulæ velociores petent circumferentiam. Arcus enim describent minus curvos, & conatus recedendi à centro non minus diminuetur per decrementum hujus curvaturæ, quam augebitur per incrementum velo-

quam vectis rigidus, simul circumvolveretur. Undè quò magis partes illæ cohærent, eò longiùs motum à globo centrali acceptum propagant. Et ideò etiamsi materia vorticis homogenea non sit, & pressio inæqualis supponatur, vim suam obtinent difficultates, quas contrà vorticum in naturâ possibilitatem Newtonus proposuit in cor. 2. 4. 5. & 6. prop. 52.

(e) * *Si figura vasis non sit sphærica.* Sit CNHK, figura vasis in quo fluidum solo sphæræ ALF impulsu agatur in orbem, & particulæ fluidi quæ vasis superficiem CNHK, contingunt, movebuntur in lineis non circularibus, sed conformibus eidem vasis figuræ, particulæ verò quæ sphæræ ALF proximæ sunt, circulos describent. Undè quò magis particulæ fluidi à sphærâ centrali distant, eò magis orbitarum quas describunt, figura à circulari differt & ad vasis figuram accedit. Quia verò particularum circulos describentium tempora periodica erant (prop. 52.) ut quadrata distantiarum à centro S; erunt in hoc vase ut quadrata mediocrium distantiarum quam proximè. Sic particulæ P orbitam BPGB describentis tempus periodicum erit quam proximè ut quadratum distantiæ PS, quæ est media arithmetica inter distantiam maximam BS, & minimam SG, sivè erit ut tempus periodicum particulæ P, circulum describentis, cujus radius PS. Nam tempus periodicum, cæteris paribus, crescit ut velocitas absoluta decrescit; sed cum vortex supponatur esse in statu permanenti, & eadem proindè materiæ quantitas per latiora spatia ut CA, & per angu-



stiora ut FH, simul transeat; oportet ut materiæ velocitas in spatiis latioribus minuatur, & in angustioribus augeatur. Quo fit ut particula P, eodem ferè tempore describat orbitam BPGB, quo velocitate mediocri describeret circulum cujus esset radius PS.

(f) * *Neque tamen particulæ velociores.* Nam vortex non potest esse in statu permanenti quin particula P, in spatiis angustioribus LN, FH, ad centrum S acce-

velocitatis. Pergendo à ſpatiis anguſtioribus in latiora recedent paulo longius à centro, ſed iſto receſſu tardeſcent; & accedendo poſtea de latioribus ad anguſtiora accelerabuntur, & ſic per vices tardeſcent & accelerabuntur particulæ ſingulæ in perpetuum. (g) Hæc ita ſe habebunt in vaſe rigido. Nam in fluido infinito conſtitutio vorticum innoteſcit per propoſitionis hujus corollarium ſextum.

Proprietates autem vorticum hâc propoſitione inveſtigare conatus ſum, ut pertentarem ſiquâ ratione phænomena cœleſtia per vortices explicari poſſint. Nam phænomenon eſt, quod planetarum circa jovem revolventium tempora periodica ſunt in ratione ſeſquiplicatâ diſtantiarum à centro jovis; & eadem regulà obtinet in planetis qui circa ſolem revolvuntur. Obtinent autem hæ regulæ in planetis utriſque quam accuratiſſimè, quâtenus obſervationes aſtronomicæ hactenus prodidêre. Ideoque ſi planetæ illi à vorticibus circa jovem & ſolem revolventibus deferantur, debebunt etiam hi vortices eâdem lege revolvi. Verum tempora periodica partium vorticis prodierunt in ratione duplicatâ diſtantiarum à centro motus: neque poteſt ratio illà diminui & ad rationem ſeſquiplicatam reduci, (h) niſi vel materia vorticis eo fluidior ſit quo longius diſtat à centro, vel reſiſ-

accedat; & ideò neceſſe eſt ut in iiſdem ſpatiis conatus recedendi à centro minùs augeatur per incrementum velocitatis, quam diminuitur per decrementum curvaturæ. Eſt enim vis quâ particula P, in loco G, nititur à circumferentiâ MG recedere ut quadratum velocitatis particulæ directè & radius circuli curvam oſculantis in G, inversè (cor. 1. prop. 4. & not. 121. lib. 1.).

(g) * *Hæc ità ſe habebunt*, in vaſe rigido aut in ſpatio aliis vorticibus circumdato, quo tanquam vaſe, juxtà Carteſii opinionem materia vorticis continetur. Ex his autem Newtoni obſervationibus ſequitur. 1°. Planetarum qui circà Carteſiani vorticis centrum eâdem lege cum vorticis partibus moventur, orbitas eò magis ad circuli figuram accedere debere quo centro vorticis propiores ſunt, & propterea excentricitatem orbitæ Mercurii longè minorem eſſe excentricitate orbitæ Saturni & omnium ſuperiorum planetarum; contrà obſervationes aſtronomicas. Sequitur 2°. in Carteſianâ hypotheſi explicari non poſſe cur planetæ ellipſes accuratas, non verò circulos aut irregulares figuras deſcribant. Sequitur 3°. omnium orbitarum aphelia & perihelia à ſole ſpectata in iiſdem inter fixas locis eſſe poſita atque immota manere; cum tamen ex obſervationibus aſtronomicis certum ſit, planetarum aphelia à ſe invicem longè diſtare & lento motu agi. 333.

(h) * *Niſi vel materia vorticis eò fluidior ſit.* (Per not. 332.).

resistentia, quæ oritur ex defectu lubricitatis partium fluidi, ex auctâ velocitate quâ partes fluidi separantur ab invicem, augeatur in majore ratione quam ea est in quâ velocitas augetur. Quorum tamen neutrum rationi consentaneum videtur. Partes crassiores & minus fluidæ, nisi graves sint in centrum, (i) circumferentiam petent; & verisimile est quod, etiamsi demonstrationum gratiâ hypothesin talem initio sectionis hujus proposuerim, ut resistentia velocitati proportionalis esset, tamen (k) resistentia in minori sit ratione quam ea velocitatis est. Quo (l) concesso, tempora periodica partium vorticis erunt in majori quam duplicatâ ratione distantiarum ab ipsius centro. Quod si vortices (uti aliquorum est opinio) celerius moveantur prope centrum, dein tardius usque ad certum limitem, tum denuo celerius juxta circumferentiam; certe nec ratio sesquiplicata neque alia quævis certa ac determinata obtinere potest. (m) Viderint itaque philosophi quo pacto phænomenon illud rationis sesquiplicatæ per vortices explicari possit.

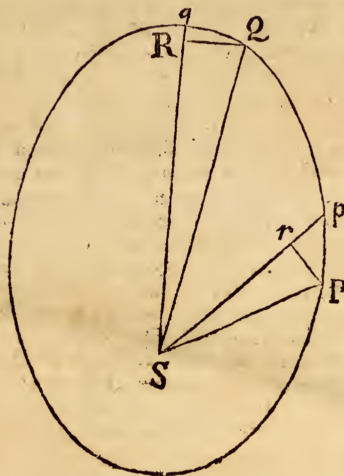
(i) * *Circumferentiam petent.* Id experientiâ constat; nam si aqua in vase contenta in vorticem agatur, paleæ & alia corpuscula minùs fluida petunt circumferentiam.

(k) * *Tamen resistentia in minori sit ratione.* (Vid. ultimam not. in hoc schol.).

(l) * *Quo concesso.* (per not. 333.).

(m) * *Viderint itaque philosophi.* Difficultas crescit, si tria simul conjungantur quæ primus omnium Keplerus mirâ sagacitate ex observationibus Astronomicis deduxit. Primum est, planetas in ellipsibus, quarum umbilicum sol occupat, revolutiones suas peragere. Secundum est planetas singulos radiis ad solem ductis, & satellites radiis ad suum primarium ductis, areas describere temporibus proportionales. Tertium est, tempora periodica planetarum circà solem & satellitum circà primarium suum esse in ratione sesquiplicatâ distantiarum à centro sui motûs. Ex hâc proportione colligitur planetarum velocitates in mediocribus distantiis ab umbilico communi esse reciprocè in ratione subduplicatâ distantiarum illarum. Sint enim D, & d, mediocres planetarum distantiæ T & t, eorum tempora periodica, & quoniam in singulis planetarum orbitis parva est distantiæ maximæ & minimæ differentia, si conferatur cum differentiâ quæ inter distantias duorum planetarum intercedit, spatia temporibus T & t, descripta erunt quam proxime ut distantiæ D & d; unde velocitates erunt ut $\frac{D}{T}$ & $\frac{d}{t}$, hoc est, ut $\frac{D}{D^{\frac{3}{2}}}$, & $\frac{d}{d^{\frac{3}{2}}}$, sivè ut $\frac{1}{D^{\frac{1}{2}}}$ & $\frac{1}{d^{\frac{1}{2}}}$, seu in subduplicatâ ratione mediocrium distantiarum inversè, in quâ etiam ratione sunt velocitates partium vorticis circularis in distantiis D & d, à sole (per prop. 53.). Verùm per alteram analogiam, arearum scilicet & temporum, velocitates partium vorticis circularis sunt in ratione simplici distantiarum à sole reciprocè. Nam si planeta P, orbitam ellipticam PQqp describat & radiis ad umbilicum S ductis areas æquales SPp, SQq, tempusculo dato ver-

rat, centro S & radiis SP, SQ describantur arcus circulares quam minimi Pr, QR, qui radiis SP, Sq, occurrant in r, & R, erit area SPp=SP×Pr =SQq=SQ×QR, & hinc Pr:QR =SQ:SP. Sed Pr & QR sunt ut spatia circularia eodem tempore descripta ideóque ut velocitates circulares partium vorticis in P, & Q; Quarè velocitates illæ sunt in ratione inversâ distantiarum. Porrò quam difficile sit ab his aliisque contradictionibus hypothesim vorticum liberare, ex variis hâc de re eruditorum Dissertationibus satis manifestum est. Vid. Leibnitii tentamen de motuum cælestium causis, Villemotii opus de vorticibus; Illustrissimi Marchionis Poleni dialogum de eâdem materiâ; Dissertationes Celeber. Virorum Saurini in Comm. Acad. Reg. Scient. an. 1709., Bulffingeri de causâ gravitatis, Joan. Bernoullii Cogitationes novas de Systemate Cartesii, ejusdem Physicam Cœlestem inter Academiæ Præmia, Domini De Molieres Lectiones Physicas.



Illustrium Authorum qui vorticum hypothesim strenue vindicarunt, varias hâc de re Dissertationes hic percurrere nimis longum foret, nec tantas componere lites nostrum est. Eam enim Newtonus sibi vel maximè impugnandam assumit vorticum hypothesim quam Cartesius ipse constituerat, natasque post primi autoris mortem hujus systematis emendationes quam plurimas saltem directè non petit. At silentio prætermittere non licet Dissertationem Doctissimi Viri Joan. Bernoullii ab Academiâ Regiâ Paris. præmio condecoratam cui titulus est: Cogitationes novæ de Systemate Cartesii. Existimat Clariss. Autor superiorum propositionum demonstrationes mero sophismate laborare, eò quod Newtonus orbium contiguorum & sese mutuò atterentium impressionem solùm definierit ex superficierum magnitudine & velocitate relativâ quâ ab invicem separantur; earum verò superficierum pressionem minimè consideraverit, vimque vectis neglexerit quæ, cæteris paribus, major est in majoribus rotis & minor in minoribus. Verùm licet in suis demonstrationibus pressionem ubique æqualem supposuerit Newtonus, hujus tamen pressionis inæqualitatem in scholio consideravit, & quid ex illâ sequatur, generatim ostendit. Vim quidem vectis prorsùs neglexit, & meritò quidem, quantùm intelligere possumus. Quamvis enim in vecte rigido cujus partes simul eodem motu angulari circà hypomoclion revolvuntur, eò major sit efficacia quo cæteris paribus longior est vectis; quod videlicet vectis partes eò celeriùs moveantur, quò major est earum ab hypomoclio distantia, id tamen ad partes medii fluidi quæ circà centrum aliquod revolvuntur, non videtur transferendum. Et licet Newtonus orbes solidos, demonstrationis gratiâ, primùm fingat, eos tamen divisos supponit ac deinde in particulas innumeras subdividit ut demonstratio ad naturam medii fluidi accommodetur. Quod si ob qualemcumque partium fluidi cohæsionum, aliqua habenda sit ratio vis vectis, certè ea non videtur assumenda distantiæ à vorticis centro proportionalis, quemadmodùm fit in vecte perfectè rigido, seu cujus partes vi quasi infinitâ connexæ supponuntur & eodem motu angulari revolvuntur. 333.

Cæterùm Celeber. Joan. Bernoulli aliam usurpat hypothesim quæ Mechanicis perspecta nondùm est certóque explorata. Supponit enim cum D. Amontons in monum. Paris. an. 1699. resistentiam quæ oritur ex frictione superficierum contiguarum utcumque inæqualium, manente earum-

De Motu Corporum.

dem in sese mutuò pressione, constantem esse; verùm hypothesis illa minùs placuit Clariss. Wolfio qui de eâ his verbis loquitur in elementis mechanices num. 955.: Equidem Amontons regulam universalem dedit computandi vim ad frictionem in dato quolibet casu superandam; sed cum omnem frictionem à solâ appressione ex pondere superincedentis derivet, ex antecedentibus satis apparet quod proposito satisfacere nequeat: veram frictionis legem accuratissimis experimentis tentarunt Celeber. Philosophi Desaguillier & Musshenbroek; At eam haud satis constantem observarunt, ut patet ex iis quas Musshenbroek tom. 1. Physices descripsit experimentorum tabulis. Nil ergò certi hâc de re pronuntiari potest. Newtonus tamen conjecturam fecit resistentiam in minori esse ratione quam ea velocitatis est, eo forsan ductus argumento quod in Historiâ Acad Reg. an. 1709. hoc ferè modo exponitur: si concipiantur superficies innumeris eminentiis asperæ, dum alia super aliam incedit, superficiei superioris eminentiæ intrà cavitates inferioris, dato tempore, pressionis vi penettant, fitque resistentia major, si intrà superficiei inferioris cavitates altiùs ingrediantur superficiei superioris eminentiæ, at verò si major sit velocitas, superior superficies intrà inferiorem eodem dato tempore minùs penetrat. Hinc si Clariss. Parentii ratio valeat, satis patet resistentiam in minori esse ratione quam ea velocitatis est. Attamen Clariss. Muschembroek, factis experimentis, resistentiam velocitati proportionalem in motibus tardioribus invenit, in celerioribus verò eam in majori quam velocitatis ratione observavit.

Assumit D. Bernoullius impressiones orbium contiguorum in se mutuò factas, esse in ratione compositâ ex ratione summæ virium centrifugarum orbium omnium inferiorum ad centrum usquè vorticis, ex ratione velocitatis quâ orbes contigui ab invicem separantur, & ex ratione distantiæ orbium illorum à centro; undè per analysim deducit tempora periodica partium vorticis sphærici homogenei esse in ratione radicum cubicarum dignitatis quintæ distantiarum à centro; earum verò celeritatem sub æquatore esse reciprocè in ratione radicis cubicæ quadrati distantiarum à centro. Si in hypothesi Bernoullii negligatur vis vectis, eodem calculo quo usus est, tempora periodica inveniuntur proportionalia radicibus cubicis dignitatis quartæ distantiarum à centro; Si verò supponamus impressiones orbium in se mutuò factas, esse in ratione compositâ ex ratione pressionum, ratione velocitatum relativarum & ratione superficierum, tempora periodica Bernoulliano calculo inveniuntur quadratis distantiarum proportionaliæ, uti Newtonus per suam hypothesim invenerat; & si cum his tribus rationibus componatur ratio distantiæ à centro ut vis vectis exprimatur, tempora periodica reperiuntur proportionalia radicibus cubicis dignitatis septimæ distantiarum à centro. Hæ verò analogiæ omnes à regulâ illâ Keplerianâ, quâ tempora periodica statuuntur esse in ratione sesquiplicatâ distantiarum, dissentiunt. Ut ergò vorticis sphærici leges cum Kepleri Sancitis conciliet Bernoullius, supponit densitatem vorticis esse in ratione subduplicatâ distantiæ centro reciprocè, planetas verò non esse ejusdem prorsus densitatis cum medio fluido in quo primùm collocati sunt, ideóque ob majorem vel minorem suam densitatem in eo medio succesivè descendere & ascendere, intereadùm circulari motu vorticis abripiuntur, ex quibus motibus simul compositis nascuntur ellipticæ planetarum trajectoriæ & apheliorum lentissimi motus. Sed medium illud in quo planeta, cum densior est, descendit & ubi rarior est, ascendit, vel grave est in centrum vorticis vel non. Si grave non sit, planeta in medio rariori positus, eodemque cum medio illo gyrationis motu actus, majori vi à centro recedere & spiralem trajectoriam describendo in infinitum abire debet; & contrà, planeta in medio densiori primùm collocatus, ad centrum per spiralem lineam perpetuò accederet, quod medii densioris major esse debeat vis centrifuga quam planetæ rarioris. Si medium grave sit in centrum vorticis, ipsiusque densitas, decrescentibus distantiis à centro, crescat, cælestis materiæ densitas, ob parvam orbitarum quas planetæ describunt, excentricitatem, æqualis assumi potest densitati cujusque planetæ huic materiæ innatantis; atque adeò densitas cælestis materiæ ad distantiam saturni æqualis erit densitati saturni, ad distantiam Jovis, Mar-

tis

PROPOSITIO LIII. THEOREMA XLI.

Corpora, quæ in vortice delata in orbem redeunt, ejusdem sunt densitatis cum vortice, & eâdem lege cum ipsius partibus quoad velocitatem & cursus determinationem moventur.

Nam si vorticis pars aliqua exigua, cujus particulæ seu puncta physica datum servant situm inter se, congelari supponatur: hæc, quoniam neque quoad densitatem suam, neque quoad vim insitam aut figuram suam mutatur, movebitur eâdem lege ac prius: & contra, si vorticis pars congelata & solida ejusdem sit densitatis cum reliquo vortice, & resolvatur in fluidum, movebitur hæc eâdem lege ac prius, nisi quâtenus ipsius particulæ jam fluidæ factæ moveantur inter se. Negligatur igitur motus particularum inter se, tanquam ad totius motum progressivum nil spectans, & motus totius idem erit ac prius. Motus autem idem erit cum motu aliarum vorticis partium à centro æqualiter distantium, propterea quod solidum in fluidum resolutum fit pars vorticis cæteris partibus consimilis. Ergo solidum, si sit ejusdem densitatis cum materia vorticis, eodem motu cum ipsius partibus movebitur, in materiâ proximè ambiente relativè quiescens. Sin densius sit, (n) jam magis conabitur recedere à centro vorticis quam prius; ideoque vorticis vim illam, quâ prius in orbitâ suâ tanquam in æquilibrio constitutum retinebatur, jam superans, recedet à centro & revol-

tis &c. æqualis erit densitati horum planetarum & omnes illæ densitates erunt inter se in ratione subduplicatâ distantiarum à sole reciprocè. Si itaquè telluris densitas mediocris æqualis supponatur densitati aquæ, materia cœlestis inter solem & tellurem constituta aquâ densior erit & corporum motui maximè resistet. Sed ut ex cometarum motibus, aliisque observationibus constat, materia cælestis inter solem & tellurem motui corporum minimè resistit. Nam cometarum motus sunt summè regulares, & easdem leges cum planetarum motibus observant, & in omnes cæli plagas liberrimè feruntur, atque ad solem usquè ferè penetrant sinè resistentiâ.

(n) * *Jam magis conabitur.* Nam vis centrifuga motrix, cæteris paribus, augetur vel minuitur in ratione quantitatis materiæ (per def. 8. lib. 1.) & materiæ quantitas, dato corporis volumine, augetur vel minuitur in ratione densitatis (2. lib. 1.).

DE MOTU CORPORUM.

volvendo deſcribet ſpiralem, non amplius in eundem orbem rediens. Et eodem argumento ſi rarius ſit, accedet ad centrum. Igitur non redibit in eundem orbem niſi ſit ejuſdem denſitatis cum fluido. Eo autem in caſu oſtenſum eſt, quod revolveretur eâdem lege cum partibus fluidi à centro vorticis æqualiter diſtantibus. *Q. E. D.*

Corol. 1. Ergo ſolidum quod in vortice revolvitur & in eundem orbem ſemper redit, relativè quieſcit in fluido cui innatat.

Corol. 2. Et ſi vortex ſit quoad denſitatem uniformis, corpus idem ad quamlibet à centro vorticis diſtantiam revolvi poteſt.

Scholium.

Hinc liquet planetas à vorticibus corporeis non deferri. Nam planetæ ſecundum hypotheſin *Copernicæam* circa ſolem delati revolvuntur in ellipſibus umbilicum habentibus in ſole, & radiis ad ſolem ductis areas deſcribunt temporibus proportionales. At partes vorticis tali motu revolvi nequeunt. Deſignent *AD*, *BE*, *CF*, orbes tres circa ſolem *S* deſcriptos, quorum extimus *CF* circulus ſit ſoli concentricus, & interiorum duorum aphelia ſint *A*, *B* & perihelia *D*, *E*. Ergo corpus quod revolvitur in orbe *CF*, radio ad ſolem ducto areas temporibus proportionales deſcribendo, (o) movebitur uniformi cum motu. Corpus autem quod revolvitur in Orbe *BE*, tardius



(o) * *Movebitur uniformi cum motu.* Æqualibus enim temporibus æquales areæ, & proindè æquales arcus, hoc eſt, æqualia ſpatia deſcribuntur.

dius movebitur in Aphelio *B* & velocius in Perihelio *E*, (p) ſecundum leges Aſtronomicas; cùm tamen (q) ſecundum leges Mechanicas materia Vorticis in ſpatio anguſtiore inter *A* & *C* velocius moveri debeat quam in ſpatio latiore inter *D* & *F*; id eſt, in Aphelio velocius quam in Perihelio. Quæ duo repugnant inter ſe. Sic in principio Signi Virginis, ubi Aphelium Martis jam verſatur, diſtantia inter orbes Martis & Veneris eſt ad diſtantiam eorundem orbium in principio Signi Piſcium ut tria ad duo circiter, & propterea materia Vorticis inter Orbes illos in principio Piſcium debet eſſe velocior quam in principio Virginis in (r) ratione trium ad duo. Nam quo anguſtius eſt ſpatium per quod eadem Materiæ quantitas eodem revolutionis unius tempore tranſit, eo majori cum velocitate tranſire debet. Igitur ſi Terra in hâc Materiâ cœleſti relative quieſcens ab eâ deferretur, & unà circa Solem revolveretur, (ſ) foret hujus velocitas in principio Piſcium ad ejuſdem velocitatem in principio Virginis in ratione ſeſquialterâ. (t) Unde Solis motus diurnus apparens in principio Virginis major eſſet quam minutorum primorum ſeptuaginta, & in principio

(p) * *Secundùm leges Aſtronomicas.* Quoniam axis ellipſeos per aphelium B & perihelium E tranſit eſtque ellipſi normalis, area quam radius vector SB tempore quam minimo deſcribit, erit æqualis rectangulo ex diſtantiâ SB in arcum quam minimum à corpore in B deſcriptum; & ſimiliter area æqualis quam radius vector SE eodem tempore quam minimo deſcribit, æquatur rectangulo ex diſtantiâ SE ductâ in arcum à corpore in E deſcriptum, & ideò prior arcus eſt ad poſteriorem, hoc eſt, velocitas in B, eſt ad velocitatem in E, ut diſtantia SE ad diſtantiam majorem SB.

(q) * *Secundùm leges mechanicas.* Nam cum vortex ſupponatur eſſe in ſtatu permanenti, æquales materiæ quantitates per ſpatium anguſtius AC, & per ſpatium latius DF, ut fit in fluviis, eodem tempore tranſeunt, & propterea materia vorticis in ſpatio anguſtiore inter A & C, velociùs movetur quàm in ſpatio latiore inter D & F. Quantitas autem materiæ, quæ dato tempore tranſit per ſpatium AC, vel DF, eſt ut ſpatium hoc directè & materiæ velocitas mediocris inversè, & ideò mediocris velocitas materiæ inter A & C, eſt ad mediocrem velocitatem materiæ inter D & F, ut FD ad AC.

(r) * *In ratione trium ad duo.* (per not. præced.).

(ſ) * *Foret hujus velocitas.* Ex obſervationibus Aſtronomicis conſtat terram inter Veneris & Martis orbes poſitam eſſe.

(t) * *Undè ſolis motus diurnus apparens.* Hic motus eſt angulus quem ſol, radiis ad terram ductis, proprio motu ab occidente in orientem unoquoque die deſcribere nobis videtur, quem quidem angulum terra, radiis ad ſolem ductis, in hypotheſi copernicæâ, conficit. Porrò notiſſimum eſt circulum illum quem ſol inter fixas motu annuo deſcribere videtur, ab

cipio Piſcium minor quam minutorum quadraginta octo: & cum tamen (experientiâ teste) apparens iste Solis motus major ſit in principio Piſcium quam in principio Virginis, & propterea Terra velocior in Principio Virginis quam in Principio Piſcium. (u) Itaque Hypotheſis Vorticum cum Phænomenis Aſtronomicis omnino pugnat, & non tam ad explicandos quam ad perturbandos motus cœleſtes conducit. Quomodo verò motus iſti in ſpatiis liberis abſque Vorticibus peraguntur intelligi poteſt ex Libro primo, & in Mundi Syſtemate plenius docebitur.

ab Aſtronomis dividi in partes duodecim æquales, ſeu ſigna quorum hæc duo virgo & piſces ſunt directè oppoſita, ità ut dum terra in hypotheſi Copernici, eſt in principio piſcium, ſol appareat in principio virginis & contrà. Cum igitur angularis velocitas terræ in principio piſcium ſit ad ejus velocitatem angularem in principio virginis ut 3 ad 2, ſolis motus diurnus apparens in principio virginis eſt ad ejus motum apparentem in principio piſcium in eâdem ratione 3 ad 2. Solis motus diurnus apparens medius eſt minutorum primorum 59 & ſecundorum 8, ſeu ſecundorum 3548, qui numerus dicatur M; Quarè ſi ſolis motus diurnus apparens in principio virginis, ponatur $=M+X$, & in principio piſcium $=M-X$, erit $M+X:M-X=3:2$, undè invenitur $X=\frac{1}{5}M=707''$ quam proximè, ac proindè erit $M+X=4255''=70'+55''$, & $M-X=2841''=47'+21''$. Ergò ſolis motus diurnus apparens in principio virginis major eſſet quam minutorum primorum ſeptuaginta, & in principio piſcium minor quam minutorum quadraginta octo; cum tamen ex obſervationibus Aſtronomicis ſol in principio virginis é tellure viſus motu diurno conficere videatur minuta prima 58 tantùm & in principio piſcium minuta prima 60 ſeu gradum unum.

(u) * *Itaque hypotheſis vorticum.* Quoniam vorticis materia circulos deſcribit æquatori vorticis parallelos, neceſſe eſt (per hanc prop. 53.) ut planetæ omnes ferantur in orbitis æquatori parallelis, ſed obſervatum eſt nullum planetam in orbitâ æquatori parallela revolutiones ſuas abſolvere, & cometas variis directionibus in omnes cœli plagas ferri. Eadem eſt difficultas ſi per vim centrifugam partium vorticis explicetur vis centripeta ſeu gravitas corporum quæ ad axem vorticis perpendiculariter tendere deberent, non verò ad vorticis centrum dirigi. Sed de his vid. acta Erudit. Lipſ. an. 1686. & 1695.; Diaria erudit 1703. 1707. monumenta Acad. Pariſ. 1709. Diſſertationis Clar. Hugenii & Bulffingeri de causâ gravitatis.

FINIS TOMI II.

INDEX SECTIONUM
DE MOTU CORPORUM.
TOMI II.

ERRATA TOMI II. IN TEXTU.

Pag. 132. *lin.* 13. acendit *lege* aſcendit. *P.* 196. *l.* Quar *leg.* Quare.

ERRATA IN NOTIS.

Pag. 5. *col.* 1. *lin.* 26. r d t = g d t *leg.* r d t − g d t. *P.* 8. *c.* 2. *l.* 14. per uniunt *leg.* perveniunt. *Ibid. l.* 20. prio ratio *leg.* prior ratio. *P.* 13. *c.* 2. *l.* 8. v. gr. cum *deleantur hæc verba*. *P.* 14. *c.* 1. *l.* 1. in tabulas *leg.* in tabulis. *Ibid. l.* 5. quantiſas *leg.* quantitas. *P.* 19. *c.* 1. *l.* 3. ad motum temporis *leg.* ad modum temporis. *P.* 35. *c.* 1. *l.* 8. logarithmicam *leg.* per logarithmicam. *P.* 40. *c.* 2. *l.* 11. jungantur *leg.* jungatur. *P.* 57. *c.* 1. *l.* 21. $\frac{1}{1}$ *b leg.* $\frac{1}{2}$ *b*. *Ibid. col.* 2. *l.* 33. naſcenti, ortu *leg.* naſcentis ortu. *P.* 58. *c.* 1. *l.* 11. avelocitates *leg.* velocitates. *P.* 130. *c.* 1. *l.* 35. vel amittere *deleatur* amittere. *P.* 190. *c.* 2. *l.* 1. $\sqrt{}$ M O = m o *leg.* $\sqrt{}$ M R = $\sqrt{}$ m r. *P.* 191. *c.* 2. *l.* 32. arcûs d e *leg.* arcûs d c. *P.* 222. *c.* 2. *l.* 9. Summâ *leg.* Summa. *P.* 223. *uſque ad paginam* 233. *ad marginem notatum eſt* 182. *leg.* 183. *P.* 235. *ad marginem* 183. *leg.* 184. *P.* 295. *col.* 2. *l.* 10. mathematicâ *leg.* mathematica. *P.* 300. *c.* 1. *l.* 37. aqua per conodem *leg.* aqua quæ per conodem. *Ibid. c.* 2. *l.* 5. affecati *leg.* affecuti.

In initio ſingularum notarum quibus numerus præfixus non fuit, ejus loco aſteriſcus * *depictus eſt: à pagina verò* 130 *alter aſteriſcus ſubinde reperietur, cujus alius non eſt uſus quàm ut diſtinguat ea quæ inſerta ſunt ab Editore (eo jure ſibi ab Autoribus commentarii conceſſo); idem etiam deſignat ſignum* (†) *quibuſdam notis præfixum ne ſcilicet turbaretur ordo litterarum ab Autoribus ipſis adhibitus.*





